1.12 第一章练习答案

练习 1.14 熟悉矩阵空间的内积计算

(1) 可以验证 $I_{2\times2}$ 和 σ^i 的在转置共轭下不变，所以他们的对偶矢量对应的矩阵就是 $I_{2\times2}$ 和 σ^i。

(2) 由对偶矢量的定义，A 的对偶矢量是 $A^\dagger = a_0^* I_{2\times2}^\dagger + \sum_i a_i^* \sigma^{i\dagger} = a_0^* I_{2\times2} + \sum_i a_i^* \sigma^i$

(3) 利用矩阵的矩阵表示，

$$\frac{1}{2}Tr[AB^\dagger] = \frac{1}{2}(AB^\dagger)_{ii} = \frac{1}{2}A_{ij}(B^\dagger)_{ji} = \frac{1}{2}A_{ij}B^*_{ij}.$$

条件 1：

$$\frac{1}{2}Tr[BA^\dagger] = \frac{1}{2}B_{ij}A^*_{ij} = \left(\frac{1}{2}A_{ij}B^*_{ij}\right)^* = \left(\frac{1}{2}Tr[AB^\dagger]\right)^*.$$

条件 2：

$$\frac{1}{2}Tr[AA^\dagger] = \frac{1}{2}A_{ij}A^*_{ij} = \frac{1}{2}|A_{ij}|^2 \geq 0.$$

条件 3：$\forall A, B \in V, C \in V^*, \forall a, b, c \in \mathbb{C}$, 有

$$\frac{1}{2}Tr[(a * A + b * B)C^\dagger] = \frac{a}{2}Tr[AC^\dagger] + \frac{b}{2}Tr[BC^\dagger].$$

所以该定义满足内积的要求。

(4) 练习 1.9 中已经证明了这四个矩阵构成 2×2 复矩阵空间的一组基，这里只需证明正交归一性即可。可以硬算，也可以用 Pauli 矩阵的一个重要的关系式，

$$\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i = 2\delta^{ij}I_{2\times2}.$$

再利用矩阵求迹的性质，

$$\frac{1}{2}Tr[\sigma^i\sigma^j] = \frac{1}{4}Tr[\sigma^i\sigma^j + \sigma^j\sigma^i] = \frac{1}{2}Tr[I_{2\times2}] = 1.$$

(5) 因为 $I_{2\times2}$ 和 σ^i 构成正交归一基，所以 A 可以在这组基下展开

$$A = a_0 I_{2\times2} + a_i\sigma^i.$$

利用内积的定义，有，

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}Tr[I_{2\times2}^\dagger A] = \frac{5}{2} - 2i, \\
a_1 &= \frac{1}{2}Tr[\sigma^{1\dagger}A] = \frac{3}{2} + i, \\
a_2 &= \frac{1}{2}Tr[\sigma^{2\dagger}A] = 2 - \frac{i}{2}, \\
a_3 &= \frac{1}{2}Tr[\sigma^{3\dagger}A] = -\frac{3}{2} + 3i.
\end{aligned}$$

练习 1.15 熟悉函数空间的内积计算

（1）按照内积定义中的三个条件证明即可。

（2）由球谐函数的性质

$$\int_0^\pi \theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

设 $f(\theta,\varphi)=\sum_{lm}a_{lm}Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 和 $g(\theta,\varphi)=\sum_{l'm'}b_{l'm'}Y_{l'm'}(\theta,\varphi)$, 由内积定义可得

$$\begin{aligned}\langle f|g\rangle &= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi f^*(\theta,\varphi)g(\theta,\varphi)\sin\theta \\ &= \sum_{lml'm'} a^*_{lm}b_{l'm'}\int_0^{\pi}\theta\int_0^{2\pi} d\varphi \sin\theta Y^*_{lm}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi) \\ &= \sum_{lml'm'} a^*_{lm}b_{l'm'}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \\ &= \sum_{lm} a^*_{lm}b_{lm}\end{aligned}$$

练习 1.16 熟悉 Dirac 符号 bra 和 ket 的使用

取 $|1'\rangle=|v_1\rangle$, 依次取

$$|i'\rangle = |v_i\rangle - \sum_{j=1}^{i-1}\frac{\langle j'|v_i\rangle}{\langle j'|j'\rangle}|j'\rangle, \qquad \forall j=2\ldots n.$$

最后对所有的态做归一化即可，

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle i'|i'\rangle}}|i'\rangle, \qquad \forall i=1\ldots n.$$

练习 1.17 熟悉单位算符的用法

$$\langle v| = \langle v|\left(\sum_{i=1}^{n}|i\rangle\langle i|\right) = \sum_{i=1}^{n}\langle v|i\rangle\langle i| = \sum_{i=1}^{n} v_i^*\langle i|$$

练习 1.18、1.19 熟悉 Dirac 符号 bra 和 ket 的使用

见教材 1.4 节。

练习 1.20 熟悉线性子空间的定义

（1）是，（2）是，（3）否。

练习 1.21 熟悉线性子空间的定义

是

练习 1.22 熟悉线性子空间的定义

计 $V'=\{|u\rangle=\sum_{i=1}^{3}a_i\sigma^i|\forall a_i\in\mathbb{C}$，$\forall|u\rangle,|v\rangle\in V'$，则有 $|u\rangle=\sum_{i=1}^{3}u_i\sigma^i$ 和 $|v\rangle=\sum_{i=1}^{3}v_i\sigma^i$, 因此

$$a|u\rangle+b|v\rangle=\sum_{i=1}^{3}(au_i+bv_i)\sigma^i$$

仍为 V' 中的元素，封闭性成立。所以 V' 是 V 的三维线性子空间。

练习 1.23 熟悉直和空间的定义

$$V_z\oplus V_x=V_{xz}, V_z\oplus V_{xy}=V, V_z\oplus V_{xz}=V_{xz}.$$

练习 1.26 熟悉直积空间的定义

（1）先取 V_1 上的基为 $\{\sin(kx)|k>0\in\mathbb{R}\}$ 和 V_2 上的基为 $\{\cos(kx)|k>0\in\mathbb{R}\}$. 下面判断正交性和归一性，

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\sin(kx)\sin(k'x)=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\left[\cos((k-k')x)-\cos((k+k')x)\right]=\pi\delta(k-k')$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\cos(kx)\cos(k'x)=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx\left[\cos((k-k')x)+\cos((k+k')x)\right]=\pi\delta(k-k')$$

可见两个基都满足正交性，但不满足归一性。由上面计算，可取正交归一基，

$$\begin{aligned} V_1: &\quad \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kx)|k>0\in\mathbb{R}\right\}, \\ V_2: &\quad \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kx)|k>0\in\mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

（2）由定义，$V_1\otimes V_2$ 中元素是 $\{\sin(kx)\cos(k'y)|k>0,k'>0\in\mathbb{R}\}$ 的线性组合，可以记为所有的双变量函数

$$\{f(x,y)|f(-x,y)=-f(x,y),f(x,-y)=f(x,y),x,y\in(-\pi,\pi)\}.$$

练习 1.27 熟悉线性算符的定义

$\forall|u\rangle\in V$，设 $|u'\rangle=\widehat{\Omega}|u\rangle$, 则

$$\left(a\langle w|+b\langle z|\right)\widehat{\Omega}|u\rangle=\left(a\langle w|+b\langle z|\right)|u'\rangle=a\langle w|u'\rangle+b\langle z|u'\rangle=a\langle w|\widehat{\Omega}|u\rangle+b\langle z|\widehat{\Omega}|u\rangle.$$

因为 $|u\rangle$ 是任选的，所以有

$$\left(a\langle w|+b\langle z|\right)\widehat{\Omega}=a\left(\langle w|\widehat{\Omega}\right)+b\left(\langle z|\widehat{\Omega}\right).$$

练习 1.28 理解算符的矩阵表示依赖所选的空间和基矢量

（1）

$$\widehat{\Omega}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} & 0\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

（2）

$$\widehat{\Omega}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix},$$

(3)

$$\widehat{\Omega}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

.

练习 1.29 理解算符乘积一般不能交换顺序，熟悉算符对易的计算

绕 z 轴旋转 θ 角的矩阵为

$$R_z(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

绕 x 轴旋转 θ 角的矩阵为

$$R_z(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

代入具体角度可得，

$$\widehat{\Omega}=R_z(\pi/3)=\begin{pmatrix}1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0\\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \widehat{\Omega}'=R_z(\pi/6)=\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0\\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\widehat{\Omega}''=R_x(\pi/3)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2\\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

利用算符对易子和矩阵乘法定义，可得

$$\begin{aligned}
[\widehat{\Omega},\widehat{\Omega}'] &= 0_{3\times 3},\\
[\widehat{\Omega},\widehat{\Omega}''] &= \begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}/4 & 3/4\\ \sqrt{3}/4 & 0 & \sqrt{3}/4\\ -3/4 & \sqrt{3}/4 & 0\end{pmatrix}\\
[\widehat{\Omega}',\widehat{\Omega}''] &= \begin{pmatrix}0 & 1/4 & \sqrt{3}/4\\ -1/4 & 0 & \sqrt{3}/2-3/4\\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/2+3/4 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

练习 1.30 熟悉算符对易计算中的常用公式

(1)

$$\begin{aligned}
lhs &= [\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}\widehat{\Phi}]=\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}\widehat{\Phi}-\widehat{\Lambda}\widehat{\Phi}\widehat{\Omega},\\
rhs &= \widehat{\Lambda}(\widehat{\Omega}\widehat{\Phi}-\widehat{\Phi}\widehat{\Omega})+(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}-\widehat{\Lambda}\widehat{\Omega})\widehat{\Phi}=\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}\widehat{\Phi}-\widehat{\Lambda}\widehat{\Phi}\widehat{\Omega}.
\end{aligned}$$

(2) $[\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda},\widehat{\Phi}]=-[\widehat{\Phi},\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}]$，再用第一问的结果.

练习 1.31 熟悉算符求逆计算中的常用公式

因为 $(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda})^{-1}(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda})=(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda})(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda})^{-1}=\widehat{I}$，$\widehat{\Lambda}^{-1}\widehat{\Omega}^{-1}(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda})=(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda})\widehat{\Lambda}^{-1}\widehat{\Omega}^{-1}=\widehat{I}$，得证。

练习 1.32 熟悉算符矩阵表示的公式

取三维欧氏空间的基为 $|1\rangle=(1,0,0)^T, |2\rangle=(0,1,0)^T, |3\rangle=(0,0,1)^T$，带入(1.2)式计算即可。

练习 1.34 熟悉算符乘积的矩阵表示

因为

$$\langle i|\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}|j\rangle=\langle i|\widehat{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n}|k\rangle\langle k|\right)\widehat{\Lambda}|j\rangle=\sum_{k=1}^{n}\langle i|\widehat{\Omega}|k\rangle\langle k|\widehat{\Lambda}|j\rangle.$$

可得算符乘积的矩阵表示为算符矩阵表示的乘积。

练习 1.35 熟悉算符对对偶空间的作用

取线性空间 V 的一组正交归一基 $\{|i\rangle|i=1\ldots n\}$。$\forall|u\rangle\in V$, 设 $|u'\rangle=\widehat{\Omega}|u\rangle$。则 $|u'\rangle$ 的分量为

$$\langle j|u'\rangle=\sum_i\langle j|\widehat{\Omega}|i\rangle\langle i|u\rangle.$$

左右两边做复共轭，可得，

$$\langle u'|j\rangle=(\langle j|u'\rangle)^*=\sum_i(\langle j|\widehat{\Omega}|i\rangle)^*(\langle i|u\rangle)^*=\sum_i(\langle j|\widehat{\Omega}|i\rangle)^*\langle u|i\rangle.$$

另一方面，有

$$\langle u'|j\rangle = \sum_i \langle u|i\rangle\langle i|\widehat{\Lambda}|j\rangle.$$

比较上面两式，可得

$$\langle i|\Lambda|j\rangle = (\langle j|\widehat{\Omega}|i\rangle)^*.$$

即 $\widehat{\Lambda}$ 的矩阵表示是 $\widehat{\Omega}$ 矩阵表示的转置共轭，记为 $\widehat{\Lambda} = \widehat{\Omega}^\dagger$.

练习 1.36 熟悉算符的运算

（1）取线性空间的一组正交归一基，证明两个算符的矩阵表示相同。

（2）在 $\widehat{\Omega}$ 左右两侧各插入一个单位算符，然后利用 $\widehat{\Omega}^\dagger$ 和 $\widehat{\Omega}$ 的矩阵表示之间的关系。

练习 1.37 熟悉算符的运算

可通过矩阵表示证明 $(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda})^\dagger = \widehat{\Lambda}^\dagger\widehat{\Omega}^\dagger$.

练习 1.38 熟悉酉算符的性质

（1）若 $\widehat{\Omega}$ 和 $\widehat{\Lambda}$ 为酉算符，则

$$(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda})^\dagger(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}) = \widehat{\Lambda}^\dagger\widehat{\Omega}^\dagger(\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}) = \widehat{I}.$$

(2) 若 $\widehat{\Omega}$ 为酉算符，$\forall |u\rangle, |v\rangle \in V$, 其在酉算符作用下映射到 $|u'\rangle = \widehat{\Omega}|u\rangle, |v'\rangle = \widehat{\Omega}|v\rangle$, 则

$$\langle u'|v'\rangle = \langle u|\widehat{\Omega}^\dagger\widehat{\Omega}|v\rangle = \langle u|v\rangle.$$

练习 1.39 熟悉本征方程

$\widehat{\Omega}(a|u\rangle) = a\widehat{\Omega}|u\rangle = a\omega|u\rangle = \omega(a|u\rangle)$，所以 $a|u\rangle$ 仍为本征矢量且本征值仍为 ω.

练习 1.40 熟悉本征方程的解法

由本征值方程

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

可得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$. 带入方程即可得三个本征矢量

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

练习 1.41 熟悉厄米算符的性质

（1）设 $|u\rangle$ 为厄米算符 $\widehat{\Omega}$ 的本征态，对应的本征值为 ω，即 $\widehat{\Omega}|u\rangle = \omega|u\rangle$。则有

$$\langle u|\widehat{\Omega}|u\rangle = \omega\langle u|u\rangle.$$

另一方面，有

$$\Big(\langle u|\widehat{\Omega}|u\rangle\Big)^* = \langle u|\widehat{\Omega}^\dagger|u\rangle = \langle u|\widehat{\Omega}|u\rangle,$$

其中最后一步利用了 $\widehat{\Omega}$ 是厄米算符的性质。结合这两个式子，可得 $\omega^*|u|^2 = \omega|u|^2 \Rightarrow \omega^* = \omega$.

（2）设 $\widehat{\Omega}$ 为厄米算符，$|\omega_1\rangle$ 和 $|\omega_2\rangle$ 是 $\widehat{\Omega}$ 的两个本征态，本征值分别为 ω_1 和 ω_2 且 $\omega_1 \neq \omega_2$，可得

$$\langle\omega_1|\widehat{\Omega}|\omega_2\rangle = \langle\omega_1|\omega_2|\omega_2\rangle = \omega_2\langle\omega_1|\omega_2\rangle.$$

另一方面，

$$\Big(\langle\omega_1|\widehat{\Omega}|\omega_2\rangle\Big)^* = \langle\omega_2|\widehat{\Omega}^\dagger|\omega_1\rangle = \langle\omega_2|\widehat{\Omega}|\omega_1\rangle = \omega_1\langle\omega_2|\omega_1\rangle.$$

结合上面两式，并由（1）可知 ω_1 和 ω_2 是实数，可得

$$(\omega_2-\omega_1)\langle\omega|_\rangle 2\omega_1 = 0,$$

因为 $\omega_1 \neq \omega_2$，可知 $\langle\omega_2|\omega_1\rangle = 0$, 即厄米算符对应不同本征值的本征态正交。

练习 1.42 证明互相对易的厄米算符可以构造 Hilbert 空间的正交归一基

设厄米算符 $[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}]=0$, $|\omega\rangle$ 为 $\widehat{\Omega}$ 的任一本征态，对应的本征值为 ω。

由 $[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}]=0$，可以推出，

$$\begin{aligned}&[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}]=0\\ \Rightarrow&[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}]|\omega\rangle = (\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}-\widehat{\Lambda}\widehat{\Omega})|\omega\rangle = 0\\ \Rightarrow&\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}|\omega\rangle = \omega\widehat{\Lambda}|\omega\rangle.\end{aligned}$$

所以 $\widehat{\Lambda}|\omega\rangle$ 也是 $\widehat{\Omega}$ 的本征态，本征值为 ω.

下面讨论两种情况：

(1) 若 $\widehat{\Omega}$ 的本征值为 ω 的本征态只有一个（不简并），则 $\widehat{\Lambda}|\omega\rangle$ 必然与 $|\omega\rangle$ 平行，即两者只相差一个因子，设其为 λ,

$$\widehat{\Lambda}|\omega\rangle = \lambda|\omega\rangle,$$

这正说明 $|\omega\rangle$ 也是 $\widehat{\Lambda}$ 的本征态，对应的本征值为 λ.

(2) 若算符 $\widehat{\Omega}$ 本征值为 ω 的本征态多于 1 个，即存在简并。将其中线性无关的本征态记为 $\{|\omega,i\rangle|i=1\ldots n\}$。$n$ 也被称为本征值为 ω 的 “简并度”。设 V_ω 为 $\{|\omega,i\rangle|i=1\ldots n\}$ 及其线性组合构成的空间，由定义可证 V_ω 为 V 的线性子空间（证封闭性）。因此可以选择 $\widehat{\Lambda}$ 在 V_ω 的本征基矢 $|\omega,\lambda_i\rangle$ 作为 V_ω 的基底，其满足

$$\widehat{\Omega}|\omega,\lambda_i\rangle = \omega|\omega,\lambda_i\rangle,\qquad \widehat{\Lambda}|\omega,\lambda_i\rangle = \lambda_i|\omega,\lambda_i\rangle.$$

因此在重新选择 V_ω 的基底后，所有基矢量都是 $\widehat{\Omega}$ 和 $\widehat{\Lambda}$ 的共同本征态。

练习 1.43 熟悉算符函数的计算

利用矩阵乘法很容易证明

$$\widehat{\Omega}^2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\qquad \widehat{\Omega}^3=\widehat{\Omega}$$

所以 $\widehat{\Omega}$ 的奇数次方都能等于 $\widehat{\Omega}$, 偶数次方都等于 $\widehat{\Omega}^2$. 算符函数用 Taylor 展开理解，对 $e^{i\theta\widehat{\Omega}}$ 进行泰勒展开，有

$$\begin{aligned}
e^{i\theta\widehat{\Omega}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(i\theta)^n\widehat{\Omega}^n \\
&= I_{3\times3} + \sum_{n=even,n\geq2}\frac{1}{n!}(i\theta)^n\widehat{\Omega}^n + \sum_{n=odd}\frac{1}{n!}(i\theta)^n\widehat{\Omega}^n \\
&= I_{3\times3} + \widehat{\Omega}^2\sum_{n=even,n\geq2}\frac{1}{n!}(i\theta)^n + \widehat{\Omega}\sum_{n=odd}\frac{1}{n!}(i\theta)^n \\
&= I_{3\times3} + \widehat{\Omega}^2\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}(\theta)^{2j} + i\widehat{\Omega}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(\theta)^{2k+1} \\
&= I_{3\times3} + \widehat{\Omega}^2(\cos\theta - 1) + i\widehat{\Omega}\sin\theta \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

在第四行，我们定义了 $j = n/2$ 和 $k = (n-1)/2$. 从最后的结果可知，$e^{i\theta\widehat{\Omega}}$ 对应绕 z 轴旋转 θ 角的操作。

练习 1.44 熟悉算符函数的运算

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}e^{is\widehat{\Omega}} &= \frac{d}{ds}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(is)^n\widehat{\Omega}^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}(i)^n n s^{n-1}\widehat{\Omega}^n \\
&= i\widehat{\Omega}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}(i)^{n-1}s^{n-1}\widehat{\Omega}^{n-1} \\
&= i\widehat{\Omega}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(i)^k s^k\widehat{\Omega}^k \\
&= i\widehat{\Omega}e^{is\widehat{\Omega}}
\end{aligned}$$

在第二行的求导中，注意 Taylor 展开第一项是常数，对 s 的求导为 0，所以求和下限变成 $n=1$。在第四行中我们定义 $k = n-1$。可见单算符的函数求导和普通函数求导相同。

练习 1.45 熟悉算符函数的运算

一般算符函数的微分方程是很难求解的，本质困难在于算符不对易。对于单算符的情况比较简单，可以先将算符当成一个普通的数，求解之后再证明解的正确性。

如果把 $\widehat{\Omega}$ 当成一个数，则有，

$$d\left(\frac{1}{f(s)}\right) = -\widehat{\Omega}ds \Rightarrow f(s) = \frac{1}{c(\widehat{\Omega}) - \widehat{\Omega}s},$$

其中 c 为 $\widehat{\Omega}$ 的函数。由于算符函数的特殊性质，我们还需要用练习 1.44 的方法判断一下该结果的正确性。

练习 1.46 熟悉算符函数的运算

（1）若算符 $\widehat{H}$ 不含时间，可以把算符 $\widehat{H}$ 当成普通的数字，可以猜出一个解

$$\mathcal{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t-t_0)}.$$

然后用练习 1.44 的方法判断一下该结果的正确性。

（2）（3）若算符 $\widehat{H}$ 是时间 t 的函数，可以写出一个形式解，

$$\mathcal{U}(t)=e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t')dt'}.$$

下面检验得到的结果，

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d}{dt}\mathcal{U}&=i\hbar\frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t')dt'\right)^n\\
&=i\hbar\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t')dt'\right)^{i-1}\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{H}(t)\right)\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t')dt'\right)^{n-i}\\
&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t')dt'\right)^{i-1}\widehat{H}(t)\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t')dt'\right)^{n-i}
\end{aligned}$$

在第二行中，对积分的 n 次方求导时用到了莱布尼茨法则。如果 $\widehat{H}(t)$ 能和它左边的积分对易，那么就可以把 $\widehat{H}$ 移到最左边，右边的积分就可以重新整理成一个 e 指数，和练习 1.44 的步骤相同。

下面考察 $\widehat{H}(t)$ 和 $\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t')dt'$ 是否对易。可以把积分看成无数个 $\widehat{H}(t_0+k\Delta t)\Delta t$ 求和，其中 k 从 1 取到 $(t-t_0)/\Delta t$。所以只有当 $\widehat{H}(t)$ 和所有其他时刻的 $\widehat{H}(t')$ 对易时，才能将上式中的 $\widehat{H}(t)$ 移到最左边。因此我们猜出的表达式只适用于不同时刻的 $\widehat{H}(t)$ 都相互对易的情况。

前面说如果微分方程中只有一个算符，可以将算符当作普通的数字处理。这里的结果并不和前面说的矛盾，当 $\widehat{H}(t)$ 依赖于参数 t 时，不同 t 时的 $\widehat{H}$ 是不同的算符，所以这个微分方程本质上包含无穷多个算符。

（4）现在我们检验一下 Dyson 给出的解，重点关注计算过程中是否用到不同时刻 $\widehat{H}(t)$ 的对易，

$$\begin{aligned}
i\hbar\frac{d}{dt}\mathcal{U}&=i\hbar\left[\frac{-i}{\hbar}\int_{t_0}^{t}dt_1\widehat{H}(t_1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^n\int_{t_0}^{t}dt_1\int_{t_0}^{t_1}dt_s\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n\widehat{H}(t_1)\widehat{H}(t_2)\ldots\widehat{H}(t_n)\right]\\
&=\widehat{H}(t)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^{n-1}\int_{t_0}^{t}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n\widehat{H}(t)\widehat{H}(t_2)\ldots\widehat{H}(t_n)\\
&=\widehat{H}(t)\left[\widehat{I}+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^{n-1}\int_{t_0}^{t}dt_2\cdots\int_{t_0}^{t_{n-1}}dt_n\widehat{H}(t_2)\ldots\widehat{H}(t_n)\right]\\
&=\widehat{H}(t)\left[\widehat{I}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{-i}{\hbar}\right)^{k}\int_{t_0}^{t}dt_1\cdots\int_{t_0}^{t_{k-1}}dt_k\widehat{H}(t_1)\ldots\widehat{H}(t_k)\right]\\
&=\widehat{H}(t)\mathcal{U}
\end{aligned}$$

在第四行中，我们重新命名哑变量 $t_2\to t_1,t_3\to t_2\ldots t_n\to t_{n-1}$，并且设 $k=n-1$。在上面的计算中，我们没有交换任何算符的顺序，所以 Dyson 的解是原微分方程的解。

$\mathcal{U}$ 是量子力学中的时间演化算符，在量子力学和量子场论中有重要的地位。

练习 1.47 熟悉算符函数的运算规则

因为 $\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}=\widehat{\Lambda}\widehat{\Omega}$，所以有 $\widehat{\Omega}^m\widehat{\Lambda}^n=\widehat{\Lambda}^n\widehat{\Omega}^m$，其中 m 和 n 是任意正整数。然后可以证明，

$$e^{\widehat{\Omega}}e^{\widehat{\Lambda}}=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\widehat{\Omega}^n\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\widehat{\Lambda}^m\right)=\left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\widehat{\Lambda}^m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\widehat{\Omega}^n\right)=e^{\widehat{\Lambda}}e^{\widehat{\Omega}}$$

我们可以继续证明这个式子等于 $e^{\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda}}$,

$$
\begin{aligned}
e^{\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda}} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda})^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\widehat{\Omega}^m\widehat{\Lambda}^{n-m} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\frac{1}{(n-m)!}\widehat{\Omega}^m\widehat{\Lambda}^{n-m} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{m!}\frac{1}{(n-m)!}\widehat{\Omega}^m\widehat{\Lambda}^{n-m} \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\frac{1}{k!}\widehat{\Omega}^m\widehat{\Lambda}^{k} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{m!}\widehat{\Omega}^m\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\widehat{\Lambda}^k\right) \\
&= e^{\widehat{\Omega}}e^{\widehat{\Lambda}}.
\end{aligned}
$$

在第四行，我们交换了求和的顺序 $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n}=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}$。在第五行，我们定义 $k=n-m$.

练习 1.48 理解算符函数不能随便改变运算顺序

令 $f(x)=e^{x\widehat{\Omega}}e^{x\widehat{\Lambda}}$，易见 $f(0)=1$。对该函数求导，

$$
\begin{aligned}
\frac{df(x)}{dx} &= e^{x\widehat{\Omega}}\widehat{\Omega}e^{x\widehat{\Lambda}}+e^{x\widehat{\Omega}}\widehat{\Lambda}e^{x\widehat{\Lambda}} \\
&= e^{x\widehat{\Omega}}e^{x\widehat{\Lambda}}\left[e^{-x\widehat{\Lambda}}\widehat{\Omega}e^{x\widehat{\Lambda}}+\widehat{\Lambda}\right]
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

需要计算 $\widehat{\Omega}e^{x\widehat{\Lambda}}$，先算 $\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}^n$，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}-\widehat{\Lambda}\widehat{\Omega} &= [\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}], \\
\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}^2-\widehat{\Lambda}^2\widehat{\Omega} &= [\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}^2]=\widehat{\Lambda}[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}]+[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}]\widehat{\Lambda}=\widehat{\Lambda}\widehat{\Gamma}+\widehat{\Gamma}\widehat{\Lambda}=2\widehat{\Lambda}\widehat{\Gamma}, \\
\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}^3-\widehat{\Lambda}^3\widehat{\Omega} &= [\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}^3]=\widehat{\Lambda}^2[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}]+[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}^2]\widehat{\Lambda}=\widehat{\Lambda}^2\widehat{\Gamma}+2\widehat{\Gamma}\widehat{\Lambda}^2=3\widehat{\Lambda}^2\widehat{\Gamma},
\end{aligned}
$$

用数学归纳法可证

$$
\widehat{\Omega}\widehat{\Lambda}^n-\widehat{\Lambda}^n\widehat{\Omega}=n\widehat{\Lambda}^{n-1}\widehat{\Gamma}.
$$

并由此可得

$$
\widehat{\Omega}e^{x\widehat{\Lambda}}-e^{x\widehat{\Lambda}}\widehat{\Omega}=\widehat{\Omega}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n\widehat{\Lambda}^n\right)-\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n\widehat{\Lambda}^n\right)\widehat{\Omega}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}^n]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^n n\widehat{\Lambda}^{n-1}\widehat{\Gamma}=e^{x\widehat{\Lambda}}x\widehat{\Gamma}.
$$

整理一下可得

$$
\widehat{\Omega}e^{x\widehat{\Lambda}}=e^{x\widehat{\Lambda}}\left(\widehat{\Omega}+x\widehat{\Gamma}\right).
$$

将此式带入(1.5)可得，

$$
\frac{df(x)}{dx}=e^{x\widehat{\Omega}}e^{x\widehat{\Lambda}}\left(\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda}+x\widehat{\Gamma}\right)=f(x)\left(\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda}+x\widehat{\Gamma}\right).
$$

从此微分方程可以解出，

$$
\log f(x)=c+x(\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda})+\frac{x^2}{2}\widehat{\Gamma},
$$

其中 c 为待定常数，由 $f(0)=1$ 可得 $c=0$。对上式两边求 e 指数，

$$
f(x)=e^{x(\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda})+\frac{x^2}{2}\widehat{\Gamma}}.
$$

另一方面，由 $f(x)$ 最初的定义，可知，

$$e^{x\widehat{\Omega}}e^{x\widehat{\Lambda}}=e^{x(\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda})+\frac{x^2}{2}\widehat{\Gamma}}.$$

取 $x=1$ 即可得，

$$e^{\widehat{\Omega}}e^{\widehat{\Lambda}}=e^{\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda}+\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}}=e^{\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda}}e^{\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}},\tag{1.6}$$

最后一步用到了 $[\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda},\Gamma]=0$ 和练习 1.47 的结论。在(1.6)式中交换 $\widehat{\Omega}$ 和 $\widehat{\Lambda}$, 相应的 $\widehat{\Gamma}=[\widehat{\Omega},\widehat{\Lambda}]$ 换成 $-\widehat{\Gamma}$, 可得

$$e^{\widehat{\Lambda}}e^{\widehat{\Omega}}=e^{\widehat{\Lambda}+\widehat{\Omega}-\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}}=e^{\widehat{\Omega}+\widehat{\Lambda}}e^{-\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}},\tag{1.7}$$

结合(1.6)和(1.7)式，可得，

$$e^{\widehat{\Omega}}e^{\widehat{\Lambda}}=e^{\widehat{\Lambda}}e^{\widehat{\Omega}}e^{\widehat{\Gamma}}.$$

练习 1.49 熟悉无穷维 Hilbert 空间中的运算

（1）

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(k)=\int\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{-ikx}\\
\Rightarrow&\langle k|f\rangle=\int dx\langle x|f\rangle\langle k|x\rangle=\langle k|\left(\int dx|x\rangle\langle x|\right)|f\rangle\\
\Rightarrow&\int dx|x\rangle\langle x|=\widehat{I}.
\end{aligned}$$

（2）

$$\begin{aligned}
&f(x_0)=\langle x=x_0|f\rangle=\int dx\langle x=x_0|x\rangle\langle x|f\rangle=\int dx\langle x=x_0|x\rangle f(x)\\
\Rightarrow&\langle x=x_0|x\rangle=\delta(x-x_0).
\end{aligned}$$

（3）

$$|f\rangle=\left(\int dx|x\rangle\langle x|\right)|f\rangle=\int dxf(x)|x\rangle.$$

（4）

$$\langle f|g\rangle=\langle f|\left(\int dx|x\rangle\langle x|\right)|g\rangle=\int dx\langle f|x\rangle\langle x|g\rangle=\int dxf^*(x)g(x).$$

若 $\langle f|g\rangle=0$，则称 $|f\rangle$ 和 $|g\rangle$ 两矢量正交。

（5）

$$\langle f|f\rangle=\int dx|f(x)|^2\geq 0.$$

（6）

$$\begin{aligned}
&\delta(x-x')=\langle x'|x\rangle=\langle x'|\left(\int dk|k\rangle\langle k|\right)|x\rangle=\int dp\langle x'|p\rangle\langle p|x\rangle=\int\frac{dk}{2\pi}e^{ikx'}e^{-ikx}=\int\frac{dp}{2\pi}e^{ip(x'-x)}\\
\Rightarrow&\int\frac{dk}{2\pi}e^{ik(x'-x)}=\delta(x'-x)
\end{aligned}$$

（7）

$$\begin{aligned}
&\tilde{f}(k)=\langle k|f\rangle=|k\rangle\left(\int dk'|k'\rangle\langle k'|\right)|f\rangle=\int dk'\langle k|k'\rangle\tilde{f}(k')\\
\Rightarrow&\langle k|k'\rangle=\delta(x-x')
\end{aligned}$$

练习 1.50 复习 δ 函数的运算

（1）利用分部积分，

$$\int_a^b dx\delta'(x-x')f(x)=\delta(x-x')f(x)\Big|_{x=a}^{b}-\int dx\delta(x-x')f'(x)=-f'(x').$$

（2）δ 函数是个分布，分布只有放在积分中才有意义，取光滑函数 $f(x)$，有

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx\,\delta(ax)\,f(x) = \int_{x_{\min}/a}^{x_{\max}/a} \frac{dy}{a}\delta(y)f(y/a),$$

其中我们做了变量代换 $y = a\,x$。当 $a > 0$ 时, 该积分等于 $f(0)/a$; 若 $a < 0$, 则有 $x_{\min}/a > x_{\max}/a$, 交换积分上下限会给出一个负号，所以积分结果为 $-f(0)/a$. 写在一起即为

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx\,\delta(ax)\,f(x) = \frac{f(0)}{|a|}.$$

若两个分布对任意函数的积分都相等，则称这两个分布相等。从上面的结果容易看出 $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$.

（3）因为 $\delta(f(x))$ 函数在 $f(x) \neq 0$ 处必然为 0，所以只需要关注 $f(x)$ 零点附近的区域。在每一个零点附近，可以对 $f(x)$ 做 Taylor 展开。设 x_i 是第 i 个零点，在 x_i 附近有，

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \mathcal{O}\left((x - x_i)^2\right) = f'(x_i)(x - x_i) + \mathcal{O}\left((x - x_i)^2\right),$$

利用（2）中的结论，即有在 x_i 附近有，

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}.$$

再将所有零点的贡献相加即可。

（4）取任意光滑函数 $f(x)$，有

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx\frac{d}{dx}\theta(x - x')f(x) = \theta(x - x')f(x)\Big|_{x_{\min}}^{x_{\max}} - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx\theta(x - x')f'(x) \tag{1.8}$$

若 $x_{\max} < x'$，则右边两项均为 0。若 $x_{\min} > x'$, 则(1.8)式右边为

$$f(x_{\max}) - f(x_{\min}) - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx f'(x) = 0.$$

若 $x_{\max} > x' > x_{\min}$,(1.8)式右边为

$$f(x_{\max}) - \int_{x'}^{x_{\max}} dx f'(x) = f(x').$$

这三种积分结果和 $\delta(x - x')$ 的积分相同，命题得证。

练习 1.51 练习用矩阵表示证明算符的性质

只需证明 $\widehat{D}$ 的矩阵表示不是厄米矩阵，在坐标基矢下，

$$\langle x|\widehat{D}|x'\rangle \neq \left(\langle x'|\widehat{D}|x\rangle\right)^*$$

上式的左手边为 $\frac{d}{dx}\delta(x - x')$，右手边为

$$\left(\frac{d}{dx'}\delta(x' - x)\right)^* = \frac{d}{dx'}\delta(x'-x) = \frac{d(x' - x)}{dx'}\frac{d}{d(x' - x)}\delta(x'-x) = \frac{d}{d(x' - x)}\delta(x'-x) = \frac{dx}{d(x' - x)}\frac{d}{dx}\delta(x'-x) = \frac{d}{dx}\delta(x-x')$$

所以

$$\langle x|\widehat{D}|x'\rangle = -\left(\langle x'|\widehat{D}|x\rangle\right)^*,$$

说明 $\widehat{D}$ 为反厄米算符。

练习 1.52 熟悉 $\widehat{K}$ 算符的本征态和本征值

设 $\widehat{K}$ 的本征态为 $|\psi_k\rangle$, 相应的本征值为 k，即

$$\widehat{K}|\psi_k\rangle = k|\psi_k\rangle,$$

取坐标基底，

$$\begin{aligned}&\langle x|(-i)\widehat{D}\left(\int dx'|x'\rangle\langle x'|\right)|\psi_k\rangle = k\langle x|\psi_k\rangle\\ \Rightarrow&\int dx'\left(-i\delta(x-x')\frac{d}{dx'}\right)\psi_k(x') = k\psi_k(x)\\ \Rightarrow&\frac{d}{dx}\psi_k(x) = ik\psi_k(x)\\ \Rightarrow&\psi_k(x) = ce^{ikx}\end{aligned}$$

其中第二行中我们设 $\psi_k(x) = \langle x|\psi_k\rangle$，$c$ 为归一化常数。因为 $\widehat{K}$ 是厄米算符，其本征值 k 为实数。若取 $c = 1/\sqrt{2\pi}$，即有 $|\psi_k\rangle = |k\rangle$，其中 $|k\rangle$ 是 1.10 节中定义的 “波数” 基矢. 所以算符 $\widehat{K}$ 的本征态是 $|k\rangle$，对应的本征值是 k。

练习 1.53 熟悉 $\widehat{X}$ 算符

坐标基矢下矩阵表示的第 x' 行，第 x 列的矩阵元为

$$\langle x'|\widehat{X}|x\rangle = x\langle x'|x\rangle = x\delta(x-x').$$

练习 1.54 熟悉 $\widehat{X}$ 算符

波数基矢下矩阵表示的第 k' 行，第 k 列的矩阵元为

$$\begin{aligned}\langle k'|\widehat{X}|k\rangle &= \langle k'|\left(\int dx'|x'\rangle\langle x'|\right)\widehat{X}\left(\int dx|x\rangle\langle x|\right)|k\rangle\\ &= \int dx'\int dx\langle k'|x'\rangle\langle x'|\widehat{X}|x\rangle\langle x|k\rangle\\ &= \int dx'\int dx\frac{1}{2\pi}e^{ikx-ik'x'}x\delta(x'-x)\\ &= \int\frac{dx}{2\pi}xe^{-i(k'-k)x}\\ &= i\frac{d}{dk'}\int\frac{dx}{2\pi}e^{-i(k'-k)x}\\ &= i\frac{d}{dk'}\delta(k'-k) = -i\frac{d}{dk}\delta(k'-k)\end{aligned}$$

其中最后一行列出了两个常用的表达式。

练习 1.55 熟悉 $\widehat{X}$ 算符

在坐标基底下，$\widehat{X}$ 的矩阵元为

$$\langle x'|\widehat{X}|x\rangle = x\delta(x'-x)$$

满足

$$\langle x'|\widehat{X}|x\rangle = \left(\langle x|\widehat{X}|x'\rangle\right)^*,$$

所以 $\widehat{X}$ 为厄米算符。

练习 1.56 熟悉 $\widehat{X}$ 算符

在坐标基底下，

$$\langle x|g\rangle = \langle x|\widehat{X}|f\rangle = x\langle x|f\rangle \Rightarrow g(x) = x\times f(x).$$

练习 1.57 熟悉 $\widehat{X}$ 和 $\widehat{K}$ 算符，熟悉用矩阵表示进行算符运算

$$
\begin{aligned}
\langle x'|[\widehat{X},\widehat{K}]|x\rangle &= \langle x'|\widehat{X}\widehat{K}-\widehat{K}\widehat{X}|x\rangle \\
&= x'\langle x'|\widehat{K}|x\rangle - x\langle x'|\widehat{K}|x\rangle \\
&= (x'-x)\langle x'|\widehat{K}|x\rangle \\
&= (x'-x)\left(-i\frac{d}{dx'}\delta(x-x')\right) \\
&= -i\frac{d}{dx'}\left[(x'-x)\delta(x-x')\right] + i\delta(x-x')\frac{d}{dx'}(x'-x) \\
&= i\delta(x-x') \\
&= i\langle x'|x\rangle
\end{aligned}
$$

在第五行，我们用了分部积分。第五行的第一项等于 0，因为 $x\delta(x)=0$。比较第一行和最后一行，有

$$
[\widehat{X},\widehat{K}] = i\widehat{I}.
$$

练习 1.58 熟悉 $\widehat{X}$ 和 $\widehat{K}$ 算符，熟悉用矩阵表示进行算符运算

$$
\begin{aligned}
\langle k'|[\widehat{X},\widehat{K}]|k\rangle &= \langle k'|\widehat{X}\widehat{K}-\widehat{K}\widehat{X}|k\rangle \\
&= (k-k')\left(i\frac{d}{dk'}\delta(k'-k)\right) \\
&= i\frac{d}{dk'}\left[(k-k')\delta(k'-k)\right] - i\delta(k'-k)\frac{d}{dk'}(k-k') \\
&= i\delta(k'-k) \\
&= i\langle k'|k\rangle
\end{aligned}
$$

在第三行，我们用了分部积分。第三行的第一项等于 0，因为 $k\delta(k)=0$。比较第一行和最后一行，有

$$
[\widehat{X},\widehat{K}] = i\widehat{I}.
$$