## 山东大学 2023-2024 学年第一学期期中考试试卷

课	程_量子力学_	考试时间 2023 年 11 月 13 日
姓	名	学 号

\*\*\*\*\*\*\* 注:请将答案全部答在答题纸上,直接写在试卷上无效。\*\*\*\*\*\*\*

一、带电粒子在稳定电磁场中的拉氏量为

$$L = \frac{1}{2} m \left( \dot{x}^i \right)^2 - q \phi + \frac{q}{c} \dot{x}^i A^i , \qquad (i = 1, 2, 3)$$

- (1) 推导出与  $x^i$  对应的共轭动量。
- (2) 推导出哈密顿量。

## 下面考虑经典物理中带电粒子在匀强磁场 $\vec{B} = B\hat{e}_z$ 中的运动

- (3) 描述经典物理中一个带电粒子在该磁场中的运动情况。画出其运动轨迹并简单解释为何粒子沿该轨迹运动。
- (4) 在经典物理中,带电粒子在该磁场中的最小能量是多少?此时粒子处在何种状态?求最低能量状态下的  $\bar{x}$ ,  $\Delta x$ ,  $\bar{p}_x$ ,  $\Delta p_x$ ,  $\Delta x \Delta p_x$  (仅 x 方向)。
- (5) 证明矢势  $\vec{A} = Bx\hat{e}_y$  对应上述磁场  $\vec{B}$ 。

## 下面考虑量子物理中带电粒子在匀强磁场 $ec{B}=B\hat{e}_z$ 中的运动

- (6) 利用 (5) 中的  $\vec{A}$ ,推导出坐标表象下的三维 Schrödinger 方程。
- (7) 下面求解坐标表象下的本征方程,利用分离变量法将 z 与 x, y 分离,解出 z 方向本征方程的本征值和本征态。
- (8) 假设 x,y 方向本征方程的解具有  $e^{\frac{i}{\hbar}p_yy}\psi(x)$  的形式,解出  $\psi(x)$  的表达式。
- **(9)** 结合 (7)、(8) 的结果,写出三维坐标表象下能量的本征态和相应的本征值,该能量的本征值是连续的,还是只能取分立值?
- **(10)** 最小的本征能量是多少?对具有最小能量的本征态,计算 $\bar{x}$ , $\Delta x$ , $\bar{p}_x$ , $\Delta p_x$ , $\Delta x \Delta p_x$ (仅x 方向),和 (4) 中的经典结果对比,有什么异同?简单解释原因。

(11) 若 t=0 时刻的波函数有如下形式

$$\langle \vec{x} | \psi(0) \rangle = C e^{-\frac{qB}{2\hbar c}(x^2 + z^2)},$$

求归一化常数  $C \in \mathbb{R}$ 。

- **(12)** 用 (11) 中的初始波函数求任意 t > 0 时刻的波函数  $\langle \vec{x} | \psi(t) \rangle$ ,描述该波函数 如何随时间变化。
- 二、 考虑 Hilbert 空间中的如下 3 个算符

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 对于任意矢量  $|\psi\rangle$ , 测量  $\tau_3$  可能得到哪些结果。
- (2) 测量  $\tau_3$ , 取测量结果为正数的态,对这些态测量  $\tau_1$ , 求  $\langle \tau_1 \rangle$ ,  $\langle \tau_1^2 \rangle$  和  $\Delta \tau_1$ .
- (3) 用  $\tau_3$  的归一化本征态为基矢,展开  $\tau_1$  的归一化本征态。
- (4) 测量  $\tau_3$ , 取测量结果为负数的态,对这些态测量  $\tau_1$ , 求可能得到的测量值及各测量值出现的概率。
- (5) 考虑态

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

若测量  $\tau_3^2$ , 得到  $\frac{1}{4}$  的概率是多大,测量后的态是什么?若对测量后的态进一步测量  $\tau_3$ , 可以得到哪些结果?出现各结果的概率是多大?