

应变梯度对静电力驱动微梁吸合电压的影响^{*}

EFFECT OF STRAIN GRADIENT ON THE PULL-IN VOLTAGE OF MICRO-BEAM ACTUATED BY ELECTROSTATIC FORCE

赵俊峰^{**1,2} 周慎杰² 王炳雷¹ 王锡平¹

(1. 山东大学 土建与水利学院, 济南 250061)

(2. 山东大学 机械工程学院, 济南 250061)

ZHAO JunFeng^{1,2} ZHOU ShenJie² WANG BingLei¹ WANG XiPing¹

(1. School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

(2. School of Mechanical Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

摘要 基于应变梯度理论, 建立静电力驱动微梁的控制方程, 通过瑞利-利兹法对微梁的控制方程进行降阶, 得到一组非线性代数方程。利用牛顿-拉菲森法求解该方程组, 确定微梁的吸合电压, 分析应变梯度对吸合电压的影响规律。结果表明, 当微梁的无量纲厚度减小时, 无量纲吸合电压将显著增大, 表现出明显的尺寸效应; 随着材料内禀特征长度的增加, 无量纲吸合电压的尺寸效应也越显著, 说明应变梯度对微梁的吸合电压影响显著。随着微梁无量纲厚度的减小, 残余应力对无量纲吸合电压影响显著, 可以减弱应变梯度对无量纲吸合电压的影响; 同时应变梯度可以显著降低中面伸长对吸合电压的影响。分析结果可为微机电系统中微梁的设计提供参考。

关键词 应变梯度理论 吸合电压 瑞利-利兹法 牛顿-拉菲森法 微梁

中图分类号 O343 TB301

Abstract The governing equation of the micro-beam actuated by electrostatic force was derived based on the strain gradient theory with the aid of variational principle. The reduce model was obtained based on the Rayleigh-Ritz method. The pull-in voltage was solved by the Newton-Raphson method. Effects of the strain gradient on the pull-in voltage were investigated. The results show that the dimensionless pull-in voltage increases significantly with the dimensionless micro-beam thickness decreasing, showing a significant size effect. When the intrinsic material characteristic length increases, the size effect of the dimensionless pull-in voltage is more significantly, indicating that the effect of the strain gradient on the micro-beam pull-in voltage is remarkable. When the dimensionless micro-beam thickness decreases, the effect of the residual stress on the dimensionless pull-in voltage is significant. The size effect of the normalized pull-in voltage is weakened when the residual stress increases, indicating the residual stress can decrease the effect of the strain gradient on the pull-in voltage. The effect of the mid-plane stretch on the pull-in voltage is reduced markedly when the strain gradient is considered. The results can prove the reference in the design of micro structures in MEMS (micro-electrical-mechanical system).

Key words Strain gradient theory; Pull-in voltage; Rayleigh-Ritz method; Newton-Raphson method; Micro-beam

Corresponding author: ZHOU ShenJie, E-mail: zhousj@sdu.edu.cn, Tel: +86-531-88396708, Fax: +86-531-88392700

The project supported by the National Natural Science Foundation of China (No. 10572077), and the Nature Science Foundation of Shandong Province, China (No. Y2007TF20).

Manuscript received 20100919, in revised form 20101109.

引言

微机电系统具有体积小、重量轻、能耗低、集成度高等优点, 在机械、信息、生物医学等领域有广泛的应用。在微机电系统中, 静电驱动微梁是一种最常见的结构形式, 主要用于微型 RF 开关 (radio frequency switches)、微型加速度仪、微镜、微型压力传感器、微

镊、微型谐振器等。当直流电压作用在变形电极上时, 变形电极在静电力的作用下产生静态位移。当直流电压达到某个临界电压时, 变形电极与固定电极发生吸合现象, 这时的临界电压称为吸合电压。

吸合电压作为微机电系统中微梁设计最重要的设计参数, 引起许多学者对静电驱动微梁吸合电压的研究。Osterberg P M 等^[1-3] 通过建立微梁的单自由模型,

* 20100919 收到初稿, 20101109 收到修改稿。国家自然科学基金 (10572077)、山东省自然科学基金 (Y2007F20) 资助项目。

** 赵俊峰, 男, 1975 年 12 月生, 山西省永济市人, 汉族。讲师, 山东大学机械工程学院在职博士研究生, 主要研究方向为 MEMS 动力学建模与仿真。E-mail: zhaojunfeng@sdu.edu.cn

获得微梁在静电力驱动下吸合电压的近似值。Bochobza D O 等^[3]通过考虑微梁转动,建立二自由度模型,得到微梁在静电力驱动下吸合电压的近似值。Choi B 等^[4]采用冯-卡门平板模型模拟变形电极,采用平行平板电容模型计算静电力,并考虑中面伸长对吸合电压的影响。Lishchynska M 等^[5]基于欧拉-伯努利梁理论,建立微梁的控制方程,同时考虑残余应力对吸合电压的影响。Younis M I 等^[6,7]以及 Lin XieZhao 等^[8]基于欧拉-伯努利梁理论建立微梁的控制方程,同时考虑残余应力及中面伸长对吸合电压的影响。Zhao YaPu 等^[9]以及 Batra R C 等^[10]基于欧拉-伯努利梁理论,采用平行平板电容模型计算静电力,研究两端固定微梁在残余应力、中面伸长以及边缘静电场影响下,微梁吸合电压的变化规律。上述研究均采用传统弹性理论建立微梁的控制方程,没有考虑微米尺度下材料内部微结构对吸合电压的影响。

在微机电系统中,微梁的特征尺寸均在微米或亚微米量级。近年来大量的微观试验^[11-12]^[13] 1499-1506 表明,当构件特征尺寸在微米量级上时,会表现出明显的尺寸效应。传统弹性理论是建立在材料连续、均匀的假设之上,本构关系中不包含任何与微观结构有关的材料本征尺度参数,因此不能描述具有微结构材料的尺寸效应。应变梯度理论通过在其本构关系中引入与微观结构有关的本征尺度参数来描述微结构对材料性能的影响,是能够解释微观试验中发现的尺寸效应的有效理论。应变梯度理论最初是 Cosserat 兄弟在 1909 年提出,又称为 Cosserat 理论^[14]。Toupin R A^[15]以及 Mindlin R D 等^[16-17]在考虑材料微结构的基础上,建立线性全应变梯度理论,该理论中应变能密度函数不但取决于传统的应变张量,而且取决于位移的二阶梯度张量。Lam D C C 等^[18] 1480-1486 提出一种新的应变梯度弹性理论,在该理论中除了传统的力和力矩的平衡约束条件之外,还引入一个高阶应力平衡约束条件,同时该理论将二阶梯度张量分解成体积梯度矢量、拉伸梯度张量的偏斜张量以及旋转梯度张量的对称张量,在本构关系中除了两个传统的材料常数外,还包括三个新引入的相互独立的材料内禀特征尺寸常数。Kong ShengLi 等^[19] 489-496 基于应变梯度理论研究微梁静态变形、固有频率的尺寸效应。康新等^[20]基于偶应力理论研究微梁固有频率的尺寸效应。孔胜利等^[21]基于偶应力理论研究细长压杆屈曲载荷的尺寸效应。

本文主要研究应变梯度对静电力驱动两端固定微梁吸合电压的影响规律。基于应变梯度弹性理论,综合考虑中面伸长和残余应力的影响,建立静电驱动微梁吸合电压的控制方程,采用瑞利-利兹法对微梁进行降阶,最后采用牛顿拉菲森算法分析微梁在静电力作

用下应变梯度对吸合电压的影响。分析结果可为微机电系统中微梁的设计提供参考。

1 静电力驱动微梁的控制方程

假定梁的宽度和长度远远大于梁的厚度,即 $H \ll B, H \ll L$ 。忽略梁的体力 and 体力偶,且外力只有作用在梁的下表面沿法线方向的静电力。静电驱动两端固定微梁的结构简图如图 1 所示。

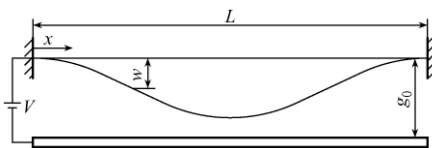


图 1 静电驱动两端固定微梁的结构简图

Fig. 1 Structure diagram of the clamped-clamped micro-beam actuated by electrostatic force

根据文献^[6]^[7]^[8]^[18] 489-492,考虑中面伸长与残余应力影响时,微梁的控制方程可表示为

$$S \frac{d^4 w}{dx^4} - S^h \frac{d^6 w}{dx^6} = \left[\frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \hat{N} \right] \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\varepsilon_0 b V^2}{2(g_0 - w)^2} \quad (1)$$

其中, $S = \frac{(1-\nu)EI}{(1-2\nu)(1+\nu)} + 2GA \left(l_0^2 + \frac{4}{15}l_1^2 + \frac{1}{2}l_2^2 \right)$; $S^h = 2GI(l_0^2 + 0.4l_1^2)$ 为梁的高阶刚度,上标 h 表示高阶; w 为微梁的挠度; x 为梁横截面沿轴向方向的坐标; L, B, H 分别为微梁的长度、宽度及高度; I 为微梁横截面的惯性矩,且有 $I = BH^3/12$; A 为微梁横截面的面积,且有 $A = BH$; E 为材料的弹性模量; ν 为材料的泊松比; G 为材料的剪切模量,且有 $G = E/[2(1+\nu)]$; l_0, l_1, l_2 为材料的内禀特征长度; ε_0 为真空中的介电常数; V 为驱动电压; g_0 为平行电极之间的间隙。方程(1)右边第一项表示中面伸长的影响,第二项表示残余应力的影响,且 $\hat{N}$ 为微梁横截面上的残余轴力。

对于两端固定微梁,四个传统的边界条件为

$$\begin{cases} w(0) = w(L) = 0 \\ w'(0) = w'(L) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $w(0), w(L)$ 为梁在固定端的挠度, $w'(0), w'(L)$ 为梁在固定端的转角。两个高阶边界条件也为已知,且有

$$w''(0) = w''(L) = 0 \quad (3)$$

其中, $w''(0), w''(L)$ 为梁在固定端的高阶梯度,具体推导过程和说明参照附录 A。

引入无量纲量

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \quad \hat{w} = \frac{w}{g_0} \quad (4)$$

其中, $\hat{x}$ 为微梁沿轴线方向的无量纲坐标,且 $\hat{x}$ 的取值

范围为 $[0, 1]$, $\hat{w}$ 为微梁的无量纲挠度。将方程(4)代入方程(1)中,得到无量纲控制方程为

$$\frac{d^4 \hat{w}}{d\hat{x}^4} - \beta^2 \frac{d^6 \hat{w}}{d\hat{x}^6} = \left[\alpha_1 \int_0^1 \left(\frac{d\hat{w}}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} + N \right] \frac{d^2 \hat{w}}{d\hat{x}^2} + \alpha_2 \frac{V^2}{(1 - \hat{w})^2} \quad (5)$$

无量纲参数为

$$\beta = \sqrt{\frac{S^h}{SL^2}}, \alpha_1 = \frac{g_0^2 EA}{2S}, N = \frac{\hat{N}L^2}{S}, \alpha_2 = \frac{\varepsilon_0 b L^4}{2Sg_0^3}$$

其中, β 为微梁高阶刚度与修改后的传统刚度比值的平方根, α_1 为中面伸长的无量纲系数, N 为无量纲轴力, α_2 为静电力影响的无量纲系数。根据方程(2)和方程(3),得到两端固定微梁的无量纲边界条件为

$$\begin{cases} \hat{w}(0) = \hat{w}(1) = 0, \hat{w}'(0) = \hat{w}'(1) = 0 \\ \hat{w}''(0) = \hat{w}''(1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中,第一和第二个方程表示传统的无量纲边界条件, $\hat{w}(0)$ 、 $\hat{w}(1)$ 为梁在固定端的无量纲挠度, $\hat{w}'(0)$ 、 $\hat{w}'(1)$ 为梁在固定端的无量纲转角。第三个表示高阶无量纲边界条件, $\hat{w}''(0)$ 、 $\hat{w}''(1)$ 为梁在固定端的无量纲高阶梯度。

2 微梁的吸合电压

由于静电力固有的非线性特性以及大变形所引起的几何非线性,对于微梁的无量纲方程(5)无法获得积分表达式的解析解,因此,一般采用近似解法进行求解,在这里首先采用瑞利-利兹法对方程进行降阶。根据瑞利-利兹法,静电驱动微梁定解问题的总势能可表示为

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{d^2 \hat{w}}{d\hat{x}^2} \right)^2 d\hat{x} + \frac{\beta^2}{2} \int_0^1 \left(\frac{d^3 \hat{w}}{d\hat{x}^3} \right)^2 d\hat{x} + \\ & \frac{1}{4} \left[\alpha_1 \int_0^1 \left(\frac{d\hat{w}}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} + 2N \right] \int_0^1 \left(\frac{d\hat{w}}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} - \\ & \alpha_2 \int_0^1 \frac{V^2}{1 - \hat{w}} d\hat{x} \end{aligned} \quad (7)$$

设微梁弯曲时挠度的近似表达式为

$$\hat{w}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^n a_i \psi_i(\hat{x}) \quad (8)$$

其中, $\hat{w}(\hat{x})$ 为微梁弯曲时挠度的近似值, $\psi_i(\hat{x})$ 为容许函数, a_i 为待定常数。将方程(8)代入方程(7)中,有

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^2 \psi_i}{d\hat{x}^2} \right)^2 d\hat{x} + \frac{\alpha_1}{4} \left(\int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{d\psi_i}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right)^2 + \\ & \frac{N}{2} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{d\psi_i}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} + \frac{\beta^2}{2} \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{d^3 \psi_i}{d\hat{x}^3} \right)^2 d\hat{x} - \\ & \alpha_2 \int_0^1 \frac{V^2}{1 - \sum_{i=1}^n a_i \psi_i} d\hat{x} \end{aligned} \quad (9)$$

表示为

$$\hat{w}(\hat{x}) = a_1 \psi_1(\hat{x}) \quad (10)$$

将方程(10)代入方程(9)中,用参数 a_1 表示的原定解问题的总势能为

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{a_1^2}{2} \int_0^1 \left(\frac{d^2 \psi_1}{d\hat{x}^2} \right)^2 d\hat{x} + \frac{\alpha_1 a_1^4}{4} \left[\int_0^1 \left(\frac{d\psi_1}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right]^2 + \\ & \frac{a_1^2 N}{2} \int_0^1 \left(\frac{d\psi_1}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} + \frac{a_1^2 \beta^2}{2} \int_0^1 \left(\frac{d^3 \psi_1}{d\hat{x}^3} \right)^2 d\hat{x} - \\ & \alpha_2 \int_0^1 \frac{V^2}{1 - a_1 \psi_1} d\hat{x} \end{aligned} \quad (11)$$

根据文献[7]⁸⁰⁵⁻⁸⁰⁶,当微梁达到稳定的平衡状态时,微梁总势能的一阶变分和二阶变分都等于零,故微梁发生吸合现象时的条件可表示为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_1^2} = 0 \quad (12)$$

根据方程(11),则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = & a_1 \int_0^1 \left(\frac{d^2 \psi_1}{d\hat{x}^2} \right)^2 d\hat{x} + \alpha_1 a_1^3 \left[\int_0^1 \left(\frac{d\psi_1}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right]^2 + \\ & a_1 N \int_0^1 \left(\frac{d\psi_1}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} + a_1 \beta^2 \int_0^1 \left(\frac{d^3 \psi_1}{d\hat{x}^3} \right)^2 d\hat{x} - \\ & \alpha_2 V^2 \int_0^1 \frac{\psi_1}{(1 - a_1 \psi_1)^2} d\hat{x} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a_1^2} = & \int_0^1 \left(\frac{d^2 \psi_1}{d\hat{x}^2} \right)^2 d\hat{x} + 3\alpha_1 a_1^2 \left[\int_0^1 \left(\frac{d\psi_1}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right]^2 + \\ & N \int_0^1 \left(\frac{d\psi_1}{d\hat{x}} \right)^2 d\hat{x} + \beta^2 \int_0^1 \left(\frac{d^3 \psi_1}{d\hat{x}^3} \right)^2 d\hat{x} - \\ & 2\alpha_2 V^2 \int_0^1 \frac{\psi_1^2}{(1 - a_1 \psi_1)^3} d\hat{x} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

由方程(13)和方程(14),消去静电电压 V^2 ,可得只含有待定常数 a_1 的非线性代数方程,通过牛顿迭代法求出待定常数 a_1 ,然后代入方程(13)或(14)中,确定出静电驱动微梁的吸合电压 V_{PI} (pull-in voltage)。

3 分析与讨论

根据瑞利-利兹法,若容许函数取一项时,一般容许函数 $\psi_1(\hat{x})$ 取微梁在均布载荷作用下的静态变形,由文献[8]⁴⁹¹⁻⁴⁹²有

$$\begin{aligned} \psi_1(\hat{x}) = & \frac{1}{24} \hat{x}^4 + C_0 + C_1 \hat{x} + C_2 \hat{x}^2 + \\ & C_3 \hat{x}^3 + C_4 e^{\hat{x}/\beta} + C_5 e^{-\hat{x}/\beta} \end{aligned} \quad (15)$$

其中, C_i 为积分常数,通过边界条件确定。根据两端固定微梁的边界条件,即方程(6),可得积分常数为

$$C_0 = -(C_4 + C_5), C_1 = -\frac{C_4 - C_5}{\beta}$$

$$C_2 = \frac{C_0}{2\beta^2}, C_3 = -\frac{1}{12}, C_4 = C_5 e^{-1/\beta}$$

$$C_5 = - \frac{\beta^2}{12(1 - 2\beta + e^{-1/\beta} + 2\beta e^{-1/\beta})}$$

将方程(15)代入方程(13)、方程(14)中,消去静电电压 V^2 ,然后利用牛顿迭代法,确定出系数 a_1 ,进而得到微梁的静态吸合电压 V_{PI} (pull-in voltage)。设微梁的宽度 $B = 50\ \mu\text{m}$,长度 $L = 600\ \mu\text{m}$,弹性模量 $E = 165\ \text{GPa}$,泊松比 $\nu = 0.32$,电极之间的间隙 $g_0 = 2\ \mu\text{m}$ 。 V_{PI}/V_{PI0} 为无量纲吸合电压, V_{PI} 为基于应变梯度理论微梁的吸合电压, V_{PI0} 为基于传统理论微梁的吸合电压, $\xi = H/l$ 为无量纲厚度, H 为梁的厚度, l 为材料的内禀特征长度。

不考虑微梁中面伸长和残余应力的影响,微梁无量纲厚度对无量纲吸合电压的影响如图 2 所示。

从图 2 可知,当微梁的无量纲厚度减小时,无量纲吸合电压将显著增大,表现出明显的尺寸效应,说明应变梯度对微梁的吸合电压影响显著。

不考虑中面伸长与残余应力的影响,微梁的无量纲吸合电压与材料内禀特征长度之间的关系如图 3 所示,图中给出两种厚度对应的变化曲线。从图中可看出,当材料的内禀特征长度趋近零时,即材料趋近于理想的均匀、连续体时,无量纲吸合电压趋近于 1。材料的厚度越小,其吸合电压对微尺度越敏感。因此,在微机电系统对微梁进行设计时,应变梯度影响是必须考虑的一个重要因素。

不考虑中面伸长的影响,无量纲吸合电压与残余

应力之间的关系如图 4 所示。图中给出两种无量纲厚度对应的变化曲线。

对于传统微梁,随着残余应力的增大,微梁的吸合电压显著增大^[21]。对于应变梯度微梁,残余应力对无量纲吸合电压影响显著,残余应力越大,微梁无量纲吸合电压越小,说明微梁内的残余应力可以减弱应变梯度对微梁吸合电压的影响。

考虑中面伸长时,吸合电压变化率定义为

$$\Delta_{V_{PI}} = \frac{V_{PI}^S - V_{PI}^{NS}}{V_{PI}^{NS}} \times 100\%$$

其中, V_{PI}^S 为考虑中面伸长时的吸合电压, V_{PI}^{NS} 为不考虑中面伸长时的吸合电压。微梁的厚度对吸合电压变化率的影响如图 5 所示。

由图可知,当微梁的厚度减小时,中面伸长对基于传统理论下的吸合电压影响显著,而对基于应变梯度理论下的吸合电压影响较弱,即应变梯度可以显著降低中面伸长对吸合电压的影响。

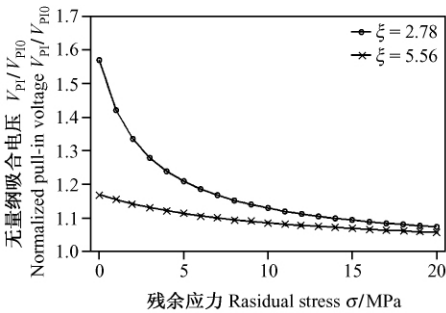


图 4 残余应力对无量纲吸合电压的影响

Fig. 4 Effect of residual stress on the normalized pull-in voltage

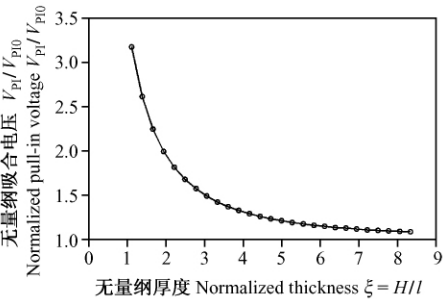


图 2 微梁无量纲厚度对无量纲吸合电压的影响

Fig. 2 Effect of normalized thickness on the normalized pull-in voltage

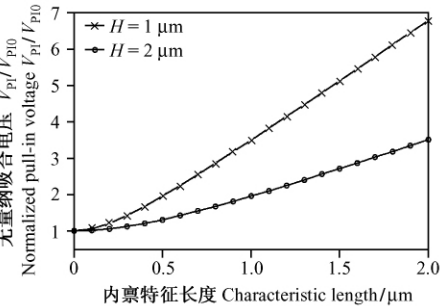


图 3 材料特征长度对无量纲吸合电压的影响

(Fig. 3) Effect of characteristic length on the normalized pull-in voltage

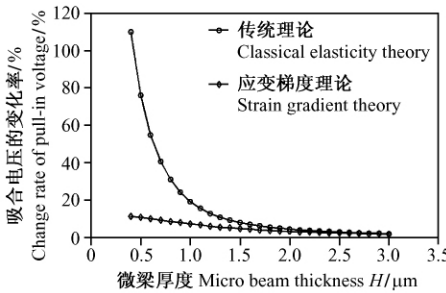


图 5 微梁厚度对吸合电压改变率的影响

Fig. 5 Effect of micro-beam thickness on the change rate of pull-in voltage

4 结论

本文主要研究应变梯度对静电驱动微梁静态吸合电压的影响。基于应变梯度弹性理论,建立静电驱动微梁静态吸合电压的控制方程,采用瑞利-利兹法对系统无量纲控制方程进行降阶,最后采用牛顿迭代法得到微梁的吸合电压,讨论在静电力作用下应变梯度对吸合电压的影响规律。分析结果表明,当微梁无量纲

厚度减小时,微梁的无量纲吸合电压将显著增大,表现出明显的尺寸效应。随着材料内禀特征长度的增加,无量纲吸合电压的尺寸效应也越显著。当无量纲厚度增大时,无量纲吸合电压接近于 1,吸合电压的尺寸效应现象消失。残余应力对无量纲吸合电压影响显著,随着残余应力的增大,无量纲吸合电压相应减小,说明残余应力可以减弱应变梯度对微梁吸合电压的影响。当微梁的厚度减小时,应变梯度可以显著降低中面伸长对吸合电压的影响。分析结果为微机电系统中微梁的设计提供一定的参考依据。

参考文献 (References)

[1] Osterberg P M. Electrostatically actuated microelectromechanical test structures for material property measurements [D]. Cambridge, MA: Massachusetts Institute of Technology, 1995: 26-125.

[2] Osterberg P M, Senturia S D. M-TEST: A test chip for MEMS material property measurement using electrostatically actuated test structures [J]. Journal Microelectromechanical System, 1997, 6 (10): 7-18.

[3] Bochobza D O, Nemirovsky Y. Modeling the pull-in parameters of electrostatic actuators with a novel lumped two degrees of freedom pull-in model [J]. Sensors and Actuators A: Physical, 2004(1): 569-578.

[4] Choi B, Lovell E G. Improved analysis of microbeam under mechanical and electrostatic loads [J]. Journal Micromechanics and Microengineering, 1997, 7(2): 4-9.

[5] Lishchynska M, Cordero N, Slattery O, et al. Modelling electrostatic behaviour of microcantilevers incorporating residual stress gradient and non-ideal anchors [J]. Journal Micromechanics and Microengineering, 2005, 15: S10-S14.

[6] Younis M I, Abdel-Rahman E M, Nayfeh A H. A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS [J]. Journal Microelectromechanical System, 2003, 12(5): 672-680.

[7] Lin XieZhao, Ying Ji. Analytical model of electrostatic fixed-fixed microbeam for pull-in voltage [C] //International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Xi'an China [s. n.], 2008: 803-807.

[8] Zhang LiXian, Zhao YaPu. Electromechanical model of RF MEMS switches [J]. Microsystem Technologies, 2003(9): 420-426.

[9] Lin WenHui, Zhao YaPu. Pull-in instability of micro-switch actuators: model review [J]. International of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation, 2008, 9(2): 175-183.

[10] Batra R C, Porfiri M, Spinello D. Vibrations of narrow microbeams predeformed by an electric field [J]. Journal of Sound and Vibration, 2008, 309: 600-612.

[11] Fleck N A, Muller G M, Ashby M F. Strain gradient plasticity: theory and experiment [J]. Acta Metallurgica et Materialia, 1994, 42(2): 475-487.

[12] Stolken J S, Evans A G. A micro-bend test method for measuring the plasticity length scale [J]. Acta Material, 1998, 46(14): 5109-5115.

[13] Lam D C C, Yang F, Chong A C M, et al. Experiments and theory in strain gradient elasticity [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, 51: 1477-1508.

[14] Cosserat E, Cosserat F. Theorie des corps deformables [M]. Paris: Hermann et Fils, 1909: 1-226.

[15] Toupin R A. Theories of elasticity with couple stress [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964, 17: 85-112.

[16] Mindlin R D. Micro-structure in linear elasticity [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964, 16: 51-78.

[17] Mindlin R D, Eshel N N. On first strain-gradient theories in linear elasticity [J]. International Journal of Solids and Structure, 1968, 4: 109-124.

[18] Kong ShengLi, Zhou ShenJie, Nie ZhiFeng, et al. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory [J]. International Journal of Engineering Science, 2009, 47: 487-498.

[19] 康 新, 席占稳. 基于 Cosserat 理论的微梁振动特性的尺度效应 [J]. 机械强度, 2007, 29(1), 001-004.

KANG Xin, XI ZhanWen. Size effect on the dynamic characteristic of a micro-beam based on Cosserat theory [J]. Journal of Mechanical Strength, 2007, 29(1): 001-004 (In Chinese).

[20] 孔胜利, 周慎杰, 聂志峰, 等. 基于偶应力理论的压杆屈曲载荷的尺寸效应 [J]. 机械强度, 2009, 31(1): 136-139.

KONG ShengLi, ZHOU ShenJie, NIE ZhiFeng, et al. Size effect on the buckling loads of slender columns based on a modified couple stress theory [J]. Journal of Mechanical Strength, 2009, 31(1): 136-139 (In Chinese).

[21] Zhang Yin, Zhao YaPu. Numerical and analytical study on the pull-in instability of micro-structure under electrostatic loading [J]. Sensors and Actuators A, 2006, 127(2): 366-380.

附录 A (Appendix)

根据文献 [8]⁴⁸⁸⁻⁴⁹², 基于应变梯度理论微梁的变形能为

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L [S (w'')^2 + S^h (w''')^2] dx \tag{16}$$

其中, U 为微梁总的变形能; $S = \frac{(1-\nu)EI}{(1-2\nu)(1+\nu)} + 2GA \left(l_0^2 + \frac{4}{15} l_1^2 + \frac{1}{2} l_2^2 \right)$; S^h 为微梁的高阶刚度, 上标 h 表示高阶, $S^h = 2GI (l_0^2 + 0.4 l_1^2)$ 。

外力所作的功

$$W = \int_0^L q(x) w(x) dx + [Qw]_0^L + [Mw]_0^L + [M^h w'']_0^L \tag{17}$$

其中, W 为外力所作的功, $q(x)$ 为微梁长度方向的分布载荷, w 为微梁的挠度, w' 为微梁的转角, w'' 为微梁的高阶梯度, Q 为梁横截面上的剪力, M 为梁横截面上的弯矩, M^h 为梁横截面上的高阶弯矩。

根据虚功原理,有

$$\delta(U - W) = 0 \tag{18}$$

将方程(16) 、方程(17) 代入方程(18) 中,则有

$$\delta(U - W) = \int_0^L [S w^{(4)} - S^h w^{(6)} - q] \delta w dx + [-Sw''' + S^h w^{(5)} - Q] \delta w|_0^L + [-Sw'' + S^h w^{(4)} - M] \delta w'|_0^L + [S^h w''' - M^h] \delta w''|_0^L = 0 \tag{19}$$

由变分的任意性,得到微梁弯曲变形的控制方程为

$$S \frac{d^4 w}{dx^4} - S^h \frac{d^6 w}{dx^6} = q \tag{20}$$

边界条件为

$$\left\{ \begin{aligned} &[Q(L) - (S^h w^{(5)}(L) - Sw'''(L))] \delta w(L) - \\ &[Q(0) - (S^h w^{(5)}(0) - Sw'''(0))] \delta w(0) = 0 \\ &[M(L) - (Sw''(L) - S^h w^{(4)}(L))] \delta w'(L) - \\ &[M(0) - (Sw''(0) - S^h w^{(4)}(0))] \delta w'(0) = 0 \\ &[M^h(L) - S^h w'''(L)] \delta w''(L) - \\ &[M^h(0) - S^h w'''(0)] \delta w''(0) = 0 \end{aligned} \right. \tag{21}$$

其中, $Q = S^h w^{(5)} - Sw'''$, $M = Sw'' - S^h w^{(4)}$, $M^h = S^h w'''$ 。 $w''' = d^3 w/dx^3$ 为挠度对坐标的三阶导数, $w^{(4)} = d^4 w/dx^4$ 为挠度对坐标的四阶导数, $w^{(5)} = d^5 w/dx^5$ 为挠度

对坐标的五阶导数。根据方程(21) 可知,应变梯度微梁弯曲时所满足的边界条件与传统理论微梁弯曲时所满足的边界条件有所差异。

对于应变梯度微梁,传统边界条件要求在边界上满足,①挠度 w 或者剪力 Q 为已知;②转角 w' 或者弯矩 M 为已知。高阶边界条件要求在边界上高阶梯度 w'' 或者高阶弯矩 M^h 为已知,这样可满足边界条件表达式(21) 。当材料的内禀特征长度为零时,即 $l_0 = l_1 = l_2 = 0$,方程(20) 退化为传统弹性理论下微梁的控制方程,边界条件(21) 中的前两式自动退化为传统弹性理论下微梁的边界条件,而第三式由于高阶弯矩 M^h 以及 S^h 为零,故第三式自动满足。

对于两端固定微梁,传统边界条件上挠度 w 和转角 w' 为已知,且有

$$w = 0 \qquad w' = 0 \tag{22}$$

而对于高阶边界条件,则有两种可能,即高阶梯度 w'' 为已知或者高阶弯矩为零,即有

$$w'' = \bar{w}'' \text{ 或者 } M^h = S^h \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 \tag{23}$$

若选择高阶梯度 w'' 为零,则在边界上弯矩 M 与高阶梯度 $w^{(4)}$ 相关,同理对于高阶弯矩 M^h 为零,则在边界上剪力 Q 与高阶梯度 $w^{(5)}$ 相关。