Assignment 5

1. Let X and Y be topological spaces, and let $f : X \to Y$ be a map. Define $G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$, called the graph of f. If Y is Hausdorff and f is continuous, prove that G is a closed subset of the product space $X \times Y$.

设 $(x_0, y_0) \notin G$. 则 $y_0 \neq f(x_0)$. 由于 Y 是 Hausdorff 空间, 存在 y_0 和 $f(x_0)$ 的不交开邻域 V_1, V_2. 又因 f 连续, $U = f^{-1}(V_2)$ 是 x_0 的开邻域. 则有 $(x_0, y_0) \in U \times V_1 \subseteq X \times Y - G$. 这是因为 $\forall (x, y) \in U \times V_1$, 都有 $f(x) \in V_2$ 故 $f(x) \notin V_1$. 因此 G 是开集. $\square$

4. Let $S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ (the n-dimensional sphere), and let X satisfy the T_4 axiom. Prove that a continuous map from a closed set $A \subseteq X$ to S^n can be extended to an open neighborhood of A.

设 $f: A \to S^n$ 连续. 将 S^n 嵌入 $\mathbb{R}^{n+1}$. 则 $g: A \to S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 也连续. 对 g 的每个分量使用 Tietze 扩张定理, 可将 g 延拓为连续函数 $G: X \to \mathbb{R}^{n+1}$. 设 $B = G^{-1}(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})$. 则 B 是开集且 $A \subseteq B$ (因 G 将 A 映入 $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, 而 $0 \notin S^n$). 令 $F: B \to S^n$,

$$F(x) = \frac{G(x)}{\|G(x)\|}, \quad \text{其中 } \|(u_1, \cdots, u_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ 是 } \ell^2\text{-范数}.$$

则对 $x \in A$, 有 $\|G(x)\| = 1$ 进而 $F(x) = G(x) = f(x)$. 因此 F 是 f 的延拓. $\square$

Assignment 6

2. Prove that

 1). Any connected clopen subset of X is a connected component of X;

 2). If X has only finitely many connected components, then each connected component of X is clopen. Give an example showing that if X has infinitely many connected components, the conclusion may not hold.

(1) 设 A 是 clopen 的. 设 C 是包含 A 的连通分支. 则因 C 连通, 它不能有非平凡 clopen 子集. 故 $A = C$.

(2) 已知连通分支都是闭集. 若 X 只有有限多个连通分支, 则每个连通分支均是其他分支并集之补. 而有限多个闭集之并仍闭, 故每个连通分支都是开的.

无限多连通分支结论不成立的反例: $\mathbb{Q}$.

4. Prove that the connected components of an open set $A \subset \mathbb{R}^n$ are countable.

$\forall x \in A$. 由于 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中开集, $\exists \delta > 0$ s.t. $B(x;\delta) \subseteq A$. 但 $B(x;\delta)$ 是连通的 (它是凸集, 任何两点可用直线连接), 故 x 所在的连通分支包含 $B(x;\delta)$. 而 $\mathbb{Q}^n$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中稠密, 因此 $B(x;\delta)$ 中至少存有一个有理点. 以上论证表明, A 的任何连通分支都至少有一个有理点, 而 $\mathbb{R}^n$ 中有理点是可数的, 由此即得所需结论. □

5 单独写在另一份讲义中.

1. Let G be a topological group — that is, G is both a group and a topological space, and the group multiplication $G \times G \to G : (g, h) \mapsto gh$ and the inversion map $G \to G : g \mapsto g^{-1}$ are both continuous. Suppose G is connected. Prove that if a normal subgroup H of G is discrete in G, then H is contained in the center of G.

Hint. Consider the conjugation action of H on G.

任取 $h \in H$. 考虑映射 $\varphi_h : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}hg$. 由于 G 是拓扑群, 故 φ_h 连续. 又因 H 是 G 的正规子群, $g^{-1}hg \in g^{-1}Hg = H$, $\forall g \in G$. 这说明 $\varphi_h(G) \subseteq H$. 但 G 连通, 故 $\varphi_h(G)$ 亦然. 但离散空间中的连通子集只可能是单点集, 故 φ_h 是常值映射. 又 $\varphi_h(e) = h$, 故 $\varphi_h(g) = h$, $\forall g \in G$. 即 $g^{-1}hg = h$ 对 $\forall g \in G$ 成立. 换言之, h 与 $\forall g \in G$ 可交换, 故 $h \in C(G)$ (G 的中心). 由 h 任意性, $H \subseteq C(G)$. □

Assignment 7

2. Prove that a compact Hausdorff space is T_4.

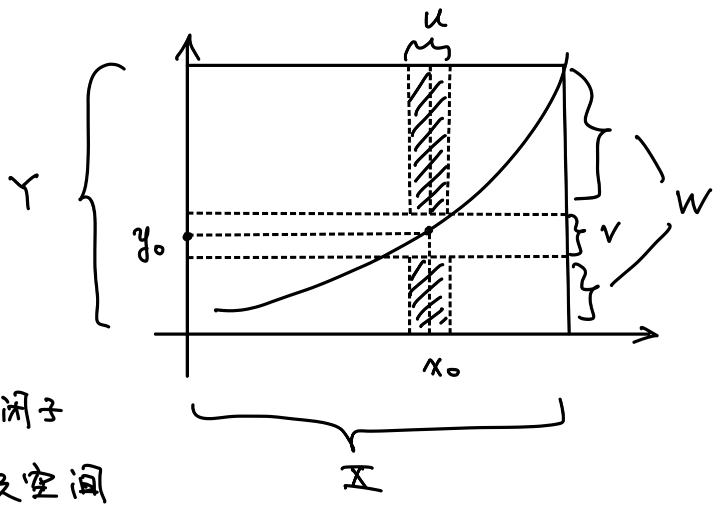
先证 紧+Hausdorff $\Rightarrow T_3$. 设 X 是紧 Hausdorff 空间. 设 $F \subseteq X$ 是闭集, $y_0 \notin F$. 则由于 X 是 Hausdorff 空间, $\forall x \in F$, $\exists x$ 的开邻域 U_x, y_0 的开邻域 V_x, s.t. $U_x \cap V_x = \varnothing$. 此时 $\{U_x\}_{x\in F}$ 构成了 F 的一个开覆盖. 由于 F 是紧空间的闭子空间, F 也是紧集. 故 $\{U_x\}_{x\in F}$ 有一个有限子覆盖 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$. 令 $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$, $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. 则 U, V 分别是 F 和 y_0 的开邻域, 且彼此不交. 因此 X 是 T_3 空间.

再证 X 是 T_4 空间. 设 F_1, F_2 是 X 的两个不交闭集. 则 $\forall x \in F_1$, $\exists x$ 的开邻域 U_x, F_2 的开邻域 V_x, s.t. $U_x \cap V_x = \varnothing$ (因已证 X 是 T_3 空间). 接下来的论证与上一段完全相同. $\{U_x\}_{x\in F_1}$ 构成 F_1 的开覆盖, 由 F_1 紧性找出其有限子覆盖. 对应的 U_x 之并与 V_x 之交就构成了 F_1 与 F_2 的不交邻域. $\square$

3. Let X and Y be topological spaces. Let $f : X \to Y$ and let

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y.$$

The set G is called the graph of f. If Y is compact and G is a closed subset of $X \times Y$, prove that f is continuous.



任取 $x_0 \in X$, 记 $y_0 = f(x_0)$. 我们证明 f 在 x_0 处连续. 根据连续性的定义, 只需对 y_0 的任意开邻域 V, 找到 x_0 的一个开邻域 U, 使得 $f(U) \subseteq V$.

记 $W = Y - V$. 由于 V 是开集, W 是 Y 的闭子集. 而 Y 是紧集, 故 W 也是紧集. 考虑乘积空间 $X \times W$. 由于图像 G 是闭集, 故 $O := X \times W - G$ 是 $X \times W$ 中开集. 且由于 $f(x_0) \notin W$, O 包含 $\{x_0\} \times W$. 由管道引理, 存在 x_0 的开邻域 U 使得 $U \times W \subseteq O$. 于是 $\forall x \in U$, 必有 $f(x) \in V$. 因如若不然, 就有 $f(x) \in W$. 因此

$$(x, f(x)) \in (U \times W) \cap G \subseteq O \cap G = (X \times W - G) \cap G = \varnothing,$$ 矛盾. $\square$

4. Prove the Bolzano–Weierstrass theorem: every infinite subset of a compact space has a limit point.

如若不然，$\forall x \in X$，$\exists x$ 的一个开邻域 U_x s.t. $U_x \cap A \subseteq \{x\}$. 我们断言此时开覆盖 $\{U_x\}_{x\in X}$ 没有有限子覆盖. 事实上，$\forall x_1, \cdots, x_n \in X$，

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \cap A = \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap A) \subseteq \{x_1, \cdots, x_n\}.$$

而 A 是无限集. 故 $\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ 甚至未能覆盖 A，当然不可能覆盖 X. $\square$

5. Show that $\mathbb{Q}$ are not locally compact.

如果 $\mathbb{Q}$ 局部紧，必存在 $\mathbb{R}$ 中区间 I，s.t. $\mathbb{Q} \cap I$ 是紧空间. 取 I 中一无理数 α，在 $\mathbb{Q} \cap I$ 中取一严格单调序列 $\{r_n\}$ s.t. $r_n \to \alpha$. 则 $\{r_n\}$ 在 $\mathbb{Q} \cap I$ 中无极限点. 由上题结论，$\mathbb{Q} \cap I$ 非紧. $\square$