

考虑卡西米尔力的静电激励 NEMS 吸合特性及其尺寸效应研究^{*}

梁斌斌¹ 张 龙¹ 王炳雷^{1,2**} 周慎杰³

(¹山东大学土建与水利学院工程力学系, 济南, 250061)(²西安交通大学航空航天学院, 西安, 710049)

(³山东大学机械工程学院, 济南, 250061)

摘 要 基于应变梯度理论和哈密顿原理,并考虑卡西米尔力的影响,建立了静电激励纳米机电系统(NEMS)的尺寸效应模型,并得到模型的控制方程和边界条件.然后,引入广义微分求积法和拟弧长算法,得到模型的数值解.结果表明,当考虑卡西米尔力的影响时,系统两极的吸合电压有所减小.并且,当系统尺寸达到一个临界值时(即两电极间距小于“最小间距”,或可变形电极长度超过“拉起长度”),系统会在没有外加电压的作用下自动发生吸合,这将为 NEMS 的优化设计和定量分析提供理论基础.

关键词 卡西米尔力,纳机电系统,尺寸效应,最小间距,拉起长度

0 引言

随着科学技术的快速发展,静电激励纳米机电系统(NEMS)因其尺寸小,质量轻,能耗低等特点,在物理、化学和生物等多个领域中得到了广泛的应用,如谐振器、传感器、生化检测微探针和生物电机等.

一个典型的静电激励纳米机电系统包括一个固定电极和一个可变形电极.在两极上施加一个电压,在静电力的作用下,可变形电极就会发生弯曲变形,并向固定电极靠拢,同时系统电容也随之发生变化.随着电压增加,可变形电极挠度越大,当电压超过一个临界值时,可变形电极会失去稳定,突然与固定电极粘连.这种现象被称为吸合现象.此时,这个临界电压和它对应的位移分别被称为吸合电压和吸合位移.另外,大量实验证明:对于金属^[1],脆性材料^[2],高分子聚合物^[3]和多晶硅^[4]等材料,它们对应的微型结构都存在尺寸效应,即结构的力学或其它特性会随着结构尺寸的变化而变化,而经典连续介质理论无法解释这类现象.

于是,国内外大量学者基于连续介质理论提出

了各种理论研究微结构的尺寸效应现象,比如:非局部理论,表面能理论,偶应力理论和应变梯度弹性理论等^[5].其中非局部理论预测的结果表明微结构随着尺寸减小而出现结构变软的现象,这与实验结果相矛盾.对于表面能理论,虽然考虑表面效应,却忽视了结构内部因素的影响.基于 Cosserat 理论,学者们提出了偶应力理论,而后 Yang 等^[6]在此理论的基础上提出了修正偶应力理论.在 Mindlin^[7]工作的基础上,Lam 等^[3]提出了应变梯度弹性理论.随后应变梯度理论不仅被用来研究欧拉梁^[8,9]、铁木辛柯梁^[10]和 Reddy-Levinson 梁^[11]等,也用于研究微机电系统的尺寸效应现象^[12].

在纳米机电系统尺寸效应研究中,卡西米尔力的影响是不容忽视的.根据量子电动力学,真空能量以粒子的形态出现,真空中充满着几乎各种波长的粒子,若使两个金属箔紧靠在一起,当金属箔之间的距离小于真空中的粒子的波长时,长波排除,金属箔外的其他波就会产生一种使它们相互聚拢的力.两者距离越近,吸引力越大.即卡西米尔效应^[13].它是由荷兰物理学家亨德里克·卡西米尔在 1948 年提出的一种现象.卡西米尔力的大小与距离的 4 次方成反比.而分子间弱相互作用力是存在于分子间或

^{*} 国家自然科学基金(11202117,11272186),山东省自然科学基金(ZR2012AM014,BS2012ZZ006)和西安交通大学机械结构强度与振动国家重点实验室开放课题资助.

2015-05-18 收到第 1 稿,2016-02-29 收到修改稿.

^{**} 通讯作者. Tel:0531-88392812, E-mail:bwang@sdu.edu.cn.

原子间的作用力,如范德华力.范德华力分为引力和斥力,在微纳机电系统中,两极之间的范德华力表现为引力,其大小与间距的3次方成反比.虽然有不少学者研究了卡西米尔效应和范德华力对微纳米结构的影响,并针对这两种微观作用力之间的关系,提出了不少的看法,但始终没有一个准确的结论.于是这里单独就卡西米尔效应对纳米机电系统的影响进行了数值模拟.人们在纳米机电设备生产中发现,当两极之间的间距小于一个临界值或者可变形电极的长度超过一个临界值时,两极会在没有任何外载荷的情况下自动发生吸合^[14].这两个临界值分别称为“最小间距”和“拉起长度”.因此,卡西米尔力在纳米机电系统研究中扮演着重要角色.考虑卡西米尔力的影响,Batra等^[15]研究了微型薄膜的吸合现象;Lin等^[14]研究了纳米静电致动器的非线性行为.但是,他们的研究仅仅是基于传统的连续介质理论,并没有考虑微结构的尺寸效应现象.

因此,本文在应变梯度弹性理论的基础上,考虑卡西米尔力的影响,结合广义微分求积法^[15]和拟弧长算法^[17],研究了NEMS的吸合现象及其尺寸效应特性.

1 理论推导

1.1 尺寸效应的变分模型

基于应变梯度弹性理论^[3,12],结合哈密顿原理可以得到两端固支纳米梁的控制方程和所有的边界条件.根据哈密顿原理有,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} [T - (U_m + U_s - W - U_e - U_c)] dt = 0 \quad (1)$$

其中, U_m 和 U_s 分别是弯曲应变能和轴向力引起的变形能. T 是动能, W 是外载荷引起的势能, U_e 和 U_c 分别是静电势能和卡西米尔效应能.

对于一个纳米机电系统,在可变形梁上作用有一个横向荷载 $q(x)$,荷载沿着 x 轴纵向分布.如图1所示.基于欧拉梁的假设,考虑应变梯度,弯曲应变能 U_m 可以表示为^[9]:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^L D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L D_2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 dx \quad (2)$$

其中,

$$\begin{cases} D_1 = EI + 2\mu A l_0^2 + \frac{8}{15} \mu A l_1^2 + \mu A l_2^2 \\ D_2 = 2\mu I l_0^2 + \frac{4}{5} \mu I l_1^2 \end{cases} \quad (3)$$

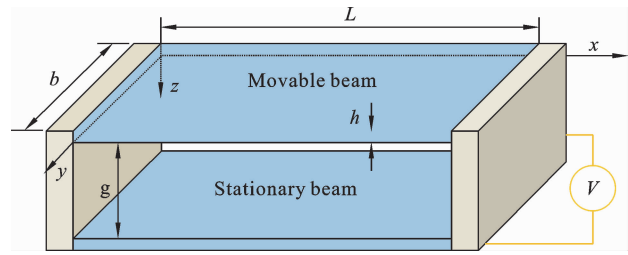


图1 两端固支 NEMS 示意图

Fig. 1 Schematic of a fixed-fixed NEMS

并且, x 是沿着梁长度方向上的位置坐标, w 是梁的挠度, A 和 I 是梁横截面上的面积和惯性矩, E 是弹性模量, μ 是剪切模量. l_0 、 l_1 和 l_2 是三个相互独立的、分别对应于膨胀梯度张量、拉伸梯度张量偏斜分量和旋转梯度张量对称分量的内禀常数.Lam^[3]的研究表明,三个材料内禀参数是与材料相关的,可以通过轴向拉伸压缩、弯曲或扭转实验获得.

动能表示如下:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (4)$$

其中 ρ 是材料密度, t 是时间.

由静电力作用,在两极产生的静电势能表示如下:

$$U_e = \frac{\epsilon b V^2}{2} \int_0^L \left[\frac{1}{(g-w)} + \frac{2}{\pi b} \ln \left(\frac{1}{g-w} \right) \right] dx \quad (5)$$

其中介电常数 $\epsilon = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$, V 是施加在两极上的电压.

根据量子电动力学,真空中相互靠近的平行导体极板之间的卡西米尔效应能:

$$U_c = \int_0^L \frac{\hbar c \pi^2 b}{720 (g-w)^3} dx \quad (6)$$

其中,普朗克(Plank)常数 $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$.

展开公式(1)得:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left\{ -D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[N_0 + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q(x) + F_e + F_c \right\} \delta w dx dt + \\ & \int_{t_1}^{t_2} \left[\bar{M}^h - D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\bar{M} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\bar{Q} + D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + \left[N_0 + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta w \right] \Big|_0^L dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\rho A \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right] \Big|_0^L dt = 0 \end{aligned}$$

其中, 梁受到外载荷轴向拉伸力作用时, N_0 取正, 反之, 受到压缩时, N_0 取负, 若是存在残余应力 s_0 , 则 N_0 要附加 $s_0 A$.

由公式(7), 并令外加载荷 $q(x)=0$, 可以得到控制方程如下:

$$-D_2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho b h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[\frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + N_0 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = F_e + F_c \quad (8)$$

和边界条件:

$$\left\{ \bar{Q} + D_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + \left[N_0 + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial w}{\partial x} \right\}_{x=0,L} = 0 \quad \text{or} \quad w|_{x=0,L} = 0 \quad (9)$$

$$\left[\bar{M} - D_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]_{x=0,L} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0,L} = 0 \quad (10)$$

$$\left[\bar{M}_h - D_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right]_{x=0,L} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0,L} = 0 \quad (11)$$

公式(9)、(10)是经典边界条件, 式(11)是高阶边界条件. 对于两端固支梁, 其经典边界条件可以表示为,

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \text{for} \quad x=0, L \quad (12)$$

一般情况下, 对于高阶应变梯度理论, 高阶弯矩 $\bar{M}_h$ 是不确定的, 故取高阶边界条件为:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \quad \text{for} \quad x=0, L \quad (13)$$

引入无量纲变量如下,

$$\hat{w} = \frac{w}{g}, \quad \hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{t} = \frac{t}{T} \quad (14)$$

把式(14)带入式(8), 去掉“ $\wedge$ ”, 得归一化控制方程表示如下:

$$\alpha_0 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left[\alpha_1 \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + N \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \alpha_2 V^2 \left[\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{f}{1-w} \right] + \frac{\alpha_3}{(1-w)^4} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{cases} \alpha_0 = -\frac{D_2}{D_1 L^2}, & \alpha_1 = \frac{EA g^2}{2D_1}, & \alpha_2 = \frac{\bar{\epsilon} b L^4}{2D_1 g^3} \\ \alpha_3 = \frac{\hbar c \pi^2 b L^4}{240 D_1 g^5}, & f = \frac{2g}{\pi b}, & N = \frac{L^2}{D_1} N_0, & T^2 = \frac{\rho A L^4}{D_1} \end{cases} \quad (16)$$

1.2 数值求解

基于广义微分求积法^[16], 边界条件(12)和(13)可以表示为:

$$\begin{cases} w_1 = 0, & w_n = 0 \\ \sum_{j=1}^N e_{1j}^{(1)} w_j = 0, & \sum_{j=1}^N e_{nj}^{(1)} w_j = 0 \\ \sum_{j=1}^N e_{1j}^{(2)} w_j = 0, & \sum_{j=1}^N e_{nj}^{(2)} w_j = 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中 $e^{(k)}$ 是未考虑边界条件的 k 阶权系数矩阵 (n 阶矩阵).

研究静态问题, 式(15)中时间相关项都为 0. 并采用广义微分求积法, 将归一化控制方程(15)降阶为一阶微分方程组, 并带入边界条件(17), 得 $n-6$ 维方程组如下所示. 式中 i 和 j 取 $1 \sim (n-6)$, $c^{(m)}$ 是引入边界条件后的第 m 阶权系数矩阵 ($n-6$ 阶矩阵).

$$\begin{aligned} a_0 \{ c_{ij}^{(6)} w_j \} + \{ c_{ij}^{(4)} w_j \} - \left[a_1 \sum_{k=1}^N C_k (e_{kj}^{(1)} w_j)^2 + N \right] \cdot \\ \{ c_{ij}^{(2)} w_j \} = a_2 V^2 \left\{ \frac{1}{(1-w_j)^2} + \frac{f}{1-w_j} \right\} + \frac{a_3}{\{1-w_j\}^4} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 a_3 为卡西米尔参数, 显然若强制令 $a_3=0$, 即不考虑卡西米尔力.

$$C_k = \int_0^1 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \frac{x-x_i}{x_k-x_i} dx \quad (19)$$

由于 NEMS 吸合是一个鞍结点分叉问题^[18], 采用局部延拓法不能得到方程组(18)完整的解曲线. 于是引入拟弧长延拓算法, 使迭代顺利地通过分叉点, 并得到方程完整的解曲线.

2 数值结果与分析

对于一个纳米机电系统而言, 吸合特性是系统的一个重要特征. 为了直观地反映吸合特性, 取系统尺寸参数为: $L=250 \mu\text{m}$, $b=40 \mu\text{m}$, $h=3 \mu\text{m}$, $g=1 \mu\text{m}$, 材料弹性模量 $E=169 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu=0.32$. Aifantis^[19] 研究结果指出多晶硅材料内禀常数在 $0.1 \mu\text{m}$ 的数量级, 于是取 $l_0=l_1=l_2=l_c=0.1 \mu\text{m}$. 需要注意的是在工程实际中, 这三个材料内禀参数通常是不相等的, 它们是通过不同尺寸试件基本力学实验获得, 如单轴拉伸、压缩, 弯曲试验以及纯扭转试验. 为计算方便, 取三者相等, 这不影响对系统吸合特性和尺寸效应的研究^[12]. 如图 2 所示, 横坐

标是系统两极之间的电压值,纵坐标是可变形梁的无量纲最大挠度.实线部分表示系统处于稳定区域,虚线表示系统处于不稳定区域.不稳定区域在实际中是不存在的,因为任意的一个外界干扰都会打破系统的平衡状态,以致两电极发生吸合.显然,随着电压从0不断增加, $\tau w_{\max}$ 也随之增大,当电压超过一个临界值时,系统就会立即发生吸合,这种现象称为吸合现象,也可称为突弹跳变现象.这里,不稳定与稳定区域的交界点记为吸合点 p ,其对应的电压 V 和 $w_{\max}$ 分别是系统的吸合电压 V_{pl} 和吸合位移 w_{pl} .

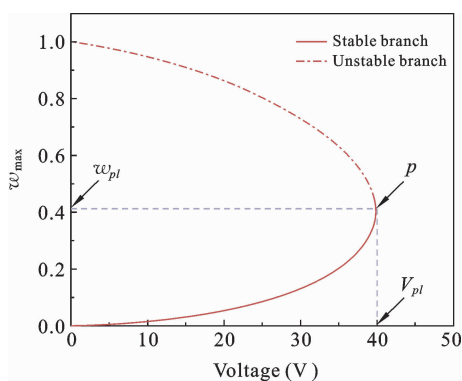


图2 电压与无量纲最大位移关系曲线

Fig. 2 Nondimensional displacement with applied voltage

需要说明的是:在微米及以上量级时卡西米尔力的影响非常小,以致可以忽略;但当系统尺度降到纳米量级时,卡西米尔力的影响变得明显.下面以一个纳米机电系统的为例,研究卡西米尔力对系统吸合特性的影响.设系统尺寸参数为: $L=2000\text{ nm}$ 、 $b=200\text{ nm}$ 、 $h=15\text{ nm}$ 、 $g=10\text{ nm}$,材料弹性模量 $E=151\text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$.取 $l_0=l_1=l_2=l_c=0.1\text{ }\mu\text{m}$.数值结果如图3所示.其中,红色线表示的数据是没有考虑卡西米尔力的影响,而紫色线考虑了卡西米尔力的影响.对比图中的曲线不难发现,由于卡西米尔力的存在,系统的吸合电压和吸合位移有所减小.其中 w_r 只在理论上存在,它表示不需要任何外加力作用,系统仅在卡西米尔力的作用下就可达到平衡.可见,由于卡西米尔力的影响,纳米机电系统的吸合电压有了明显的减小.

根据文献[20],当卡西米尔参数 a_3 达到一定数值时,即使没有外加电压作用,系统也会立即发生吸合,这时的 a_3 称为临界卡西米尔参数: a_{cr} .而 a_3 仅与系统两极间距 g 和可变形梁长度 L 这两个变量有关.于是当 a_3 达到临界 a_{cr} 时, g 和 L 达到相应

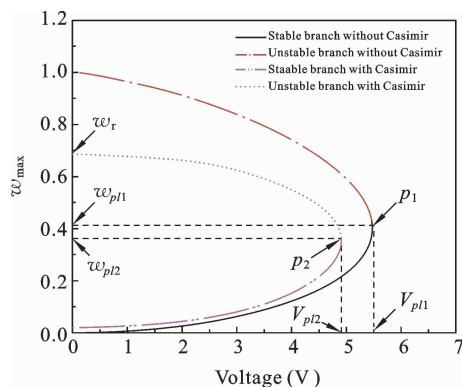


图3 卡西米尔力对 NEMS 不稳定吸合的影响

Fig. 3 Effect of Casimir on the pull-in instability of NEMS

临界值,即 g 相对于给定的 L 降到最小间距 $g_{\min}$,或 L 相对于给定的 g 达到拉起长度 $L_{\max}$.下面将研究系统的最小间距 $g_{\min}$ 和拉起长度 $L_{\max}$.

首先,给定系统参数: $L/k=1000\text{ nm}$ 、 $b/k=200\text{ nm}$ 、 $h/k=10\text{ nm}$ 、 $E=151\text{ GPa}$ 、 $\nu=0.3$ 、 $l_c=0.1\text{ }\mu\text{m}$,其中尺寸缩放因子 k 分别取1、1.5和2.以 g 为自变量,结果如图4(a)所示.显然,若给定系统除 g 以外的参数,随着 g 的不断减小,吸合电压非线性降低,并且当 g 小于临界值 $g_{\min}$ 时,吸合电压等于0,即系统在没有外加电压的情况下就会发生吸合.其次,给定系统参数: $b/k=200\text{ nm}$ 、 $h/k=10\text{ nm}$ 、 $g/k=10\text{ nm}$,其它参数同上.以 L 为自变量,结果如图4(b)所示.显然,随着可变形梁长度 L 的不断增大,吸合电压非线性减小,并且当 L 超过临界值 $L_{\max}$ 时,吸合电压等于0,即系统会自动发生吸合.可见,若要防止系统的自动吸合,NEMS的设计应当避开这样的临界尺寸.

为了研究纳米机电系统的尺寸效应,设系统的尺寸参数为: $L/k=2100\text{ nm}$ 、 $b/k=500\text{ nm}$ 、 $h/k=10\text{ nm}$ 、 $g/k=10\text{ nm}$,材料弹性模量 $E=151\text{ GPa}$,泊松比 $\nu=0.3$, $l_c=0.1\text{ }\mu\text{m}$. k 是尺寸缩放因子,随着 k 的变化,系统尺寸发生变化,结果如图5所示, V_{pl}/k 是对应于尺寸缩放因子 k 的归一化的吸合电压.紫色曲线表示当前模型得到的结果,红色表示经典理论所得的结果.其中,实线考虑了卡西米尔力,虚线则没有考虑.显然,经典理论预测的结果没有尺寸效应.对于当前模型,若不考虑卡西米尔力,随着尺寸缩放因子 k 的减小,归一化吸合电压 V_{pl}/k 非线性递增.然而考虑卡西米尔力的影响时,随着尺寸缩放

因子 k 的不断减小,卡西米尔力不断增大,当 k 减小到一个临界值 k_{cr} 时,归一化吸合电压达到最大值,记为 V_{pl}^{pl} . 随着尺寸的进一步减小,吸合电压快速减

小,卡西米尔力显著递增. 最终,在没有外加电压的情况下,系统由于卡西米尔力即会自动发生吸合. 可见,在 NEMS 中卡西米尔力的影响是不容忽视的.

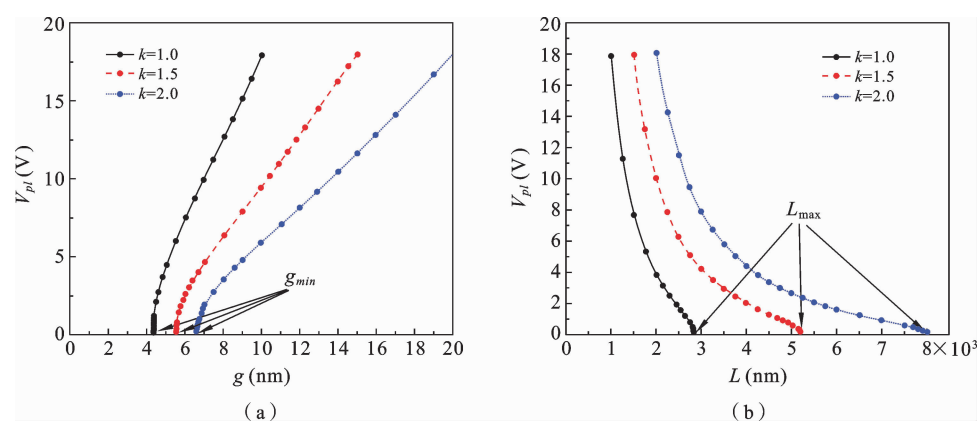


图 4 考虑卡西米尔力时,(a)间距和(b)梁长度对吸合电压的影响
Fig. 4 The effect of gap (a) and beam length (b) on pull-in voltage with Casimir force

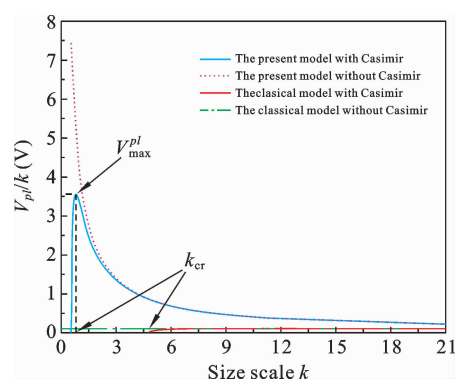


图 5 尺寸缩放因子 k 与归一化吸合电压 V_{pl}/k 的关系
Fig. 5 The effect of size scale (k) on the normalized pull-in voltage (V_{pl}/k)

3 结论

基于应变梯度理论和哈密顿原理,结合广义微分求积法和拟弧长延拓法,研究了卡西米尔力对 NEMS 的吸合特性和尺寸效应的影响. 结果显示,对于 NEMS,卡西米尔力的影响是不容忽视的. 在卡西米尔力的作用下,如果系统中可变形梁的长度超过拉起长度 L_{max} 或两极间距小于最小间距 g_{min} ,即使没有静电力的作用,系统也会自动发生吸合. 并且,对于 NEMS,随着系统尺寸等比例的缩小,卡西米尔力对系统尺寸效应有逐渐增大的抵消作用,甚

至能完全抵消尺寸效应带来的结构刚度的提升,至终使系统自动发生吸合.

参考文献

[1] Poole W J , Ashby M F , Fleck N A. Micro-hardness of annealed and work-hardened copper polycrystals [J]. Scripta Materialia, 1996, 34(4): 559-564.

[2] Vardoulakis I, Exadaktylos G, Kourkoulis S K. Bending of marble with intrinsic length scales: A gradient theory with surface energy and size effects[J]. Journal De Physique Iv, 1998, 8(p8): 399-406.

[3] Lam D C C, Yang F, Chong A C M, Wang J, Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, 51(8): 1477-1508.

[4] Aifantis E C. Exploring the applicability of gradient elasticity to certain micro/nano reliability problems [J]. Microsystem Technologies-Micro- and Nanosystems-Information Storage and Processing Systems, 2009, 15(1): 109-115.

[5] Wang, B L, Zhao J F, Zhou S J, Chen X. Analysis of wave propagation in micro/nanobeam-like structures: A size-dependent model[J]. Acta Mechanica Sinica, 2012, 28(6): 1659-1667.

[6] Yang F, Chong A C M, Lam DC C, Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity[J]. International Journal of Solids and Structures, 2002,

- 39(10):2731-2743.
- [7] Mindlin R D, Eshel N N. On first strain-gradient theories in linear elasticity[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1968, 4: 109-124.
- [8] Kong S L, Zhou S J, Nie Z F, Wang K. The size-dependent natural frequency of Bernoulli-Euler microbeams[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2008, 46 (5): 427-437.
- [9] Kong S L, Zhou S J, Nie Z F, Wang K. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory[J]. *International Journal of Engineering Science*, 2009, 47 (4): 487-498.
- [10] Wang B L, Zhao J F, Zhou S J. A micro scale Timoshenko beam model based on strain gradient elasticity theory[J]. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2010, 29 (4): 591-599.
- [11] Wang B L, Liu M C, Zhao J F, Zhou S J. A size-dependent Reddy-Levinson beam model based on a strain gradient elasticity theory[J]. *Meccanica*, 2014, 49 (6): 1427-1441.
- [12] 王炳雷, 周慎杰, 赵俊峰, 陈曦. 静电激励 NEMS 微结构吸合电压尺寸效应研究[J]. *固体力学学报*, 2011, 32(6): 541-548. (Wang B L, Zhou S J, Zhao J F, Chen X. Size-dependent pull-in voltage of electrostatically actuated MEMS[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, 32(6): 541-548. (in Chinese))
- [13] 田文超, 王林滨, 贾建援. Casimir 力、Hamaker 力及黏附“突跳”研究[J]. *物理学报*, 2010, 02: 1175-1179. (Tian W C, Wang L B, Jia J Y. Casimir force, Hamaker force, stiction and snap-back[J]. *Acta Physica Sinica*, 2010, 02: 1175-1179. (in Chinese))
- [14] Lin W H, Zhao Y P. Nonlinear behavior for nanoscale electrostatic actuators with Casimir force[J]. *Chaos Solitons & Fractals*, 2005, 23(5): 1777-1785.
- [15] Batra R C, Porfiri M, Spinello D. Vibrations and pull-in instabilities of microelectromechanical von Karman elliptic plates incorporating the Casimir force[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 315(4-5): 939-960.
- [16] Shu C, Richards B E. Parallel simulation of incompressible viscous flows by generalized differential quadrature[J]. *Computing Systems in Engineering*, 1992, 3(1-4): 271-281.
- [17] 梁斌斌, 张龙, 王炳雷, 周慎杰. 拟弧长延拓法在静电激励 MEMS 吸合特性研究中的应用[J]. *应用数学与力学*, 2015, 36 (4): 386-392. (Liang B B, Zhang L, Wang B L, Zhou S J. Application of pseudo-arclength algorithm in investigation for size-dependent pull-in instability of electrostatically actuated MEMS[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, 36 (4): 386-392. (in Chinese))
- [18] Zhang Y, Zhao Y P. Numerical and analytical study on the pull-in instability of micro-structure under electrostatic loading[J]. *Sensors and Actuators A-Physical*, 2006, 127(2): 366-380.
- [19] Aifantis, Elias C. Exploring the applicability of gradient elasticity to certain micro/nano reliability problems[J]. *Microsystem Technologies-Micro-and Nano-systems-Information Storage and Processing Systems*, 2009, 15(1): 109-115.
- [20] Duan J S, Rach R. A pull-in parameter analysis for the cantilever NEMS actuator model including surface energy, fringing field and Casimir effects[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2013, 50 (22-23): 3511-3518.

Study on the Size Dependence and Pull-in Instability of Electrostatically Actuated NEMS with Casimir Force

Binbin Liang¹ Long Zhang¹ Binglei Wang^{1,2} Shenjie Zhou³

(¹ School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan, 250061)

(² School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049)

(³ School of Mechanical Engineering, Shandong University, Jinan, 250061)

Abstract The size dependence and pull-in instability of electrostatically actuated Nano-Electro-Mechanical Systems (NEMS) are considered incorporating the influence of Casimir force. The governing equation and boundary conditions are derived based on the strain gradient elasticity theory and Hamilton principle. A discrete and reduced-order governing equation and boundary conditions for electrically actuated microbeam-based NEMS with Casimir force are presented with the help of generalized differential quadrature method (GDQ). Because the pull-in instability of NEMS is a saddle-node bifurcation, the local continuation methods are not applicable for solving the equation. The complete solution is instead obtained by implementing the pseudo-arclength algorithm, which enables the iteration process to smoothly go through the inflection points. The size dependence and pull-in instability of electrostatically actuated NEMS with Casimir force included is then studied. The results reveal that Casimir force can reduce the pull-in voltage of system. Although the effect of Casimir force is so small that it can be ignored in the pull-in behavior of NEMS actuators, this effect becomes obviously significant on the size dependence and pull-in instability of system when the size of structure decreases to the nanometer scale. With the Casimir force incorporated, once the scale of system reaches the critical value (i. e. the gap between two electrodes is smaller than the minimum gap, or the length of movable beam is larger than the detachment length), the pull-in instability will occur without any voltage applied. For the present model, when the Casimir force is ignored, the pull-in voltage increases with decreasing size scale; when Casimir force is considered, however, the pull-in voltage first increases and then decreases sharply to zero with decreasing size scale, which is quite different from that predicted by the classical beam model. Therefore, the effect of Casimir force should be taken into account in the process of production and application. This study may be helpful for the design and theoretical modeling of NEMS.

Key words Casimir force, NEMS, size dependence, minimum gap, detachment length