第 40 卷 第 1 期
2019 年 2 月

固 体 力 学 学 报
CHINESE JOURNAL OF SOLID MECHANICS

Vol. 40 No. 1
February 2019

基于广义应变梯度理论的纳米梁挠曲电效应研究*

杨 旭 周亚荣 陈玲玲 王炳雷**

(山东大学土建与水利学院工程力学系，济南，250061)

摘 要 挠曲电效应是应变梯度与电极化的耦合，它存在于所有的电介质材料中. 在纳米电介质结构的挠曲电效应研究中，应变梯度弹性对挠曲电响应的影响一直以来被低估甚至被忽略了. 根据广义应变梯度理论，应变梯度弹性中独立的尺度参数只有三个，而文献中所采用的一个或两个尺度参数的应变梯度理论只是它的简化形式. 基于该理论，论文建立了考虑广义应变梯度弹性的三维电介质结构的理论模型，并以一维纳米梁为例研究了其弯曲问题的挠曲电响应及其能量俘获特性. 结果表明，纳米梁的挠曲电响应存在尺寸效应，并且弹性应变梯度会影响结构挠曲电的尺寸效应，特别是当结构的特征尺寸低于尺度参数时. 论文的工作为更进一步理解纳米尺度下的挠曲电机理和能量俘获特性提供理论基础和设计依据.

关键词 挠曲电效应，应变梯度，尺寸效应，能量效率

DOI：10.19636/j.cnki.cjsm42-1250/o3.2018.042

0 引言

力电耦合效应广泛地存在于各类介电材料中，常见的有压电效应、电致伸缩效应等. 其中，压电效应是最常见的一种力电耦合效应，在诸如俘能器、传感器、驱动器以及微机电系统等领域都得到广泛应用[1-3]. 在压电材料中，电极化($\boldsymbol{P}$)与应变($\boldsymbol{\varepsilon}$)之间的关系为：

$$P_i = d_{ijk}\varepsilon_{jk} \tag{1}$$

其中 d_{ijk} 是三阶的压电常数.

然而，在亚微米和纳米尺度的介电材料中，另一种力电耦合现象—挠曲电效应是不容忽视的[4]. 挠曲电效应是应变梯度($\nabla\boldsymbol{\varepsilon}$)与电极化($\boldsymbol{P}$)之间的耦合效应. 对于既有压电效应又有挠曲电效应的介电材料，电极化可表示如下：

$$P_i = d_{ijk}\varepsilon_{jk} + f_{ijkl}\frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_l} \tag{2}$$

其中 f_{ijkl} 是四阶挠曲电系数张量.

尽管关于压电效应的理论研究和应用已经相对成熟，但是对于挠曲电效应的研究仍处于起步阶段. 相比于压电效应，挠曲电效应具有独特的优点：(1) 压电效应只存在于非中心对称晶体结构的电介质材料中，而挠曲电效应普遍存在于所有电介质材料中[5]；(2) 居里温度会影响压电效应，当温度高于居里温度时压电效应就会消失，而挠曲电效应则不受居里温度的限制；(3) 压电材料一般来说比较脆，而挠曲电效应存在于所有的介电材料中，包括软材料、生物薄膜以及人体生物结构.

挠曲电效应最初是由 Mashkevich 和 Tolpyg[6] 于 1957 年在研究晶体的晶格动力学时发现的. 1964 年，Kogan[7] 在非均匀变形的中心对称晶体中引入应变梯度的概念，描述了应变梯度与电极化强度之间的力电耦合关系. 实验证明：不仅仅在液晶[8] 中，在聚合物[9]、晶体材料[10]、生物膜[4] 和人体结构[11, 12] 中都发现了挠曲电效应. 围绕着挠曲电效应，相关学者通过理论建模[13-17]、数值模拟[18, 19] 和实验[10, 20] 等方法对挠曲电效应的基本理论和应用进行了深入研究，读者也可参考相关综述文章[21-23].

提起挠曲电，必然要提及应变梯度理论，因为应变梯度是引起挠曲电效应的直接原因. 在挠曲电的理论模型中，考虑了极化强度($\boldsymbol{P}$)与应变梯度($\nabla\nabla\boldsymbol{u}$)之间的耦合. 但是对于应变梯度弹性项($U \sim \nabla\nabla\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{g}\cdot\nabla\nabla\boldsymbol{u}/2$，这是应变梯度理论的关键项)，有的研究工作考虑了其影响[5, 24, 25]，而有的并没有考虑[26, 27]. 最近的研究证明，应变梯度弹性项在纳米尺度下是不容小觑的[5]：挠曲电的尺寸效应现象表明结构的挠曲电响应随着结构特征尺寸的降低而增

* 2018-11-16 收到修改稿， 2018-12-01 网络首发.
** 通讯作者. Tel：0531-88392812， E-mail：bwang@sdu.edu.cn.

大.实际上,这种降低的趋势并不可能一直持续,而应变梯度弹性项的存在正好抑制了这种现象.

应变梯度理论由 Mindlin[28] 最先提出,用来描述微观结构的线弹性行为.根据该理论,各向同性材料除了两个独立的拉梅常数外,还需要 16 个独立的长度尺寸参数(简称尺度参数).后来,Mindlin 和 Eshel[29] 提出了简化的理论模型,将各向同性材料所需尺度参数由 16 个缩减到 5 个.然而,由于很难通过实验得到这五个尺度参数,因此限制了其在工程中的应用,而且这五个尺度参数并不独立[30].

然而,现有文献中所采用的 Lam 的应变梯度理论[31]、偶应力理论[32-34]、Aifantis 应变梯度理论[35,36] 等都可以看作 Mindlin 理论的简化理论或近似理论.近来,周慎杰等[30] 提出了一种广义应变梯度理论,该理论从 Mindlin 的理论出发,采用两种形式的张量正交分解,从理论上严格证明了独立的尺度参数有且只有三个.并且该理论中的三个参数都是可以通过简单变形测量得到,例如可以通过圆柱扭转可以测得 l_2,进而通过诸如弯曲和剪切等简单变形实验测量 l_0 和 l_1.该理论第一次证明了各向同性材料中独立的尺度参数的数量.而现有的表征尺寸效应的理论中有的只含有一个尺度参数(非局部理论[37]、偶应力理论[34]),有的有两个尺度参数(梯度弹性理论[38]),也有的有三个尺度参数(Lam 的应变梯度理论[31],但这三个参数并不独立).该理论与已有的应变梯度理论或简化理论的关系请见文献[39].

在纳米结构挠曲电效应的研究工作中,有的研究考虑了应变梯度弹性项的影响(纳米圆柱[24],圆盘[40],梁[25,41],锥台[5] 等).但是为了计算简便,只引入了一个尺度参数,这是不全面的.Fleck 和 Hutchinson[42] 已经证明了单个尺度参数无法全面解释小尺寸现象.因为单个尺度参数是无法表征或描述结构的不同简单变形(例如:单轴拉伸,扭转,弯曲等).

因此,本文采用含有三个尺度参数的广义应变梯度理论[30] 来建立纳米电介质结构的理论模型.并通过一个简单算例,研究了应变梯度弹性项等其他参数对挠曲电响应的影响,并证明了应变梯度弹性项的重要性.

1 纳米电介质结构理论模型

1.1 电介质结构理论模型

在静电场中,高斯定理可表示为:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\rho_f \tag{3}$$

其中 D 表示电位移向量,ρ_f 表示体电荷密度.在电介质中,电极化 P 可以定义为:

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}-e_0\boldsymbol{E} \tag{4}$$

其中 E 表示电场,$e_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ 是真空中的介电常数.

不考虑边缘效应,在整个电介质结构的体域内,考虑挠曲电的哈密顿原理可表述为:

$$\delta\int_\Omega\left(-\boldsymbol{U}+\frac{e_0}{2}\mid\nabla\boldsymbol{\Phi}\mid^2-\boldsymbol{P}\cdot\nabla\boldsymbol{\Phi}\right)\mathrm{d}V+\int_\Omega(\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{E}^0\cdot\delta\boldsymbol{P})\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{t}_0\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}a+\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{M}\cdot\delta\nabla\boldsymbol{u}=0 \tag{5}$$

其中 u 表示位移,Φ 是电势,P 是电极化密度,U 表示内能密度,q 和 E^0 分别表示外加体力和外加电场,t_0 表示面力,F 和 M 分别为外加集中力和力偶.

内能密度 U 的一般表达式[43]为:

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{\varepsilon},\nabla\nabla\boldsymbol{u},\boldsymbol{P},\nabla\boldsymbol{P}) \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\nabla\boldsymbol{u}+(\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}})/2$.在本文的讨论中不考虑极化梯度,因此内能密度中只含有三个变量,同时考虑到 $\boldsymbol{\Phi}$,$\boldsymbol{P}$ 以及 $\boldsymbol{u}$ 为独立变量,可将式哈密顿原理改写为三个平衡方程:

$$\int_\Omega\left(-\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\cdot\delta\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial\nabla\nabla\boldsymbol{u}}\cdot\delta\nabla\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{q}\cdot\delta\boldsymbol{u}\right)\mathrm{d}V+\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{t}_0\cdot\delta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}a+\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{M}\cdot\delta\nabla\boldsymbol{u}=0 \tag{7}$$

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial\boldsymbol{U}}{\partial\boldsymbol{P}}+\nabla\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{E}^0\right)\cdot\delta\boldsymbol{P}\,\mathrm{d}V=0 \tag{8}$$

$$\int_\Omega(e_0\nabla\boldsymbol{\Phi}-\boldsymbol{P})\cdot\delta\nabla\boldsymbol{\Phi}\,\mathrm{d}V=0 \tag{9}$$

根据式(7)-(9)就可以建立三维电介质平衡方程和边界条件.

1.2 电介质纳米梁的挠曲电响应

本节以悬臂压电纳米梁的弯曲问题为例来研究其挠曲电响应问题.其中压电梁长为 L、厚度为 H、宽度为 B,并且在梁的末端加载外加的纵向载荷 F,如图 1 所示.在笛卡尔坐标系中,x 轴与梁未变形时的中心轴重合,z 轴沿梁的厚度方向,下文中 x_1,x_2,

x_3 方向分别表示坐标轴的 x，y，z 方向. 在梁的上表面（$z=H/2$）和下表面（$z=-H/2$）之间施加外加电压 V，梁沿 z 轴方向产生极化. 假设弯曲梁沿 z 轴方向的位移记为 $w(x)$，则在欧拉梁假设下压电纳米梁任意一点的位移可表示为如下形式：

$$\begin{cases} u_1(x)=-z\dfrac{\mathrm{d}w(x)}{\mathrm{d}x} \\ u_2(x)=0 \\ u_3(x)=w(x) \end{cases} \tag{10}$$

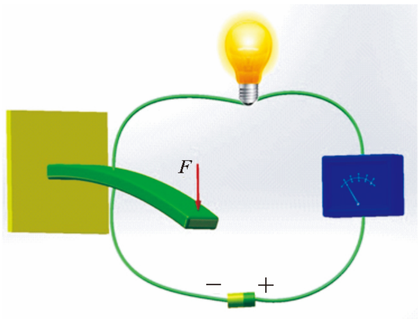

图 1　悬臂纳米梁示意图

Fig. 1　Schematic figure of the cantilever nano-beam

由此非零应变 ε_{ij} 为：

$$\varepsilon_{11}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{11}$$

非零应变梯度为：

$$\varepsilon_{11,1}=-z\frac{\partial^3 w}{\partial x^3},\quad \varepsilon_{11,3}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{12}$$

根据广义应变梯度理论[30,44]，内能密度函数可具体表示为：

$$\begin{aligned} U=&\frac{1}{2}a_{kl}P_kP_l+\frac{1}{2}c_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+d_{ijk}\varepsilon_{ij}P_k+\\ &f_{ijkl}u_{i,jk}P_l+\mu l_0^2\varepsilon_{mm,i}^2+\mu l_1^2\eta_{ijk}^{(1)}\eta_{ijk}^{(1)}+\\ &\mu\left(l_2^2+\frac{9}{5}l_0^2\right)\chi'^2_{ij}+\mu\left(l_2^2-\frac{9}{5}l_0^2\right)\chi'_{ij}\chi'_{ji} \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\varepsilon_{mm,i}$，$\eta_{ijk}^{(1)}$ 以及 χ'_{ij} 分别为膨胀梯度张量分量、拉伸梯度张量分量以及转动梯度张量分量，l_0、l_1、l_2 分别为对应梯度张量的相关内禀尺度参数，μ 为剪切模量. c，a 和 d 分别表示四阶弹性系数、二阶介电互异常数和三阶压电系数；f 为挠曲电系数，表示应变梯度与极化的耦合.

考虑到上述梯度张量中与应变和应变梯度有关的非零项：

$$\begin{cases} \eta_{111}^{(1)}=\dfrac{2}{5}\varepsilon_{11,1},\quad \eta_{333}^{(1)}=-\dfrac{1}{5}\varepsilon_{11,3} \\ \eta_{113}^{(1)}=\eta_{131}^{(1)}=\eta_{311}^{(1)}=\dfrac{4}{15}\varepsilon_{11,3} \\ \eta_{223}^{(1)}=\eta_{232}^{(1)}=\eta_{322}^{(1)}=-\dfrac{1}{15}\varepsilon_{11,3} \\ \eta_{221}^{(1)}=\eta_{212}^{(1)}=\eta_{122}^{(1)}=-\dfrac{1}{5}\varepsilon_{11,1} \\ \eta_{331}^{(1)}=\eta_{313}^{(1)}=\eta_{133}^{(1)}=-\dfrac{1}{5}\varepsilon_{11,1} \\ \chi'_{12}=\dfrac{1}{3}\varepsilon_{11,3},\quad \chi'_{21}=\dfrac{2}{3}\varepsilon_{11,3} \\ \chi'_{23}=\dfrac{1}{3}\varepsilon_{11,1},\quad \chi'_{32}=-\dfrac{1}{3}\varepsilon_{11,1} \end{cases} \tag{14}$$

以及电极化与电势只存在于 z 方向上，将内能函数代入式(7)-(9)中，并进行分部积分，可得到控制方程和边界条件分别为：

$$\begin{cases} \iint_{yz}\left[\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(z\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11}}+\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,3}}\right)-\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}\left(z\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,1}}\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ \quad +t_0=0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial P_z}+\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}+E^0=0 \\ e_0\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\dfrac{\partial P_z}{\partial z}=0 \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} \iint_{yz}\left[-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(z\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11}}+\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,3}}\right)+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\left(z\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,1}}\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ \quad +F=0 \\ \quad \text{or}\quad \delta w=0\quad \text{for}\quad x=0,L \\ \iint_{yz}\left[\left(z\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11}}+\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,3}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(z\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,1}}\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+M=0 \\ \quad \text{or}\quad \delta\dfrac{\partial w}{\partial x}=0\quad \text{for}\quad x=0,L \\ \iint_{yz}z\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,1}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \\ \quad \text{or}\quad \delta\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\quad \text{for}\quad x=0,L \\ \iint_{xy}\left(e_0\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}-P_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \\ \quad \text{or}\quad \delta\Phi\left(-\dfrac{h}{2}\right)=0\quad \text{and}\quad \Phi\left(\dfrac{h}{2}\right)=\Delta V \end{cases} \tag{16}$$

其中 $\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11}}=c_{11}\varepsilon_{11}+d_{13}P_z$，$\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,3}}=f_{13}P_z+\mu\cdot\left(\dfrac{12}{5}l_0^2+\dfrac{8}{15}l_1^2+2l_2^2\right)\varepsilon_{11,3}$，$\dfrac{\partial U}{\partial\varepsilon_{11,1}}=f_{1113}P_3+\mu\cdot\left(\dfrac{18}{5}l_0^2+\dfrac{4}{5}l_1^2\right)\varepsilon_{11,1}$ 而且 $f_{13}=f_{1133}$，$d_{13}=d_{113}$.

通过控制方程式(15)中的后两项，以及电势边界条件式(16)中的最后一项，并将式(11)和式(12)代入，可得电极化和电势为：

$$\begin{cases} P_3=\dfrac{e_0 d_{13}}{e_0 a_{33}+1}z\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{e_0 f_{1113}}{e_0 a_{33}+1}z\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+ \\ \qquad \dfrac{f_{13}}{a_{33}}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\Delta V}{a_{33}h} \\ \Phi=\dfrac{1}{2}\dfrac{d_{13}}{e_0 a_{33}+1}z^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{1}{8}\dfrac{d_{13}h^2}{e_0 a_{33}+1}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+ \\ \qquad \dfrac{\Delta V z}{h}+\dfrac{\Delta V}{2} \end{cases} \tag{17}$$

将式(17)返代回控制方程式(15)第一式及边界条件式(16)前三项中，可得压电梁挠度的控制方程和边界条件为：

$$R_1\frac{\partial^6 w}{\partial x^6}+R_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+t_0=0 \tag{18}$$

$$\begin{cases} -R_1\dfrac{\partial^5 w}{\partial x^5}-R_2\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+F=0 \\ \qquad \text{or}\quad \delta w=0 \quad \text{for}\quad x=0,L \\ R_1\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4}+R_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-K+M=0 \\ \qquad \text{or}\quad \delta\dfrac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{for}\quad x=0,L \\ R_1\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}+R_3\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \\ \qquad \text{or}\quad \delta\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{for}\quad x=0,L \end{cases} \tag{19}$$

其中 $R_1=\mu I\left(\frac{18}{5}l_0^2+\frac{4}{5}l_1^2\right)-\frac{e_0 f_{1113}^2}{e_0 a_{33}+1}I$，$R_2=\frac{f_{13}^2}{a_{33}}A+\frac{e_0 d_{13}^2}{e_0 a_{33}+1}I-c_{11}I-\mu A\left(\frac{12}{5}l_0^2+\frac{8}{15}l_1^2+2l_2^2\right)$，$R_3=\frac{e_0 f_{1113} d_{13} I}{e_0 a_{33}+1}$，$K=\frac{f_{13}\Delta V}{a_{33}h}A$，这里 A 和 I 分别为梁的横截面面积和横截面对 z 轴的惯性矩.

2　算例与结果分析

本算例中，梁的几何尺寸设置为，长 $L=20H$，宽 $B=2H$，厚度 $H=2l_0$. 在悬臂梁自由端施加与 z 轴反向的集中力：$F=-5$ nN. 并在梁的上下表面之间施加电势为 ΔV 的电载荷，下文中未特别说明时电势取 -0.2 V. 梁材料为钛酸钡，因此对于细长梁来说材料的各项属性参数为：$c_{11}=131$ GPa，$d_{31}=1.87\times10^8$ V/m，$a_{33}=0.79\times10^8$ V·m/C. 内禀尺寸参数取 $l_0=l_1=l_2=10$ nm[5]，值得注意的是，实际情况中三个内禀尺度参数不一定相等，本文为了简化计算因此取三个尺度参数相等，杨氏模量和泊松比分别为 $E=42.9$ GPa，$\upsilon=0.38$. 挠曲电系数取 $f_{13}=5$ V，$f_{1113}=0$. 根据以上给出的物理量可以很容易地推导出材料的其它参量.

根据上面给出的控制方程(18)和边界条件(19)可以得到挠度的表达式为：

$$w=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4x^4+C_5e^{S_0x}+C_6e^{-S_0x} \tag{20}$$

其中各项系数分别为：

$$\begin{cases} S_0=\sqrt{-\dfrac{R_2}{R_1}} \\ C_1=\dfrac{F}{R_1S_0^5}\dfrac{1-e^{-S_0L}}{1+e^{-S_0L}},\quad C_2=-\dfrac{F}{R_1S_0^4},\quad C_3=\dfrac{K-FL}{2R_2} \\ C_4=\dfrac{F}{6R_2},\ C_5=\dfrac{F}{R_1S_0^5}\dfrac{1}{1+e^{S_0L}},\ C_6=-\dfrac{F}{R_1S_0^5}\dfrac{1}{1+e^{-S_0L}} \end{cases} \tag{21}$$

2.1　结果分析

在下文结果讨论中，涉及到四种模型的结果：(1) SF 模型既考虑了挠曲电效应，也考虑了广义应变梯度理论，即本文建立的新模型；(2) FL 模型，只考虑挠曲电效应而不考虑广义应变梯度理论；(3) NF 模型，既不考虑挠曲电效应，也不考虑广义应变梯度理论；(4) SG 模型，只考虑广义应变梯度理论，而不考虑挠曲电效应.

首先，不同模型(SF、FL、NF、SG)下梁的挠度曲线如图 2 所示. 对比图中 SF 模型和 SG 模型以及 FL 模型和 NF 模型的曲线不难看出，当计算梁挠度时，考虑挠曲电效应与不考虑挠曲电效应，梁的最大挠度存在较大的差值. 对比 SF 模型与 FL 模型，以及 NF 模型和 SG 模型，可以发现在其它条件相同时，梁在考虑广义应变梯度理论时的挠度比不考虑广义应变梯度理论时的挠度小，因此应变梯度弹性对于梁弯曲的影响是不能忽略的. 从以上讨论中也可以看出，挠曲电以及应变梯度弹性都能使梁的挠度变小；但是也有区别，这可从控制方程式(18)和边界条件(19)中可以看出. 由控制方程可以看出在考虑弹性应变梯度之后，梁由于更高阶的变形，而使梁在整体看来变硬了，而挠曲电则是同时作用在梁的等效弯曲刚度和边界条件上，二者共同作用使梁的挠度减小. 另外，进一步对比图中曲线，挠曲电和弹性应变梯度共同作用时对梁的影响是叠加关系，但是具体是线性叠加还是非线性叠加还有待讨论，本文不做深入研究.

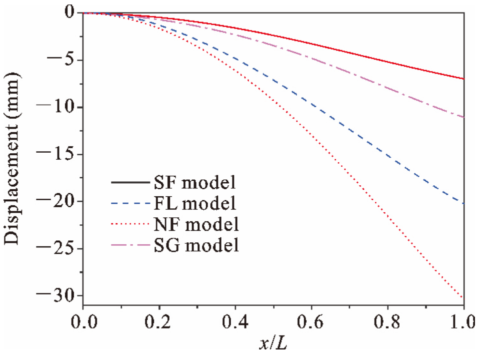

图 2　不同模型下梁的挠度

Fig. 2　Displacementof nanobeam under different models

其次，由图 3 可见，当材料尺寸参数固定时，梁的结构尺寸发生变化，在相同载荷情况下，梁的挠度也会产生相应的变化．并且对比图 3 中曲线，可以发现梁的挠度随梁结构尺寸的变化存在极值点，并且当梁的结构尺寸未达到极值时，挠度随结构尺寸的增大而增大，在梁的结构尺寸超过极值后，挠度随结构的尺寸增大而减小．其实，这种尺寸效应也可以通过等效弯曲刚度来解释：从控制方程式(18)中可知，在考虑广义应变梯度理论时，并且材料常数为固定值时，当梁的结构尺寸变大，其弯曲刚度存在一个最小值，因此同样的载荷条件下梁的挠度值会出现拐点．

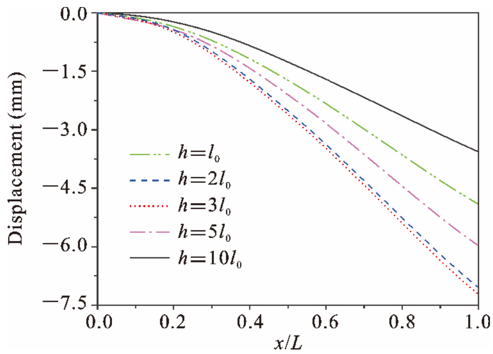

图 3　不同尺寸下梁的挠度

Fig. 3　Displacementof nanobeam under different size of structure

然后，图 4 描述了取不同挠曲电系数时，梁的挠度曲线图．对比图中曲线可以看出挠曲电系数取值越大时，梁的挠度越小．当挠曲电系数取 10 V 时，梁发生翘曲，可以预见挠曲电系数进一步增大时，梁的弯曲方向将发生改变，由此可见在算例预置的条件下，挠曲电对于梁弯曲行为的影响是巨大的．

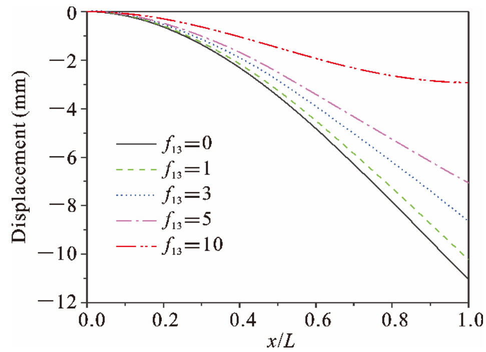

图 4　不同挠曲电系数下梁的挠度

Fig. 4　Displacementof nanobeam under different flexoelectric coefficients

从图 1 的分析中，我们知道挠曲电是同时作用于梁的等效弯曲刚度和边界条件，从而对其挠度产生影响．但是经过计算梁的等效弯曲刚度是随着挠曲电系数的增大而减小，也就是说，在不考虑挠曲电对边界条件影响的情况下，挠曲电系数增大，梁的弯曲行为应该增大，挠度变大．显然这与图 4 中的描述不符，这也就表明了，挠曲电作用于边界条件对梁产生的影响远大于其作用于等效弯曲刚度对梁产生的影响．事实上，挠曲电是与外加电压耦合之后作用于梁的边界条件上的．简单来说，考虑挠曲电效应时，在梁上施加电载荷可以看成是在梁末端施加一个等效的力偶，因此本节算例中梁的外加载荷可以看成是一个集中力以及一个等效力偶．这样在其它条件不变，只改变挠曲电系数时，相当于改变施加在梁末端的力偶大小，从而对梁的挠度产生影响．

再者，图 5 表示在无外加电载荷时，梁中点 $L/2$ 处的电势在挠曲电系数取不同值时沿厚度方向的变化曲线图．由电势边界条件可知，外加电压为零时，梁上下表面的电势均为零．而由电势表达式不难看出，外加电压为零时，梁中某一点电势沿厚度方向的变化为二次函数，这与图 5 中的曲线描述相一致．

如果进一步比较图 5 中的曲线，随着挠曲电系数的增加，梁中产生的电势极值也将相应地增加．并且当挠曲电系数增大到一定程度时，相比于不考虑挠曲电的情况，最大电势值增量达到 40%，从而证明了挠曲电效应的重要性．

最后，图 6 讨论了不同模型的能量效率 Q/F，其中 Q 表示电荷量，而 F 表示外加力，能量效率表示施加在梁上的每单位力载荷所能产生的电荷量．其中 $Q=\int P(x)\mathrm{d}A$ 是在只施加集中力载荷时因极

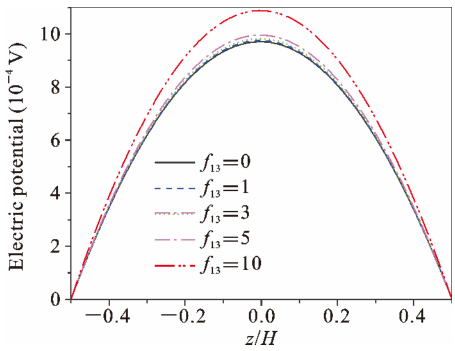

图 5 $x=L/2$ 处不同挠曲电系数下的电势

Fig. 5 Electric potential under different flexoelectric coefficients

化而在梁表面所产生的电荷量. A 表示梁在 x-y 平面的投影面积. 经过计算可知,在 SF 模型和 FL 模型中,电极化表达式中第一项得到的能量效率(量级在 10^{-11})要远低于其它项所得到的能量效率. 并且能量效率随挠曲电系数的增加而增加.

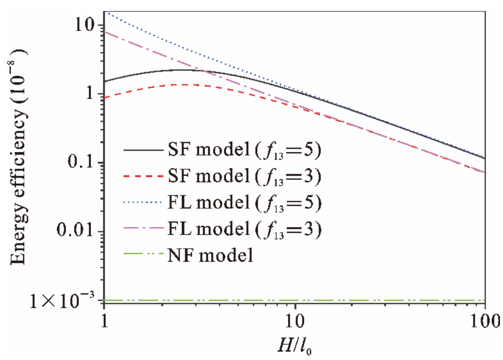

图 6 不同模型的能量效率

Fig. 6 Energy efficiency under different models

此外,对于 FL 模型来说,能量效率随着梁厚度的减小而持续增大,但 SF 模型中能量效率随着结构尺寸的减小,呈现先增加后减小的趋势,并且当结构尺寸足够大时其值与 FL 模型的值相当,这表明结构尺寸足够大时,应变梯度效应对于能量效率的影响将可以忽略不计. 在 H/l_0 较小时,SF 模型下的能量效率要小于 FL 模型下的能量效率,这是由于应变梯度弹性对能量效率的影响. 换言之,如果不考虑应变梯度弹性,随着结构尺寸的减小能量效率一直增加. 事实上,这种增大的趋势不可能一直持续下去. 而应变梯度弹性的存在恰好抑制了这种增长的趋势. 这也就是为什么要考虑应变梯度弹性的原因之一. 类似的现象在最近的一项研究工作中同样得到了证实[5],在这项研究中,考虑弹性应变梯度的压电效应 d^{eff} 是非线性的,并且比不考虑弹性应变梯度的简单模型的压电效应小. 这项研究指出了弹性应变梯度的重要性.

3 结论

为了准确描述纳米电介质结构的挠曲电响应,本文提出了考虑广义应变梯度弹性理论的挠曲电模型. 借助哈密顿原理,得到了纳米电介质结构的控制方程. 并以纳米尺度悬臂梁为例,建立了其弯曲问题的控制方程和边界条件,并得到了在力电载荷条件下梁挠度的解析解. 通过算例分析对比,我们发现在亚微米或是纳米量级时,挠曲电效应对于梁的影响是十分重要的,同时应变梯度弹性在此尺度量级上的影响也是不可忽略的. 另外,当梁的尺寸减小时,弹性应变梯度的影响呈现先增大后减小的趋势,而挠曲电效应的影响则是逐渐增大;并且当尺寸增大到一定程度时,弹性应变梯度的影响将会消失. 通过对纳米梁在力电耦合作用下产生的横向位移、电势以及能量效率的研究发现,弹性应变梯度效应以及挠曲电效应在纳米电介质结构中有着重要的作用.

参考文献

[1] Wang X B, Song J H, Zhang F, He C Y, Hu Z, Wang Z L. Electricity Generation Based on One-Dimensional Group-III Nitride Nanomaterials [M]. Advanced Materials, 2010, 22(19): 2155-2518.

[2] Madden J D W, Vandesteeg N A, Anquetil P A, Madden P G A, Takshi A, Pytel R Z, Lafontaine S R, Wieringa P A, Hunter I W. Artificial muscle technology: Physical principles and naval prospects[J]. Ieee Journal of Oceanic Engineering, 2004, 29(3): 706-728.

[3] Labanca M, Azzola F, Vinci R, Rodella L F. Piezoelectric surgery: Twenty years of use[J]. British Journal of Oral & Maxillofacial Surgery, 2008, 46(4): 265-269.

[4] Deng Q, Liu L P, Sharma P. Flexoelectricity in soft materials and biological membranes[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2014, 62: 209-227.

[5] Deng Q. Size-dependent flexoelectric response of a truncated cone and the consequent ramifications for

the experimental measurement of flexoelectric properties[J]. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme，2017，84 (10)：101007.

[6] Mashkevich V S，Tolpygo K B. Electrical，optical and elastic properties of diamond type crystals . 1.[J]. Soviet Physics Jetp-Ussr，1957，5(3)：435-439.

[7] Kogan S M. Piezoelectric effect during inhomogeneous deformation and acoustic scattering of carriers in crystals[J]. Soviet Physics-Solid State，1964，5 (10)：2069-2070.

[8] Meyer R B. Piezoelectric effects in liquid crystals[J]. Physical Review Letters，1969，22(18)：918.

[9] Chu B J，Salem D R. Flexoelectricity in several thermoplastic and thermosetting polymers[J]. Applied Physics Letters，2012，101(10)：103905.

[10] Ma W H，Cross L E. Strain-gradient-induced electric polarization in lead zirconate titanate ceramics[J]. Applied Physics Letters，2003，82 (19)：3293-3295.

[11] Breneman K D，Brownell W E，Rabbitt R D. Hair cell bundles：flexoelectric motors of the inner ear[J]. Plos One，2009，4(4)：e5201.

[12] Vasquez-Sancho F，Abdollahi A，Damjanovic D，Catalan G. Flexoelectricity in bones[J]. Advanced Materials，2018，30(21)：1705316.

[13] Sharma N D，Maranganti R，Sharma P. On the possibility of piezoelectric nanocomposites without using piezoelectric materials[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids，2007，55 (11)：2328-2350.

[14] Shen S P，Hu S L. A theory of flexoelectricity with surface effect for elastic dielectrics[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids，2010，58 (5)：665-677.

[15] Gharbi M，Sun Z H，Sharma P，White K. The origins of electromechanical indentation size effect in ferroelectrics[J]. Applied Physics Letters，2009，95 (14)：142901.

[16] Gharbi M，Sun Z H，Sharma P，White K，El-Borgi S. Flexoelectric properties of ferroelectrics and the nanoindentation size-effect[J]. International Journal of Solids and Structures，2011，48 (2)：249-256.

[17] Majdoub M S，Sharma P，Cagin T. Enhanced size-dependent piezoelectricity and elasticity in nanostructures due to the flexoelectric effect[J]. Physical Review B，2008，77(12)：125424.

[18] Hong J W，Vanderbilt D. First-principles theory and calculation of flexoelectricity[J]. Physical Review B，2013，88(17)：174107.

[19] Deng F，Deng Q，Yu W S，Shen S P. Mixed finite elements for flexoelectric solids[J]. Journal of Applied Mechanics Transactions of the Asme，2017，84 (8)：081004.

[20] Zhang S W，Liang X，Xu M L，Feng B，Shen S P. Shear flexoelectric response along 3121 direction in polyvinylidene fluoride[J]. Applied Physics Letters，2015，107(14)：142902.

[21] Yudin P V，Tagantsev A K. Fundamentals of flexoelectricity in solids[J]. Nanotechnology，2013，24 (43)：432001.

[22] Nguyen T D，Mao S，Yeh Y W，Purohit P K，McAlpine M C. Nanoscale flexoelectricity[J]. Advanced Materials，2013，25(7)：946-974.

[23] Krichen S，Sharma P. Flexoelectricity：A perspective on an unusual electromechanical coupling[J]. Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme，2016，83(3)：030801.

[24] Yan Z，Jiang L Y. Effect of flexoelectricity on the electroelastic fields of a hollow piezoelectric nanocylinder[J]. Smart Materials and Structures，2015，24 (6)：065003.

[25] Deng Q，Kammoun M，Erturk A，Sharma P. Nanoscale flexoelectric energy harvesting[J]. International Journal of Solids and Structures，2014，51 (18)：3218-3225.

[26] Yan Z，Jiang L Y. Flexoelectric effect on the electroelastic responses of bending piezoelectric nanobeams [J]. Journal of Applied Physics，2013，113 (19)：194102.

[27] Zhang Z R，Yan Z，Jiang L Y. Flexoelectric effect on the electroelastic responses and vibrational behaviors of a piezoelectric nanoplate[J]. Journal of Applied Physics，2014，116(1)：014307.

[28] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，1964，16(1)：51-78.

[29] Mindlin R D，Eshel N N. On first strain-gradient theories in linear elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures，1968，4(1)：109-124.

[30] Zhou S J，Li A Q，Wang B L. A reformulation of constitutive relations in the strain gradient elasticity theory for isotropic materials[J]. International Journal of Solids and Structures，2016，80：28-37.

[31] Lam D C C，Yang F，Chong A C M，Wang J，Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Sol-

ids, 2003, 51(8):1477-1508.

[32] Mindlin R D, Tiersten H F. Effects of couple-stresses in linear elasticity[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1963, 11(5):415-448.

[33] Toupin R A. Elastic materials with couple-stresses [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1963, 11(5):385-414.

[34] Yang F, Chong A C M, Lam D C C, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39(10):2731-2743.

[35] Aifantis E C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture[J]. International Journal of Engineering Science, 1992, 30(10): 1279-1299.

[36] Aifantis E C. Strain gradient interpretation of size effects[J]. International Journal of Fracture, 1999, 95(1-4):299-314.

[37] Eringen A C. On differential-equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface-waves[J]. Journal of Applied Physics, 1983, 54 (9):4703-4710.

[38] Papargyri-Beskou S, Tsepoura K G, Polyzos D, Beskos D E. Bending and stability analysis of gradient elastic beams[J]. International Journal of Solids and Structures, 2003, 40(2):385-400.

[39] Ji X, Li A Q, Zhou S J. A comparison of strain gradient theories with applications to the functionally graded circular micro-plate[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 49:124-143.

[40] Yan Z. Size-dependent bending and vibration behaviors of piezoelectric circular nanoplates[J]. Smart Materials and Structures, 2016, 25 (3):035017.

[41] Yan Z. Modeling of a nanoscale flexoelectric energy harvester with surface effects[J]. Physica E-Low-Dimensional Systems & Nanostructures, 2017, 88:125-132.

[42] Fleck N A, Hutchinson J W. A reformulation of strain gradient plasticity[J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2001, 49 (10):2245-2271.

[43] **胡淑玲,申胜平.具有挠曲电效应的纳米电介质变分原理及控制方程**[J].**中国科学**(G **辑:物理学 力学 天文学**),2009,39(12):1762-1769.(Hu S L, Shen S P. Variational principles and governing equations in nano-dielectrics with the flexoelectric effect[J]. Science in China Series G-Physics,Mechanics & Astronomy,2009,39 (12):1762-1769.(in Chinese))

[44] **王炳雷,周慎杰,赵俊峰,陈曦.静电激励** MEMS **微结构吸合压电尺寸效应研究**[J].**固体力学学报**, 2011, 32(6).541-548.(Wang B L, Zhou S J, Zhao J F,Chen X. Size-dependent pull-in voltage of electrically actuated MEMS[J]. Chinese Journal of Solid Mechanics,2011,32(6):541-548.(in Chinese))

The Flexoelectric Response of Nanobeam Based on the General Strain Gradient Elasticity Theory

Xu Yang　Yarong Zhou　Lingling Chen　Binglei Wang

(*School of Civil Engineering*, *Shandong University*, *Jinan*, 250061)

Abstract Flexoelectricity, the special electromechanical coupling between strain gradient and polarization, exists in all dielectric materials. It has received wide attention in multiple fields including energy harvesting, sensing and actuation. However, the effect of elastic strain gradient on flexoelectric response has typically been ignored or underestimated in the studies of flexoelectricity of nano-dielectric structures, which is solved in this paper. According to the general strain gradient elasticity theory, it is strictly proved that only three length-scale parameters are independent, and the applications of strain gradient theory with one or two scale parameters in the literature are only in its simplified forms. Based on this theory, a theoretical model of three-dimensional dielectric structure considering the generalized strain gradient elasticity is established. Then, using this model, the governing equations and boundary conditions of a bending nanobeam are obtained by Hamilton's variational principle. The one-dimensional cantilever nano-beam is taken as an example to study the flexoelectric response of its bending and energy harvesting characteristics. The results show that the flexoelectric response of structure exhibits size effect, and the elastic strain gradient influences this effect to some extent, especially when the structural scale is smaller than the length-scale parameters. On the other hand, the results show that extreme values of displacement and energy efficiency exist with the increase in structural scale, when the elastic strain gradient theory is considered. Furthermore, it is found that flexoelectricity coupling with external voltage will lead to the beam's inhomogeneous boundary conditions. In short, the elastic strain gradient significantly impacts the displacement, polarization, electric potential, and energy efficiency of a dielectric nanobeam with incorporation of flexoelectricity. This work provides a theoretical basis for further understanding of the mechanism of flexoelectricity at nanoscale and the effect of elastic strain gradient theory on flexoelectricity. It can be helpful for the design of nanoscale flexoelectric energy harvesters.

Key words flexoelectricity, strain gradient, size effect, energy efficiency