Homework 13 (due on Dec. 11th)

2023年12月5日 20:40

Problem 1 在第二次作业中，我们计算了三维欧氏空间中的转动矩阵的"生成元"

$$\Omega_j = i\frac{dR_j(\theta)}{d\theta} \quad (j=1,2,3)$$

其中$R_j(\theta)$为绕j轴旋转θ角的矩阵，可以证明

$$[\Omega_i, \Omega_j] = i\varepsilon_{ijk}\Omega_k$$

这和角动量算符$\hat{L}_i$的对易关系相同，因此§12.3中得到的结论对Ω_i同样适用。

特别地，$\Omega^2=\Omega_1^2+\Omega_2^2+\Omega_3^2$和$\Omega_3$有共同的本征态$|l,m\rangle$满足

$$\Omega^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle$$

$$\Omega_3|l,m\rangle = m|l,m\rangle$$

(1) 求l的取值。

(2) 求$|l,-l\rangle \dots |l,l\rangle$的列向量形式

(3) 定义$\Omega_\pm=\Omega_1\pm i\Omega_2$，写出$\Omega_\pm$的矩阵表示，并用矩阵计算表明

$$\Omega_+|l,l\rangle=0$$

$$\Omega_-|l,-l\rangle=0$$

$$\Omega_+|l,m\rangle=\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,|l,m+1\rangle$$

$$\Omega_-|l,m\rangle=\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,|l,m-1\rangle$$

Problem 2 用第一题得到的l值，其本征态的坐标表示为

$$\langle xyz|lm\rangle = Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

利用$\hat{L}_\pm$的坐标表示，证明

(1) $\hat{L}_+|l,l\rangle=0$

(2) $\hat{L}_-|l,-l\rangle=0$

2023年12月5日 20:56

(3) $\hat{L}_+|l,m\rangle=\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\,\hbar\,|l,m+1\rangle$

(4) $\hat{L}_-|l,m\rangle=\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\,\hbar\,|l,m-1\rangle$

比较第一题和第二题，可见虽然两者对应的物理不同，但是本征态满足的方程都有相同的形式，根源就在于这两种情况的算符（"生成元"）满足相同的对易关系

附加题：仿照 Ex 12.11 计算 $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$, $\hat{L}^2$, $\hat{L}_+$, $\hat{L}_-$ 在球坐标下的表示（每个3分，共15分）