

静电激励 MEMS 微结构吸合电压尺寸效应研究^{*}

王炳雷^{1,3} 周慎杰^{2**} 赵俊峰^{1,2} 陈 曦^{3,4}

(¹山东大学土建与水利学院, 济南, 250061)(²山东大学机械学院, 济南, 250061)

(³哥伦比亚大学环境工程系, 纽约, 10027, 美国)(⁴西安交通大学航空航天学院, 西安, 710049)

摘 要 基于应变梯度弹性理论, 研究了静电激励 MEMS 微结构吸合电压的尺寸效应. 利用最小势能原理分别推导出含尺寸效应的一维梁模型和二维板模型的高阶控制方程. 采用广义微分求积法和拟弧长算法对控制方程进行了数值求解. 结果表明, 随着结构尺寸的降低, 新模型所预测的归一化的吸合电压呈非线性增长, 表现出尺寸效应(特别是当结构尺寸与内禀常数在同一数量级时尺寸效应更加强烈); 而相应的经典理论模型并不能预测此尺寸效应. 两种新模型可视为相应经典理论的推广. 论文有助于研究 MEMS 微结构的特性并对微结构的设计有潜在的应用价值.

关键词 尺寸效应, 应变梯度理论, 微机械系统, 吸合电压

0 引言

随着科技的发展, 微机电系统(Microelectromechanical systems: MEMS)以其体积小、能耗低、集成度和智能化程度高等特点得到广泛应用. 其中静电驱动由于其简单易行等优点, 目前是 MEMS 中应用最广、最典型的动力驱动方式之一^[1].

一个典型的静电驱动 MEMS 微结构如图 1 所示. 其中, 下面是固定基板, 上面是两端固支的可变形电极, 两者之间是真空或空气等介质. 当上下电极

之间施加驱动电压后, 可变形的电极由于静电力的作用会发生弯曲变形. 但是施加的电压超过某一个临界值时, 电极之间的静电载荷将大于上电极变形引起的恢复力, 将导致其变形突然增加而与固定电极发生接触, 这称为吸合现象, 此时所对应的电压和位移分别是吸合电压和吸合位移. 这种吸合特性在静电激励微结构设计中非常重要, 比如在设计微电容器时要避开吸合现象以得到稳定的特性, 而在微开关的设计中利用此特性来控制结构的开关. 目前, 已经有大量的工作研究其吸合特性. 根据应用情况的不同, 此结构可以简化为梁模型或板模型来研究.

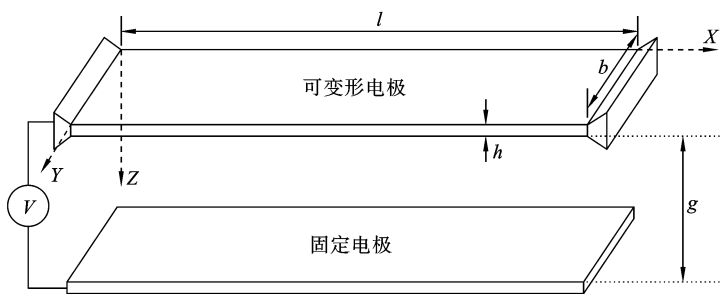


图 1 静电激励 MEMS 微结构示意图

Fig. 1 Schematic graph of electrostatically actuated MEMS

^{*} 山东省自然科学基金(Y2007F20), 山东大学自主创新基金(31410071614089), 美国国家科学基金(CMMI-0643726)和教育部长江学者项目资助.

2010-08-19 收到第 1 稿, 2011-06-01 收到修改稿.

^{**} 通讯作者. Tel: 0531-88396708, E-mail: zhousj@sdu.edu.cn.

应用经典梁理论^[2-5]或板理论^[6-8],很多学者研究了静电激励微结构的吸合特性. 由于静电和力的耦合,控制方程是非线性的偏微分方程(微板)或常微分方程(微梁),很难得到闭合的解析解. 降阶模型^[2]是应用最广的一种半解析的数值解法,它通过引入未变形时结构的各阶线性模态作为基本函数,根据平衡方程得到各阶的系数而得到求解结果. 大量文献采用此方法研究微结构的吸合特性^[4-6]. 另一方面,广义微分求积法也得到了应用. 例如, Kuang 等^[3]引入微分求积法来研究固支梁小变形下的固有频率,然后又研究了其他的边界条件下以及大变形的问题^[9]. 当然,之前的研究都是基于传统的弹性力学理论,并未包含尺寸效应.

大量的微结构实验^[10-13]表明,当微结构的尺寸从宏观降到微观后,就会出现尺寸效应现象(经典弹性力学理论无法对其解释). 例如, Chasiotis 和 Knauss^[11]研究多孔多晶硅 MEMS 时发现了失效应力的尺寸效应:当孔的半径从 16 微米降到 1 微米时,名义平均失效应力非线性增加,然而根据经典连续理论,此量应是常数. Aifantis^[13]用梯度弹性理论成功拟合了此实验现象. 我们相信,对本文所研究的同样处于微米量级的静电激励微结构而言,尺寸效应同样存在.

在过去的几十年里,很多含有尺寸效应的连续理论得到了系统发展^[12-14]. 这些理论中, Lam 等^[12]提出的应变梯度弹性理论在预测结构的尺寸效应方面非常成功. 此理论不仅考虑了旋转梯度张量的对称分量,还考虑了膨胀梯度张量和拉伸梯度张量的偏斜分量,相对于 Yang 等^[15]的偶应力理论只包含旋转梯度张量的对称分量来说考虑的更全面. 此理论已经成功被用来研究了欧拉-伯努利微梁^[16]以及铁木辛克微梁^[17]的静动态特性.

本文以静电激励 MEMS 微结构为工程背景,应用应变梯度弹性理论推导出其微梁模型(一维)和微板模型(二维),并分别研究了其吸合电压的尺寸效应特性,为 MEMS 微结构的设计提供理论支持.

1 应变梯度弹性理论

Lam 等^[12]基于 Mindlin 等^[18]的全应变梯度弹性理论提出了一种改进的全应变梯度弹性理论. 在其本构方程中,除了传统的 2 个材料常数之外,还有 3 个内秉特征材料尺寸常数(简称:内秉常数,下同)

来表征旋转梯度张量的对称分量,膨胀梯度张量和拉伸梯度张量的偏斜分量.

对于包含区域 ϕ (体积为 Ω)各向同性的线弹性变形体,其应变能 U 表示为:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\phi} (\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + p_i \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^s \chi_{ij}^s) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\phi} \bar{u} d\Omega \quad (1)$$

其中应变张量 ϵ_{ij} , 膨胀梯度张量 γ_i , 拉伸梯度张量的偏斜分量 $\eta_{ijk}^{(1)}$, 旋转梯度张量的对称分量 χ_{ij}^s 分别定义为:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad (2)$$

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \eta_{ijk}^s - \frac{1}{5} (\delta_{ij} \eta_{mnk}^s + \delta_{jk} \eta_{nmi}^s + \delta_{ki} \eta_{nmj}^s) \quad (3)$$

$$\gamma_i = \partial_i \epsilon_{mm} \quad (4)$$

及

$$\chi_{ij}^s = \frac{1}{4} (e_{ipq} \partial_p \epsilon_{qi} + e_{jpq} \partial_p \epsilon_{qi}) \quad (5)$$

这里 ∂_i 是微分算子, u_i 是位移向量, ϵ_{mm} 是膨胀应变张量, η_{ijk}^s 表示位移的二阶梯度张量的对称部分, 定义为:

$$\eta_{ijk}^s = \frac{1}{3} (u_{i,jk} + u_{j,ki} + u_{k,ij}) \quad (6)$$

其中 δ_{ij} 和 e_{ijk} 是 Kronecker delta 和 permutation 张量. 本文中如不特殊说明,采用张量记法:重复下标表示从 1 到 3 求和.

相应的,与上述应变及应变梯度功共轭的应力 σ_{ij} 及高阶应力张量($p_i, \tau_{ijk}^{(1)}$ 和 m_{ij}^s)分别为:

$$\sigma_{ij} = k \delta_{ij} \epsilon_{mm} + 2\mu \epsilon'_{ij} \quad (7)$$

$$p_i = 2\mu l_0^2 \gamma_i \quad (8)$$

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2\mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (9)$$

$$m_{ij}^s = 2\mu l_2^2 \chi_{ij}^s \quad (10)$$

其中 ϵ'_{ij} 是应变的偏斜部分, 定义为:

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_{mm} \delta_{ij} \quad (11)$$

k 和 μ 分别是体积模量和剪切模量. l_0, l_1 和 l_2 是三个相互独立的、分别对应于膨胀梯度张量、拉伸梯度张量偏斜分量和旋转梯度张量对称分量的内秉常数.

2 微梁尺寸效应模型

图 1 是典型的静电激励微结构的示意图. 下极板固定,而上极板(长 l 、宽 b 和厚度 h)两端固支,上

下极板初始间隔 g . 当上下极板施加电压 V 时, 在静电力 F_e 作用下上极板产生弯曲变形, 当电压达到某一临界值时由于静电力大于极板的弹性恢复力会突然吸合到下极板上. 如果此结构长度远大于其宽度和厚度, 可以简化成一维梁模型来研究.

2.1 控制方程

在静电力作用下基于经典弹性梁理论的控制方程在文献[12]已经给出. 因此, 基于应变梯度弹性理论和最小势能原理(推导见文献[16]), 就可以得到含尺寸效应的静电激励微梁的控制方程. 在电压 V 作用下, 考虑中面伸长效应的含尺寸效应的平衡方程为:

$$-K \frac{\partial^6 \hat{w}}{\partial \hat{x}^6} + S \frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4} + \rho b h \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2} = \left[\frac{EA}{2l} \int_0^l \left(\frac{\partial \hat{w}}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} + \hat{N} \right] \cdot \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\bar{\epsilon} b V^2}{2(d - \hat{w})^2} \quad (12)$$

其中

$$\begin{cases} K = \frac{\mu b h^3}{12} \left(2l_0^2 + \frac{4}{5} l_1^2 \right) \\ S = \frac{b h^3}{12} \left(k + \frac{4}{3} \mu \right) + \mu b h \left(2l_0^2 + \frac{8}{15} l_1^2 + l_2^2 \right) \end{cases} \quad (13)$$

$\hat{w}(x, t)$ 是横向位移, $\hat{t}$ 时间, ρ 材料密度, $\bar{\epsilon}$ 梁极板之间介质的介电常数. $\hat{N}$ 是面内拉伸或压缩力. 由于梁是两端固支, 其边界条件*为:

$$\begin{cases} \hat{w}(0, \hat{t}) = 0, & \hat{w}(l, \hat{t}) = 0 \\ \frac{\partial \hat{w}(0, \hat{t})}{\partial \hat{x}} = 0, & \frac{\partial \hat{w}(l, \hat{t})}{\partial \hat{x}} = 0 \\ \frac{\partial^4 \hat{w}(0, \hat{t})}{\partial \hat{x}^4} = 0, & \frac{\partial^4 \hat{w}(l, \hat{t})}{\partial \hat{x}^4} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

为了简化计算, 引入如下无量纲的量:

$$w = \frac{\hat{w}}{g}, \quad x = \frac{\hat{x}}{l}, \quad t = \frac{\hat{t}}{T} \quad (15)$$

其中 T 是时间因子, 定义见式(17). 式(15)代入式(12)和式(14), 得到无量纲的控制方程为:

$$\alpha_0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left[\alpha_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + N \right] \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\alpha_2 V^2}{(1 - w)^2} \quad (16)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{K}{S l^2}, & \alpha_1 = -\frac{E A g^2}{2 S}, & \alpha_2 = -\frac{\bar{\epsilon} b l^4}{2 S g^3} \\ N = \frac{l^2}{S} \hat{N}, & T^2 = \frac{\rho b h l^4}{S} \end{cases} \quad (17)$$

以及无量纲的边界条件:

$$\begin{cases} w(0, t) = 0, & w(1, t) = 0 \\ \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0, & \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^4 w(0, t)}{\partial x^4} = 0, & \frac{\partial^4 w(1, t)}{\partial x^4} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

需要指出的是, 如果内禀常数全为零(即: $l_0 = l_1 = l_2 = 0$), 方程(16)中的六阶项就会消失, 就退化为基于经典理论的控制方程(文献[2]中式(4)). 此时, 方程(18)中的高阶边界条件也就不需要了. 因此, 本模型可以退化为经典理论模型. 方程(18)中的高阶边界条件(四阶导数)其物理意义可以理解为与高阶弯矩项有关, 这在文献[16]中已经提到.

对于静态问题, 与时间相关的项都为零, 且不考虑中面伸长和面内应力, 即:

$$\alpha_0 \frac{d^6 w}{dx^6} + \frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{\alpha_2 V^2}{(1 - w)^2} \quad (19)$$

应用广义微分求积法, 控制方程(19)可写为:

$$\alpha_0 o\{c_{ij}^{(6)} w_j\} + \{c_{ij}^{(4)} w_j\} = \alpha_2 V^2 o\left\{\frac{1}{(1 - w_j)^2}\right\} \quad (20)$$

其中“ o ”是 Hadamard 算子, 其定义见文献[20].

相应的边界条件式(18)可以写为:

$$\begin{cases} w_1 = 0, & w_N = 0 \\ \sum_{j=1}^N e_{1j}^{(1)} w_j = 0, & \sum_{j=1}^N e_{Nj}^{(1)} w_j = 0 \\ \sum_{j=1}^N e_{1j}^{(2)} w_j = 0, & \sum_{j=1}^N e_{Nj}^{(2)} w_j = 0 \end{cases} \quad (21)$$

把式(21)代入到式(20), 求解相应的方程组就可以得到含尺寸效应的静电激励微梁问题的解. 求解中应用拟弧长算法^[21]来迭代, 相应的静态变形就很容易得到. 对于动态固有频率, 可以在式(20)中代入某一电压后求解其特征值问题再开方来得到.

2.2 结果与讨论

如上所述, 假如此新梁模型中的内禀常数全为零, 该模型就退化为经典梁理论模型. 图2对比了该模型退化后的模型梁中点($x = l/2$)位移结果与文献[2](经典梁理论)的相应结果. 从图中很容易看出, 两者吻合非常好. 随着电压的增加微梁中点的位移随之增加(A-B段), 当电压增加到某一关键值之后, 为了位移继续增加而保持平衡只需要更小的电压就可以(B-C段), B点对应的电压就是吸合电压.

* 在应变梯度弹性理论中, 高阶边界条件不是唯一的, 公式(14)中最后两个边界条件是根据文献[19]而假设的.

在实际工程中, $B-C$ 段是分叉后的不稳定段, 只有理论意义, 因为当电压增加到吸合电压后, 微小的电压扰动就会使微梁失稳后吸合到下极板。

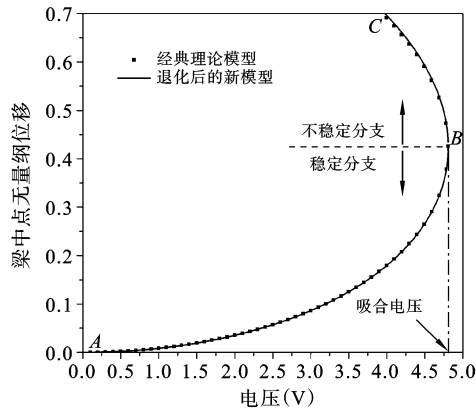


图2 梁中点无量纲位移随电压的变化

Fig. 2 Variation of nondimensional displacement of beam's central point with applied voltage

当应用该微梁模型时内禀常数的选取非常重要. Aifantis^[13]曾用他的梯度理论模拟了多晶硅实验结果后指出: 材料的内禀常数应该在 10^{-1} 微米量级, 这个尺寸与多晶材料的平均晶粒大小相当. 需要指出的是, 从理论上说这三个内禀常数是可以通过基本力学实验(不同试样尺寸的单轴拉伸或压缩, 弯曲试验以及纯扭转试验等)得到的^[12], 而且这三个参数一般来说是不同的. 由于没有有效的实验数据, 为了计算上的简便, 为了简化计算, 本文中所有的例子都假设三个内禀常数都相等($l_0 = l_1 = l_2 = Cl$), 即假定三个应变梯度张量对尺寸效应有相同的贡献量, 其具体数值是参照文献[13]在模拟文献[11]后计算的内禀参数而选取的。

为了研究内禀常数对模型的影响, 图3给出了不同内禀常数(Cl)时第一阶归一化的固有频率*随外加电压的影响. 计算中结构的尺寸: $l = 200 \mu\text{m}$ 、 $b = 20 \mu\text{m}$ 、 $h = 0.6 \mu\text{m}$ 和 $g = 1.0 \mu\text{m}$. 本文所有的计算中材料参数均为: 弹性模量为 151 GPa, 泊松比为 0.3. 图3中每条曲线(对应某一内禀常数 Cl)表明, 随着电压的增加归一化的固有频率刚开始缓慢降低, 而随着电压的进一步增加固有频率急剧降低最终几乎到零. 由弹性力学知识, 当结构处于失稳状态(动态分叉点)时其固有频率为零, 因此此时对应的电压就是吸合电压. 这也给我们提供了另一个判断吸合电压的方法. 从图3还可看出, 随着内禀常数的

增加, 结构的吸合电压也随着增加, 这是由于较大的内禀常数使控制方程(20)的左边项增加, 而需要更高的电压(右边项)才能平衡。

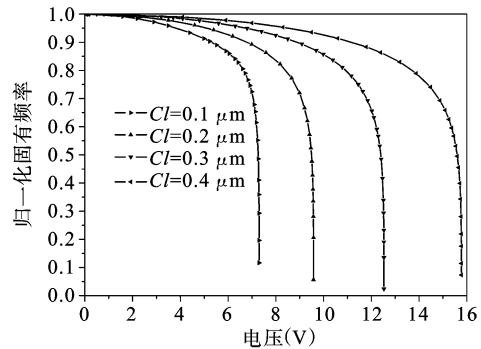


图3 归一化固有频率随电压的变化

Fig. 3 Variation of normalized natural frequency with applied voltage

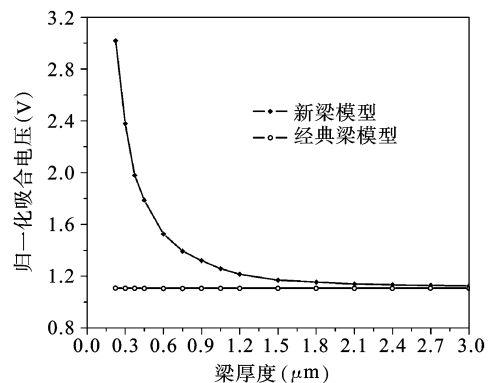


图4 归一化吸合电压随梁厚度的变化

Fig. 4 Variation of normalized pull-in voltage with beam height

下面来研究微梁吸合电压的尺寸效应, 我们假设内禀常数 $Cl = 0.15 \mu\text{m}$ 不变. 微梁的形状保持不变, 即 $l/h = 100$ 和 $b/h = 4$, 微梁与下极板的间距 $g/h = 1$ 也保持不变. 图4是归一化的吸合电压($V_{\text{吸合}} * Cl/h$)随梁厚度(h)的变化. 图中新梁模型(包含尺寸效应)的结果与经典梁模型(不含尺寸效应)的结果进行了对比. 从图中可以看出, 对新梁模型当结构的厚度降低时归一化的吸合电压非线性增加, 即随着结构尺寸的逐渐缩小归一化的吸合电压也随之增加, 特别是当结构尺寸与内

* 归一化的固有频率: 某一电压下的固有频率除以微梁未变形时的固有频率。

稟常数相当时这种变化更加剧烈,表现出强烈的尺寸效应;但是对于经典梁模型归一化的吸合电压并不随结构的厚度变化而变化,没有尺寸效应.我们还可以发现,当结构尺寸比内稟常数大得多时(约15倍以上),两种模型结果的差异很小,说明在宏观尺寸下本模型也是适用的;但是随着结构尺寸的逐渐变小,两种模型的差异逐渐增大,经典理论模型就不再适用,而本模型可以预测因尺寸效应引起的结果变化.因此,我们可以认为本模型是经典理论模型的扩展,因为它不仅可以适用宏观尺寸结构而且还适用微观尺寸结构.而且在3.1节中提到当内稟常数全部忽略后本模型就可以退化为经典理论模型,也证明了本模型的广义性.

3 微板尺寸效应模型

尽管如图1所示的静电激励 MEMS 结构在某些情况下可以简化成一维梁模型,但是对于短而宽的结构只能用简化成二维板模型.

3.1 控制方程

把柯西霍夫板理论的位移场带入到应变梯度弹性理论中,得到应变能的变分表达式为:

$$\delta U = \iiint_{\Omega} \delta \bar{u} dx dy dz = \iint_S \delta F dx dy \quad (22)$$

其中,

$$F = (c_1 h + c_2 I) \left[\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right)^2 \right] + (c_3 h + c_4 I) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) + (c_5 h + c_6 I) \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \right)^2 + c_7 I \left[\left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} \right)^2 \right] + c_8 I \left[\left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x \partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 \right] + c_9 I \left(\frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^3} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} \right) \quad (23)$$

$$\begin{cases} c_1 = 2\mu l_0^2 + \frac{8}{15}\mu l_1^2 + \mu l_2^2, & c_2 = \left(k + \frac{4}{3}\mu\right) \\ c_3 = 4\mu l_0^2 - \frac{4}{15}\mu l_1^2 - 2\mu l_2^2, & c_4 = \left(2k - \frac{4}{3}\mu\right) \\ c_5 = \frac{4}{3}\mu l_1^2 + 4\mu l_2^2, & c_6 = 4\mu \\ c_7 = 2\mu l_0^2 + \frac{4}{5}\mu l_1^2, & c_8 = 2\mu l_0^2 + \frac{24}{5}\mu l_1^2 \\ c_9 = 4\mu l_0^2 - \frac{12}{5}\mu l_1^2 \end{cases} \quad (24)$$

和

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12} \quad (25)$$

储存在上下极板的静电能 U_e 的微分:

$$\delta U_e = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b \delta \left[\frac{\epsilon V^2}{(g - \bar{w})} \right] d\bar{x} d\bar{y} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^b \frac{\epsilon V^2}{(g - \bar{w})^2} \delta \bar{w} d\bar{x} d\bar{y} \quad (26)$$

其 ϵ 中是极板间介质的介电常数.

把式(22)和式(26)代入如下的最小势能原理表达式:

$$\delta(U - U_e) = 0 \quad (27)$$

经过整理后根据 $\delta \bar{w}$ 的任意性,可以得到静电激励微板的控制方程:

$$-p_1 \nabla^6 \bar{w} + p_2 \nabla^4 \bar{w} = \frac{\epsilon V(t)^2}{2(g - \bar{w})^2} \quad (28)$$

其中

$$\begin{cases} p_1 = \frac{\mu h^3}{12} \left(2l_0^2 + \frac{4}{5}l_1^2 \right) \\ p_2 = \frac{h^3}{12} \left(k + \frac{4}{3}\mu \right) + \mu h \left(2l_0^2 + \frac{8}{15}l_1^2 + l_2^2 \right) \end{cases} \quad (29)$$

$$\begin{cases} \nabla^6 \bar{w} = \frac{\partial^6 \bar{w}}{\partial x^6} + 3 \frac{\partial^6 \bar{w}}{\partial x^4 \partial y^2} + 3 \frac{\partial^6 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 \bar{w}}{\partial y^6} \\ \nabla^4 \bar{w} = \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} \end{cases} \quad (30)$$

式(28)右边最后一项就是单位面积微板所受的静电力.当内稟材料常数为零时,即 $l_0 = l_1 = l_2 = 0$,式(28)就退化为经典板理论的控制方程.

相应的边界条件为:

$$\begin{cases} \bar{w} = 0, & \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0, & \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} = 0 & \text{当 } x = 0, l \\ \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} = 0, & \alpha^2 \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y} = 0, \\ \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4} = 0 & \text{当 } y = 0, b \end{cases} \quad (31)$$

其中 $\alpha = l/b$ 是长宽比.

为了方便计算,引入如下的无量纲量:

$$x = \frac{\bar{x}}{l}, \quad y = \frac{\bar{y}}{b}, \quad w = \frac{\bar{w}}{g} \quad (32)$$

把式(32)带入式(28)和式(31),整理后得到无量纲的控制方程:

$$\gamma \nabla^6 w + \nabla^4 w = \left[\frac{f}{1 - w} + \frac{1}{(1 - w)^2} \right] \beta V^2 \quad (33)$$

其中,

$$\begin{cases} \nabla^6 w = \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + 3\alpha^2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^4 \partial y^2} + 3\alpha^4 \frac{\partial^6 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \alpha^6 \frac{\partial^6 w}{\partial y^6} \\ \nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ \gamma = -\frac{P_1}{l^2 P_2}, \quad f = 0.65 \frac{g}{b}, \quad \beta = \frac{\epsilon l^4}{2g^3 P_2} \end{cases} \quad (34)$$

相应的无量纲的边界条件为:

$$\begin{cases} w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \quad \text{当 } x=0,1 \\ \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \quad \alpha^2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}=0 \\ \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=0 \quad \text{当 } y=0,1 \end{cases} \quad (35)$$

类似于 2.1 节的方法,利用二维的广义微分求积法和拟弧长算法,求解满足边界条件(35)的控制方程(33),就可以得到二维微板静电激励问题的位移解。

3.2 结果与讨论

根据文献[3],当利用二维的广义微分求积法时 X 和 Y 方向离散点取 $N=19, M=19$ 可以达到可以达到 10^{-8} 的精度. 同样为了验证此新板模型可行性,在模型中令内禀常数为零后(退化为经典板模型)考察其不同长宽比(l/b)时的第一阶固有频率与文献[22](经典板理论模型)的相应结果对比(见表 1),结果表明两者的相对差异在 0.04-0.73% 之间,说明本模型的可行性。

表 1 不同长宽比时退化后的新板模型的固有频率
(括弧内为文献[22]的相应结果)

Table 1 Natural frequencies from reduced microplate model for different aspect ratios. (The values in parentheses are those from Ref. [22])

长宽比	阶数				
	1	2	3	4	5
	22.357	23.151	25.834	30.857	38.821
0.4	(22.346)	(23.086)	(25.666)	(30.633)	(38.687)
	0.05%	0.28%	0.65%	0.73%	0.35%
	22.204	26.511	43.764	61.307	67.452
1.0	(22.272)	(26.529)	(43.667)	(61.466)	(67.549)
	-0.30%	-0.07%	0.22%	-0.26%	-0.14%
	22.013	41.709	60.718	92.348	119.378
2.5	(22.130)	(41.689)	(61.002)	(92.384)	(119.88)
	-0.53%	0.05%	-0.47%	-0.04%	-0.42%

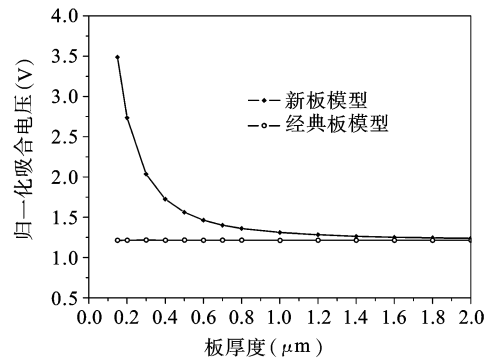


图 5 归一化吸合电压随板厚度的变化

Fig. 5 Variation of normalized pull-in voltage with plate height

下面来研究新板模型吸合电压的尺寸效应. 计算中我们假设内禀常数 $Cl=0.1 \mu\text{m}$ 不变;微梁的形状也保持不变,即 $l/h=200$ 和 $b/h=100$,微梁与下极板的间距 $g/h=1$ 也保持不变. 这样,当厚度(h)增大或降低时,整个结构保持相似的形状而相应放大或缩小. 图 5 是归一化的吸合电压($V_{\text{吸合}} \times Cl/h$)随梁厚度(h)的变化,并且,在图中新板模型(包含尺寸效应)的结果与经典板模型(不含尺寸效应)的结果进行了对比. 图 5 所示结果的变化规律与图 4 所示的几乎是一样的. 对于经典板模型,当板厚度变化时,归一化的吸合电压始终保持为常数,即不随结构尺寸的变化而变化,没有尺寸效应;但对新板模型随着结构厚度的降低归一化的吸合电压非线性增加,表现出强烈的尺寸效应. 同时,当结构尺寸很小时(15 倍于内禀常数或更小)这种尺寸效应比较明显,而随着结构尺寸的增大两种模型预测的结果差异越来越小,说明本模型在宏观尺寸下也是使用的,从而证明了本模型是经典板模型的推广。

相对于新梁模型,在新板模型中在两个平行的自由边上施加了自由边界条件,因此,在应用中当自由边界对吸合电压的影响比较小时两种模型都可以应用,否则只能用微板模型,具体讨论将在今后的工作中进行。

4 结论

基于最小势能原理和应变梯度弹性理论,分别推导了含尺寸效应的静电激励微结构的一维微梁和二维微板模型. 两种模型都能预测微结构的尺寸效

应. 考虑到控制方程的高阶特性, 采用微分求积法和拟弧长算法数值求解微分方程. 两种新模型的结果都表明, 当结构的尺寸降低时归一化的吸合电压非线性增加, 特别是当结构尺寸与内禀常数相当(大约不超过内禀常数的 15 倍)时这种尺寸效应更加明显; 而相应的经典理论模型并不能预测此尺寸效应现象. 当结构尺寸远比内禀常数大时, 新模型与经典模型预测结果几乎没有差别. 两种新模型都可视为相应经典理论模型的推广.

参考文献

- [1] Batra R C, Porfiri M, Spinello D. Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems[J]. *Smart Materials & Structures*, 2007, 16(6): 23-31.
- [2] Younis M I, Abdel-Rahman E M, Nayfeh A. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS[J]. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 2003, 12(5): 672-680.
- [3] Kuang J H, Chen C J. Dynamic characteristics of shaped micro-actuators solved using the differential quadrature method[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2004, 14(4): 647-655.
- [4] Nayfeh A H, Younis M I, Abdel-Rahman E M. Reduced-order models for MEMS applications[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 41(1-3): 211-236.
- [5] Nayfeh A H, Younis M I, Abdel-Rahman E M. Dynamic pull-in phenomenon in MEMS resonators[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 48(1-2): 153-163.
- [6] Zhao X P, Abdel-Rahman E M, Nayfeh A H. A reduced-order model for electrically actuated microplates[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2004, 14(7): 900-906.
- [7] Chao P C P, Chiu C W, Tsai C Y. A novel method to predict the pull-in voltage in a closed form for microplates actuated by a distributed electrostatic force[J]. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2006, 16(5): 986-998.
- [8] Batra R C, Porfiri M, Spinello M. Reduced-order models for microelectromechanical rectangular and circular plates incorporating the Casimir force[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45(11-12): 3558-3583.
- [9] Kuang J H, Chen C J. The nonlinear electrostatic behavior for shaped electrode actuators[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, 47(8): 1172-1190.
- [10] Fleck N A, Muller G M, Ashby M F, Hutchinson J W. Strain gradient plasticity- theory and experiment[J]. *Acta Metallurgica Et Materialia*, 1994, 42(2): 475-487.
- [11] Chasiotis I, Knauss W G. The mechanical strength of polysilicon films; Part 2. Size effects associated with elliptical and circular perforations[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, 51(8): 1551-1572.
- [12] Lam D C C, Yang F, Chong A C M, Wang J, Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, 51(8): 1477-1508.
- [13] Aifantis E C. Exploring the applicability of gradient elasticity to certain micro/nano reliability problems[J]. *Microsystem Technologies-Micro- and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems*, 2009, 15(1): 109-115.
- [14] Reddy J N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2007, 45(2-8): 288-307.
- [15] Yang F, Chong A C M, Lam D C C, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39(10): 2731-2743.
- [16] Kong S L, Zhou S J, Nie Z F, Wang K. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2009, 47(4): 487-498.
- [17] Wang B L, Zhao J F, Zhou S J. A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2010, 29(4): 591-599.
- [18] Mindlin R D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1965, 1: 417-438.
- [19] Papargyri-Beskou S, Beskos D E. Static, stability and dynamic analysis of gradient elastic flexural Kirchhoff plates[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2008, 78(8): 625-635.
- [20] Chen W, Shu C, He W, Zhong T. The application of special matrix product to differential quadrature solution of geometrically nonlinear bending of orthotropic rectangular plates[J]. *Computers & Structures*, 2000, 74(1): 65-76.

- [21] Klosiewicz P Broeckhove J, Vanroose W. Using pseudo-arclength continuation to trace the resonances of the Schrodinger equation[J]. Computer Physics Communications, 2009, 180(4): 545-548.
- [22] Leissa A W. The free vibration of rectangular-plates [J]. Journal of Sound and Vibration, 1973, 31(3): 257-293.

SIZE-DEPENDENT PULL-IN VOLTAGE OF ELECTROSTATICALLY ACTUATED MEMS

Binglei Wang^{1,3} Shenjie Zhou² Junfeng Zhao^{1,2} Xi Chen^{3,4}

(¹ School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan, 250061)

(² School of Mechanical Engineering, Shandong University, Jinan, 250061)

(³ Department of Earth and Environmental Engineering, Columbia University, New York, NY 10027, USA)

(⁴ School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049)

Abstract The size-dependent pull-in voltage of electrostatically actuated MEMS is studied using strain gradient elasticity. The microbeam model and microplate model are derived respectively via the principle of minimum potential energy. The generalized differential quadrature method and pseudo arclength algorithm are used to solve the high-order PDEs. It is shown that the normalized pull-in voltage predicted by the new models increases nonlinearly with the decrease of the structure thickness, exhibiting size effect (and the size effect is particularly strong when the structural thickness is on the same order of the characteristic material length scale parameter); while the corresponding classical models do not exhibit such a size effect. The two new models may be regarded as extensions of the corresponding classical ones. This study may be helpful to characterize the mechanical properties of small sized MEMS, or guide the design of microstructures for a wide range of potential applications.

Key words size-dependent, strain gradient elasticity, MEMS, pull-in voltage