13-1

2023年12月3日 10:01

CH 13 氢原子

- 由上一章可知，$\psi_{lm}=R_l(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$，其中 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 部分与 r 无关，$R_l(r)$ 由 $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$ 决定

- 氢原子是质子 p 和电子 e 的两体束缚态，Hilbert 空间为 $V_p\times V_e$，利用质心坐标和相对坐标，可以分解为

$$V_p\times V_e = V_{cm}\otimes V_{rel}$$

在质心坐标系中，问题简化为一个单体问题

$$H=\frac{\vec{P}_{rel}^{\,2}}{2m}-\frac{e^2}{r}$$

其中 $\vec{p}_{rel}=\vec{p}_e-\vec{p}_p$ 为电子和质子的相对动量，

$m=\frac{m_em_p}{m_e+m_p}$ 为电子的约化质量.

r 为到质心的距离

由于 $m_p\approx 938\ MeV \gg m_e\approx 0.511\ MeV$，所以质心几乎和质子的位置相同，质心系约等于质子的静止系

$m\approx m_e$

r 约为到质子的距离.

- 利用 $[\hat{H},\hat{L}^2]=0$ 和 $[\hat{H},\hat{L}_3]=0$ 可知 $|l\,m\rangle$ 也是 $\hat{H}$ 的本征态，用 $|E,l,m\rangle$ 标记这个本征态，满足

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{H}|E,l,m\rangle = E|E,l,m\rangle\\
&\hat{L}^2|E,l,m\rangle = l(l+1)\hbar^2|E,l,m\rangle\\
&\hat{L}_3|E,l,m\rangle = m\hbar|E,l,m\rangle
\end{aligned}\right\}\ \text{---}\ (*1)$$

13-2

2023年12月3日 11:44

由上一节推导可知

$$\langle x,y,z|E,l,m\rangle = R_{El}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \quad \text{———} (*2)$$

其中 $\int dr\, r^2 |R_{El}(r)|^2 = 1$

Ex 13.1 从(*1)和(*2)式出发，在坐标表象下推导出 $R_{El}(r)$ 满足的微分方程

Ex 13.2 将 R_{El} 的微分方程无量纲化.

Ex 13.3 仿照求谐振子本征态波函数的方法，求解 Ex 13.2 得到的微分方程（只考虑 $E<0$ 的情况）

Ex 13.4 (1) 仿照上例计算 $\psi_{210}(\vec{r})$, $\psi_{211}(\vec{r})$ 和 $\psi_{2,1,-1}(\vec{r})$

(2) 计算 $\psi_{100}(\vec{r})$, $\psi_{200}(\vec{r})$, $\psi_{210}(\vec{r})$, $\psi_{211}(\vec{r})$ 和 $\psi_{2,1,-1}(\vec{r})$ 的 $\bar{r}$, Δr,（用 a_0 表示）

(3) 用程序画出 $R_{10}(r)$, $R_{20}(r)$ 和 $R_{21}(r)$ 的曲线，并和上面计算的 Δr 相比较.

(4) 在经典物理中，若吸引势能为 $\frac{1}{r}$ 的形式，则最低能量的粒子会集聚在 $r\sim 0$ 处. 在量子物理中，若测量最低能量的电子的位置，其最可能出现在哪里？解释和经典物理的异同

(5) 比较 $R_{20}(r)$ 和 $R_{21}(r)$ 的曲线，解释角动量 l 对波函数极值位置的影响.

(6) $R_{10}(r)$, $R_{20}(r)$ 和 $R_{21}(r)$ 和 r 轴有多少交点？对此你能得到什么样的猜测

Ex 13.5 (1) 将本征能量用玻尔半径 a_0 表示
(2) 给定 $n \geq 1$，计算本征能量为 E_n 的态的个数（简并度）

Ex 13.6 (1) 计算氢原子的 a_0（单位 nm）和能级 E_n（单位 eV）
(2) 证明 $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ 是无量纲的量，并求其数值.

总结：
在这一章中我们推导了氢原子电子的径向波函数 $R_{nl}(r)$
波函数由 n, l, m 3个量子数描述

n: 主量子数 $n \geq 1$
l: 角动量量子数 $0 \leq l \leq n-1$
m: 磁量子数 $|m| \leq l$

波函数 $|nlm\rangle$ 的坐标表象为

$$\langle xyz|nlm\rangle = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

能量本征值只与 n 有关

$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}$$

对于给定 n，简并度为 n^2

延展阅读，对于 E_n 只依赖于 n 而不依赖 l，有更深层次的原因，感兴趣的同学请自行学习 Shankar §13.2