第5章 同伦与基本群

问题：$S^2 \cong \mathbb{T}^2$ (← 2维环面)？答：否．证明需引入新的拓扑不变量：基本群．

什么是基本群？设 X 是拓扑空间，$x_0 \in X$．

1° 令 $\pi_1(X, x_0)$ 为全体以 x_0 为基点的闭路构成的集合．且可互相连续形变的闭路视为同一条；

↳ 同伦

2° $\pi_1(X, x_0)$ 在道路乘法下构成一个群，称为 X 的以 x_0 为基点的基本群；

3° 若 X 道路连通，$\pi_1(X, x_0)$ "与 x_0 无关"（不同基点的基本群同构）；

4° 若 $f: X \cong Y$，$f(x_0) = y_0$．则 $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(Y, y_0)$．故基本群是拓扑不变量．

§5.1 同伦与同伦等价

• 同伦

设 X, Y 为拓扑空间．记 $C(X, Y) = \{f: X \to Y \text{ 连续}\}$．

定义（同伦（Homotopy））设 $f, g \in C(X, Y)$．设 $H: X \times I \to Y$ 是连续映射，满足

$H(x, 0) = f(x)$，$H(x, 1) = g(x)$，$\forall x \in X$．则 H 称为 f 到 g 的一个同伦，记作 $H: f \simeq g$．

此时 f 和 g 称为同伦的．

直观：f 可"连续形变"成 g．

例 (1) $\forall f, g \in C(X, \mathbb{R}^n)$，$f$ 和 g 同伦．一个同伦为（这样的同伦称为直线同伦）

$$H(x, t) = (1-t) f(x) + t g(x).$$

(2) 设 $f, g \in C(X, S^n)$．若 $\forall x$，$f(x) \neq -g(x)$，则

$$H(x, t) = \frac{(1-t) f(x) + t g(x)}{\|(1-t) f(x) + t g(x)\|}$$

是 f 到 g 的一个同伦．

(3) 设 $f, g \in C(X, S^1)$，且 $\forall x$，$f(x) = -g(x)$．则

$$H(x, t) = e^{\pi i t} f(x)$$

是 f 到 g 的一个同伦．

共轭

思考：(3) 条件换成 $\forall x$，$f(x) = \overline{g(x)}$ 结论还对吗？

答：学了基本群之后可证明 $f(x) = e^{2\pi i x}$ 与 $g(x) = e^{-2\pi i x}$ 作为 $\mathbb{I} \to S^1$ 的映射不同伦．因此结论未必成立．

定理 5.1.1 同伦是 $C(X,Y)$ 上的等价关系.

证明: 1) 自反性: $\forall f\in C(X,Y)$, $H(x,t)\equiv f(x)$ 是 f 到 f 的同伦.

2) 对称性: 设 $H: f\simeq g$, 则 $\bar{H}(x,t) = H(x,1-t)$ 是 g 到 f 的同伦.

3) 传递性: 设 $H_1: f\simeq g$, $H_2: g\simeq h$. 我们构造 $H: f\simeq g$ 如下

$$H(x,t) = \begin{cases} H_1(x,2t), & t\in[0,\frac{1}{2}], \\ H_2(x,2t-1), & t\in[\frac{1}{2},1]. \end{cases}$$

由粘贴引理, H 连续. □

称 $C(X,Y)$ 在同伦这一等价关系下的等价类为映射类. 全体映射类构成的集合记为 $[X,Y]$.

定理 5.1.2 设 $f_1,f_2\in C(X,Y)$, $g_1,g_2\in C(Y,Z)$, 且 $f_1\simeq f_2$, $g_1\simeq g_2$. 则 $g_1\circ f_1\simeq g_2\circ f_2$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f_1"] \arrow[r, bend right, "f_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H_1"] & Y \arrow[r, bend left, "g_1"] \arrow[r, bend right, "g_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H_2"] & Z \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "g_1\circ f_1"] \arrow[r, bend right, "g_2\circ f_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow H"] & Z \end{tikzcd}$$

证明: 设 $H_1: f_1\simeq f_2$, $H_2: g_1\simeq g_2$. 则

$$H(x,t) = H_2(H_1(x,t),t)$$

是 $g_1\circ f_1$ 到 $g_2\circ f_2$ 的一个同伦:

$$H(x,0) = H_2(H_1(x,0),0) = H_2(f_1(x),0) = (g_1\circ f_1)(x).$$

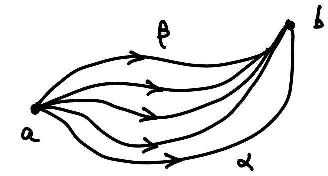
$$H(x,1) = H_2(H_1(x,1),1) = H_2(f_2(x),1) = (g_2\circ f_2)(x).$$

• 相对同伦

定义 (相对同伦 (homotopy relative to a subset)) 设 $A\subseteq X$, $f,g\in C(X,Y)$, 且 $f(a)=g(a)$ 对 $\forall a\in A$ 成立. 若存在 f 到 g 的同伦 H 使得 $H(a,t)=f(a)=g(a)$ 对 $\forall a\in A$, $\forall t\in I$ 成立, 则称 f 和 g 相对于 A 同伦, 记为 $H: f\simeq_A g$. 也称 H 是 f 到 g 的一个相对于 A 的同伦.

用完全相同的论证可以说明 $\simeq_A$ 也是 $C(X,Y)$ 上的等价关系, 且对映射复合封闭. 相对于 A 的映射类定义为 $C(X,Y)/\simeq_A$, 记为 $[X,Y]_A$. 当 $A=\varnothing$ 时, 相对于 A 的同伦就是常规同伦.

例 回忆 X 中的一条道路 α 是 $I \to X$ 的一个连续映射. 记 $A=\{0,1\}$. 则两条道路 α, β 关于 A 同伦即是指 α 和 β 的起点和终点均相同, 且 α 可在 X 中保持起点与终点也连续变为 β. 此时称 α 和 β 是定端同伦的. 此时习惯上记 $p=\{0,1\}$, 并记 $\alpha \simeq_p \beta$.



• 空间的同伦等价

动机: 刻画两个拓扑空间"本质相同", 但不像同胚这么强 (同胚是"完全相同").

直观: X 和 Y 同伦等价 $\rightsquigarrow$ X 和 Y 可互相"连续形变"为对方. 如 $[0,1]^2$ 可"压扁"为 $[0,1]$, $[0,1]$ 也可"拉伸"为 $[0,1]^2$, 但它们并不同胚.

定义 (同伦等价) 设 X, Y 为拓扑空间. 若存在 $f \in C(X,Y)$, $g \in C(Y,X)$, s.t. $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$ (X 上的恒等映射, 下同), $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$, 则称 X 和 Y 同伦等价, 或称 X 和 Y 有相同的伦型 (homotopy type), 记作 $X \simeq Y$. f 称为 X 到 Y 的一个同伦等价映射, g 称为 f 的同伦逆.

注 X 与 Y 同胚当且仅当 $\exists f \in C(X,Y)$, $g \in C(X,Y)$ 使得 $g \circ f = \mathbb{1}_X$, $f \circ g = \mathbb{1}_Y$. 可见同伦等价无非是将"等于恒等"弱化为"同伦于恒等".

区分记号: 同胚 $X \cong Y$, 同伦等价 $X \simeq Y$.

定义 (伦型不变性质) 一个性质 p 称为伦型不变性质, 若 X 满足 p 且 $X \simeq Y$, 则 Y 也满足 p.

定理 5.1.3. 同伦等价是等价关系.

证明: 自反性和对称性显然. 下证传递性. 设 $X \simeq Y$, $Y \simeq Z$, 且

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "f"] & Y \arrow[l, bend left, "g"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, bend left, "u"] & Z \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, bend left, "u \circ f"] & Z \arrow[l, bend left, "g \circ v"] \end{tikzcd}$$

满足 $g \circ f \simeq \mathbb{1}_X$, $f \circ g \simeq \mathbb{1}_Y$, $v \circ u \simeq \mathbb{1}_Y$, $u \circ v \simeq \mathbb{1}_Z$. 则有

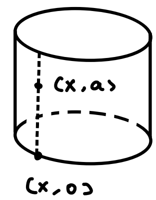
$$(g \circ v) \circ (u \circ f) \simeq g \circ \mathbb{1}_Y \circ f = g \circ f \simeq \mathbb{1}_X,$$

$$(u \circ f) \circ (g \circ v) \simeq u \circ \mathbb{1}_Y \circ v = u \circ v \simeq \mathbb{1}_Z.$$

这说明 $(g \circ v) \circ (u \circ f)$ 就是 $X \to Z$ 的一个同伦等价映射. $\square$

例 $S^1 \simeq S^1\times I$. 事实上，$f: S^1\to S^1\times I$, $f(x)=(x,0)$ 就是一个同伦等价. 它的一个同伦逆为 $g: S^1\times I\to S^1$, $g(x,a)=x$. 首先，我们有 $g\circ f = \mathbb{1}_{S^1}$. 其次，$(f\circ g)(x,a) = (x,0)$. 我们构造 $f\circ g$ 到 $\mathbb{1}_{S^1\times I}$ 的同伦：

$$H:(S^1\times I)\times I\to S^1\times I,\qquad (x,a,t)\mapsto (x,ta)$$



则 $H(x,a,0)=(x,0)=f\circ g(x,a)$, $H(x,a,1)=(x,a)=\mathbb{1}_{S^1\times I}(x,a)$.

注 由此可见，同伦等价映射一般未必是满射.

例 $\mathbb{R}^n$ 与单点空间 $X=\{x\}$ 同伦等价. 事实上，令 $f:\mathbb{R}^n\to X$, $g: X\to\mathbb{R}^n$, $g(x)=0$. 则 $f\circ g=\mathbb{1}_X$. 而 $g\circ f$ 是将 $\mathbb{R}^n$ 每一点映为 0 的常值映射. 而本节第一个例子表明到 $\mathbb{R}^n$ 的任何两个连续映射均同伦（直线同伦），故 $g\circ f\simeq \mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$. 因此 f 是同伦等价映射.

定义（零伦 (nullhomotopy/homotopic)）设 $f\in C(X,Y)$. 若 f 同伦于某个常值映射，则称 f 是零伦的.

定义（可缩 (contractible) 空间）若 X 同伦等价于单点空间，则称其为一个可缩空间.

注 注意，可缩依赖于全空间 X 的性质. 故可缩空间的子空间未必可缩. 如 $\mathbb{R}^2$ 可缩，但 $S^1\hookrightarrow\mathbb{R}^2$ 不可缩（用基本群）. 我们并不能将 $\mathbb{R}^2$ 到 0 的同伦等价映射限制在 S^1 上，因为"形变"过程会离开 S^1.

定理 5.1.4. 可缩空间必然道路连通.

证明：设 X 可缩. 则对于 $Y=\{y_0\}$，$\exists$ 同伦等价映射 $f: X\to Y$. 设 $g: Y\to X$ 是 f 的同伦逆. 记 $x_0=g(y_0)$. 我们证明 $\forall x_1\in X$，有连接 x_1 和 x_0 的连续道路. 设 $H: g\circ f\simeq \mathbb{1}_X$. 考虑道路 $\alpha(t)=H(x_1,t)$. 则 $H(x_1,0)=g(f(x_1))=g(y_0)=x_0$, $H(x_1,1)=\mathbb{1}_X(x_1)=x_1$. □

定理 5.1.5 X 可缩 $\iff$ $\mathbb{1}_X$ 零伦.

证明：$\Rightarrow$). 设 X 同伦等价于单点空间 $Y=\{y_0\}$. 设 $f: X\to Y$ 是同伦等价映射，g 是其同伦逆. 则 f 和 g 都是常值映射，故 $g\circ f$ 亦然. 而 $g\circ f\simeq\mathbb{1}_X$，故 $\mathbb{1}_X$ 零伦.

$\Leftarrow$). 设 $\mathbb{1}_X\simeq C_{x_0}$，其中 $C_{x_0}: X\to X$ 是常值映射 $C_{x_0}(x)\equiv x_0$. 设 $i:\{x_0\}\to X$ 为包含映射. 则 $C_{x_0}\circ i=\mathbb{1}_{\{x_0\}}$, $i\circ C_{x_0}=C_{x_0}\simeq\mathbb{1}_X$. 故 X 同伦等价于 $\{x_0\}$. □

我们引入一类特殊的同伦等价：形变收缩.

定义（形变收缩（deformation retraction））设 X 是拓扑空间，$A\subseteq X$，$i: A\to X$ 含入映射.

(1) 若 $r: X\to A$ 连续且 $r|_A=\mathbb{1}_A$，则称 r 为一个收缩映射（retraction），称 A 为 X 的一个收缩核（retract）.

(2) 若 $r: X\to A$ 连续，$r|_A=\mathbb{1}_A$（$\Leftrightarrow r\circ i=\mathbb{1}_A$）且 $i\circ r\simeq \mathbb{1}_X$，则称 r 为一个形变收缩映射（deformation retraction），称 A 为 X 的一个形变收缩核（deformation retract）.

(3) 若 $r: X\to A$ 是一个形变收缩映射. 若有同伦 $H: i\circ r\simeq \mathbb{1}_X$ s.t. $H(a,t)=a$ 对 $\forall a\in A$，$\forall t\in I$ 成立，则称 X 为一个强形变收缩映射.（换言之，将 $i\circ r\simeq\mathbb{1}_X$ 加强为 $i\circ r\simeq_A \mathbb{1}_X$）

注：显然一个形变收缩一定是同伦等价.

例 设 $X=\mathbb{R}^2-\{0\}$，$A=S^1$. 则 A 是 X 的一个强形变收缩核. 事实上，令 $r: X\to A$ 为 $r(x)=x/\|x\|$. 则我们可构造 $i\circ r$ 到 $\mathbb{1}_X$ 的相对于 A 的同伦 H:

$$H: X\times I\to X,\quad H(x,t)=tx+(1-t)\frac{x}{\|x\|}.$$

若 $x\in S^1$，则 $\|x\|=1$，故 $H(x,t)=tx+(1-t)x=x$. 故 H 在 A 上是恒等. 因此这确是相对于 A 的同伦.

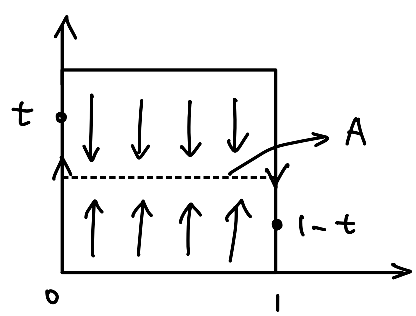
例 $D^n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\le 1\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的强形变收缩核. 我们构造形变收缩 $r:\mathbb{R}^n\to D^n$ 如下：

$$r(x)=\begin{cases} x, & \|x\|\le 1,\\ x/\|x\|, & \|x\|>1.\end{cases}$$

则有同伦 $H: i\circ r\simeq_{D^n}\mathbb{1}_X$，

$$H(x,t)=\begin{cases} x, & \|x\|\le 1,\\ tx+(1-t)\dfrac{x}{\|x\|}, & \|x\|>1.\end{cases}$$

例 考虑 Möbius 带 $M=I^2/_{(0,t)\sim(1,1-t)}$，$\forall t\in I$. 记 $[s,t]$ 为 $(s,t)\in I^2$ 在商映射 $p: I^2\to M$ 下的像.



令 $A=\{[s,\frac12]\mid s\in I\}$ 为 M 的中位线. 按右图构造收缩映射 $r: M\to A$，$r([s,t])=[s,\frac12]$. 这个映射是良定义的，因 $r([0,t])=[0,\frac12]=[1,\frac12]=r([1,1-t])$.

我们证明 $i\circ r\simeq_A \mathbb{1}_M$，从而 A 是 M 的强形变收缩核.

构造同伦 $H: M\times I \to M$, $H([s,t],u) = [s, tu+\frac{1}{2}(1-u)]$. 我们仍然需验证 H 良定义. $\forall t\in I$, 我们有

$$H([0,t],u) = [0, tu+\tfrac{1}{2}(1-u)] = [1, 1-(tu+\tfrac{1}{2}(1-u))]$$
$$= [1, 1-tu-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}u] = [1, (1-t)u+\tfrac{1}{2}(1-u)] = H([1,1-t],u)$$

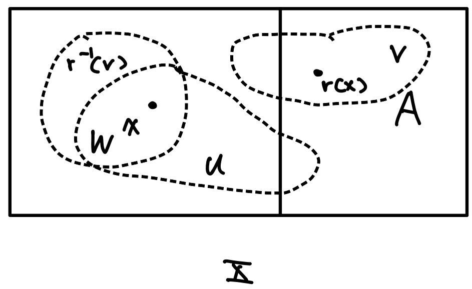
由商映射的泛性质, H 连续. 且

$$H([s,t],0) = [s,\tfrac{1}{2}] = i\circ r([s,t]), \quad H([s,t],1) = [s,t] = \mathbb{1}_M([s,t]),$$
$$H([s,\tfrac{1}{2}],u) = [s, \tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{2}(1-u)] = [s,\tfrac{1}{2}].$$

因此 $H: i\circ r \simeq_A \mathbb{1}_M$. □

<u>定理 5.1.6</u> Hausdorff 空间的收缩核是闭的.

<u>证明</u>: 设 X 是 Hausdorff 空间, A 是 X 的收缩核.



则有连续映射 $r: X\to A$ s.t. $r|_A = \mathbb{1}_A$. $\forall x\notin A$, 则 $r(x)\neq x$ (因 $r(x)\in A$). 由于 X 是 Hausdorff 空间, $\exists x$ 的开邻域 U, $r(x)$ 的开邻域 V, s.t. $U\cap V=\emptyset$.

由于 r 连续, 故 $r^{-1}(V)$ 也是 x 的开邻域. 因而 $W\triangleq U\cap r^{-1}(V)$ 同样是 x 的开邻域.

现在我们说明 $W\cap A=\emptyset$. 事实上, 若 $\exists y\in W\cap A$, 则由于 $y\in A$, $r(y)=y$. 然而 $y\in W\subseteq r^{-1}(V) \Rightarrow r(y)\in V$. 从而有 $y=r(y)\in V$. 但 $y\in W\subseteq U$. 故 $U\cap V\neq\emptyset$, 矛盾. □

我们已证闭单位球 D^n 是 $\mathbb{R}^n$ 的强形变收缩核. 而定理 5.1.6 表明, 开单位球 $\mathrm{Int}(D^n)$ 连 $\mathbb{R}^n$ 的收缩核都不是.

最后, 我们给出同伦等价的形变收缩刻画:

<u>定理 5.1.7.</u> 设 X 和 Y 同伦等价 $\Longleftrightarrow$ 存在拓扑空间 Z, 以及 Z 的分别同胚于 X 和 Y 的子空间 X_1 和 Y_1, 使得 X_1 和 Y_1 均为 Z 的形变收缩核.

证明: 这是课后习题 33. 证明可参考 Hatcher, Chapter 0. □