2023年11月16日 9:03

CH9 不确定原理再认识

§9.1 引言

回忆 $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$，其中 $(\Delta x)^2 = \dfrac{\langle\psi|(\hat{x}-\bar{x})^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$，$\bar{x} = \dfrac{\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$

$$(\Delta p)^2 = \frac{\langle\psi|(\hat{p}-\bar{p})^2|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}, \quad \bar{p} = \frac{\langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$$

$\Delta x \Delta p$的值依赖$|\psi\rangle$的具体形式，但对所有的物理态$|\psi\rangle$ $\Delta x \Delta p$都不能小于$\hbar/2$

Ex 9.1 若我们取$\hat{x}$的本征态进行测量，则$\Delta x = 0$，是否与$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$矛盾？为了数学上有意义，应如何设计实验？

§9.2 不确定关系的推导

Ex 9.2 任给两个厄米算符 $\hat{\Omega}$ 和 $\hat{\Lambda}$，求测量它们的不确定性的乘积 $\Delta\omega\Delta\lambda$ 的最小值.

Ex 9.3 求满足$\Delta\omega\Delta\lambda$最小值的波函数. 取 $\hat{\Omega}=\hat{p}$, $\hat{\Lambda}=\hat{x}$，验证得到的结果

Ex 9.4 Ex 9.3的方法解出的波函数并不是唯一使$\Delta x \Delta p = \hbar/2$的解.
令 $\hat{\Omega}=\hat{p}$，$\hat{\Lambda}=\hat{x}$，在坐标表象下解以下方程

$\hat{\Omega} - c\hat{\Lambda}|\psi\rangle = \bar{\omega} - c\bar{\lambda}|\psi\rangle$，其中$c$为纯虚数.

求$\langle x|\psi\rangle$

(hint: 不失一般性，我们可以取坐标系使 $\bar{x}=0$)

9-2

2023年11月16日 15:54

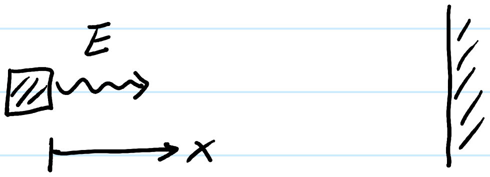
§9.5 能量—时间不确定关系

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \qquad \text{———} \qquad (*)$$

由于时间t在量子力学框架中只是个参数，Δt并没有算符定义. 这个关系式不能在量子力学框架下推导

意义：(1) 存在有限时间Δt的态在测量能量时必然有不确定度ΔE满足(*)

e.g. 光电效应，光子能量 $E <$ 逸出功 ϕ



理论上不会有电子逸出

但实际上在光的波前打到金属时，仍有电子电离

随着时间延长，逸出的电子迅速减少到零

$$\langle x|\psi\rangle = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{ct}}}_{\text{归一化}} e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 x - \underset{E=p_0c}{E}t)}\,\theta(x)\,\theta(ct-x)$$

$$\Rightarrow \langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \underbrace{\langle p|x\rangle}_{=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}} \langle x|\psi\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar ct}} \int_0^{ct} e^{-\frac{i}{\hbar}px}\, e^{\frac{i}{\hbar}p_0(x-ct)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar ct}}\, e^{-\frac{i}{\hbar}p_0 ct} \underbrace{\int_0^{ct} e^{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)x}\, dx}$$

$$= \frac{-i\hbar}{p_0-p}\, e^{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)x}\Big|_0^{ct}$$

$$= \frac{-i\hbar}{p_0-p}\left[e^{\frac{i}{\hbar}(p_0-p)ct} - 1\right]$$

$$\stackrel{\downarrow}{=}(-i)\sqrt{\frac{\hbar}{2\pi ct}}\frac{1}{p_0-p}\left[e^{-\frac{i}{\hbar}pct}-e^{-\frac{i}{\hbar}p_0ct}\right]$$

$\Rightarrow$ 对$|\psi\rangle$测量$\hat{p}$得到p的概率密度为

$$|\langle p|\psi\rangle|^2=\frac{\hbar}{2\pi ct}\frac{1}{(p_0-p)^2}\left(e^{\frac{i}{\hbar}pct}-e^{\frac{i}{\hbar}p_0ct}\right)\left(e^{-\frac{i}{\hbar}pct}-e^{-\frac{i}{\hbar}p_0ct}\right)$$

$$=2-e^{\frac{i}{\hbar}(p-p_0)ct}-e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p_0)ct}$$

$$=2-2\cos\left[\frac{1}{\hbar}(p-p_0)ct\right]$$

$$=\frac{\hbar}{\pi ct}\frac{1}{(p_0-p)^2}\left\{1-\cos\left[\frac{1}{\hbar}(p-p_0)ct\right]\right\}$$

考虑$p\neq p_0$，当t增加时$\cos$函数迅速震荡，其平均值趋于0，于是$|\langle p|\psi\rangle|^2\propto\frac{1}{t}$

对于$p\sim p_0$，$1-\cos\left[\frac{1}{\hbar}(p-p_0)ct\right]\approx\frac{1}{2\hbar^2}(p-p_0)^2c^2t^2$

$$\Rightarrow|\langle p_0|\psi\rangle|^2\approx\frac{\hbar}{\pi ct}\frac{1}{\cancel{(p_0-p)^2}}\frac{1}{2\hbar^2}\cancel{(p-p_0)^2}c^2t^2$$

$$=\frac{ct}{2\pi\hbar}$$

所以$\langle p_0|\psi\rangle$在$t\to+\infty$时趋于δ函数.

(2) 寿命为Δt的量子态的能量有不确定性ΔE，满足(*)

e.g. H原子基态寿命为无穷大，所以$E=-13.6\,eV$为准确值

但激发态由于会退激发，其寿命有限. 因此能量有不确定性

e.g. 对于基本粒子也是一样. 稳定的粒子，比如e^-, p有确定质量，但对于不稳定粒子，比如n、π, μ^-等，其质量有不确定性Δm，满足 $\Delta t\Delta mc^2\geq\frac{\hbar}{2}$

9-4

2023年11月16日 20:57

(3) 在量子物理中，一个反应过程的能量可以不守恒，若中间某个状态偏离能量守恒的值为ΔE，则该状态的寿命约为 $\frac{\hbar}{2\Delta E}$

因为$\hbar$很小，所以在日常生活中感受不到这些破坏能量守恒的态.