内 容 提 要

本书共分十四章.第一章至第六章是实变函数的内容(上册),包括集合与点集、测度、可测函数与 Lebesgue 积分、Riemann-Stieltjes 积分和 Lebesgue-Stieltjes 积分等,并且对抽象测度和积分作了介绍;第七章至第十四章是泛函分析的内容(下册),包括距离空间与 Banach 空间、Hilbert 空间、线性算子与线性泛函、全连续算子、自共轭算子等,并且对抽象函数与 Banach 代数、凸锥理论、广义函数作了介绍.每章末尾附有相当数量的习题.

本书把以上内容分为基本的、非基本的两个方面.对基本内容写得较为细致详尽,特别注意做到深入浅出、直观易懂;对非基本内容,标题前加了 * 号,供选读.

本书可作为综合性大学和师范学院数学系《实变函数》、《泛函分析》两门课的教材或教学参考书,也可供数学爱好者自学这两门课之用.

第一版序

本书是根据我们在山东大学数学系多次讲授《实变函数》和《泛函分析》两门课的讲义合并、修改而成的. 全书共分十四章. 第一章至第六章是实变函数的内容,包括集合与点集、测度、可测函数与 Lebesgue 积分、有界变差函数与 Riemann-Stieltjes 积分等,其中以 Lebesgue 积分为重点;第七章至第十四章是泛函分析的内容,包括距离空间与 Banach 空间、Hilbert 空间、线性算子与线性泛函、全连续算子、自共轭算子等. 每章末尾附有相当数量的习题供选用.

据我们的实践,除去打 * 的内容外,实变函数部分可用 72 学时讲完,泛函分析部分可用 54 学时讲究。打 * 的内容包括抽象测度与抽象积分、抽象函数与 Banach 代数、凸锥理论、广义函数等,这些内容可以不讲或选讲或让优秀学生自学.

《实变函数》和《泛函分析》是数学系两门重要的专业基础课,它对于数学、计算数学、控制理论等专业都是必需的工具.《实变函数》课较之《数学分析》课,在观点和思想方法上有所飞跃,学生常感到困难. 因此,我们在编写过程中注意了贯彻由浅入深、由特殊到一般、仔细分析来龙去脉等符合认识规律的原则. 由于我们水平所限,书中错误和缺点在所难免,敬请广大读者批评指正.

郭大钧

1984 年 12 月于济南

第二版序

本书自 1986 年出版以来，一直作为山东大学数学系(院)《实变函数》和《泛函分析》两门大学生课的教材，至今已使用了近二十年. 现在的第二版基本上是第一版的重印，只对个别地方进行了修订. 在书的开头增加了“引言”部分，论述 Riemann 积分的局限性以及 Lebesgue 推广 Riemann 积分的思路. 作为附录，对数学家 Lebesgue 作了简介. 此外，为便于教学，我们将原书分为上下两册出版，上册是实变函数的内容(包括第一章至第六章)；下册是泛函分析的内容(包括第七章至第十四章).

本书再版过程中，得到山东大学数学与系统科学学院领导的大力支持，在此表示衷心的感谢. 第二版的出版，得到山东大学出版基金委员会的资助，特致谢意. 另外，庞常词、张晓燕、陈燕来三位博士对第二版打印稿进行了认真仔细的校阅，在此也表示感谢.

由于我们水平所限，书中错误和缺点在所难免，敬请读者批评指正.

郭大钧

2004 年 12 月 30 日

于山东大学南院

目　录

上册

目　录

下册

引　言

实变函数的中心内容是 Lebesgue(1875—1941)测度与积分理论，它是 Riemann(1826—1866)积分的推广与发展，创立于 20 世纪初期，为近代分析奠定了基础.

(一) 谈谈 Riemann 积分

众所周知，Riemann 积分理论是数学分析教程的主要内容之一，它对数学理论本身的发展，对其他科学技术的应用都产生极其深远的影响，然而随着科学技术的发展，Riemann 积分的缺陷逐渐显露出来，这是实变函数理论产生的源动力. 下面主要谈 Riemann 积分的局限性.

1. Riemann 积分的研究对象是“基本上”连续的函数

设 $f(x)$是定义在$[a,b]$上的有界函数. 作分划

$$T:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

并令 $$M_i = \sup\{f(x):x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},$$

$$m_i = \inf\{f(x):x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\overline{S_T}=\sum_{i=1}^{n}M_i(x_i-x_{i-1}),\quad \underline{S_T}=\sum_{i=1}^{n}m_i(x_i-x_{i-1}).$$

我们考虑 Darboux 上积分与下积分：

$$(\text{上})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\inf_T\overline{S_T},\quad (\text{下})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\sup_T\underline{S_T}.$$

如果这两个值相等，则称 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上是 Riemann 可积的，记其值为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 称它为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的 Riemann 积分.

若令 $\mathrm{d}(T)=\max\{x_i-x_{i-1}, i=1,2,\cdots,n\}$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的充分必要条件是：

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})=0. \qquad (0\cdot 1\cdot 1)$$

函数的可积性是与(0・1・1)等价的，由于(0・1・1)式涉及到两个因素：分割小区间长度(x_i-x_{i-1})以及函数在其上的振幅(M_i-m_i). 因此，为使(0・1・1)成立，粗略地说，就是在 $\mathrm{d}(T)\to 0$ 的过程中，其振幅(M_i-m_i)不能缩小的那些相应的子区间的长度的总和可以很小(Riemann 注意到，定义在$[a,b]$上的单调函数只能存在有限个点使函数在其上的振幅超过预先给定的值，从而是可积的).

由于函数振幅的大小与该函数的连续性有关，于是，条件(0・1・1)迫使函数的不连续点可用长度总和为任意小的区间所包围. 这就是说，可积函数必须是"基本上"连续的，对那些很不连续的函数在 Riemann 积分意义下是不可积的. 例如 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in[0,1]\backslash Q,\end{cases}$$

Q 为$[0,1]$中有理数点集，在$[0,1]$上不是(R)可积的. 这说明 R 可积函数的范围太窄.

2. 极限与积分次序交换时条件太苛刻

在数学分析中，我们经常遇到的一个重要问题是两种极限过程的交换问题，尤其是积分与函数列的极限的交换问题. 我们知道，在一般微积分教科书中，都是用函数列一致收敛的条件来保证极限运算与积分运算的次序可以交换，不过，这一条件是太苛刻了.

例 0・1 $f_n(x)=x^n \quad (0\leqslant x\leqslant 1)$. 它是点收敛不是一致收敛于

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1\end{cases}$$

的，但仍有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Riemann 积分有界收敛定理：设

(i) $f_n(x)\quad (n = 1,2,\cdots)$ 是定义在$[a,b]$上的可积函数；

(ii) $|f_n(x)| \leqslant M\quad (n = 1,2,\cdots, x\in[a,b])$；

(iii) $f(x)$ 是定义在$[a,b]$上的可积函数，且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), x\in[a,b],$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这里，不仅受于条件(ii)的限制，而且还必须假定极限函数 $f(x)$ 的可积性. 例 0·2 表明，即使函数列是渐升的也不能保证其极限函数的可积性.

例 0·2 设$\{r_n\}$是$[0,1]$中全体有理数列，作函数列

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x = r_1, r_2, \cdots, r_n, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \qquad n = 1,2,\cdots$$

显然有

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \cdots \leqslant 1,$$

且有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}. \end{cases}$$

这里，每个 $f_n(x)$ 皆是$[0,1]$上 Riemann 可积函数且积分值为零，故有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

但极限函数 $f(x)$ 不是 Riemann 可积的，这是因为

$$(\text{上})\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1,\quad (\text{下})\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

从而也谈不上积分号下取极限的问题.

有界收敛定理看起来也有点使人惊异，因为我们不难证明，若有定义在 $[a,b]$ 上的可积函数列 $\{f_n(x)\}$，$\{g_n(x)\}$ 满足 $|f_n(x)|\leqslant M$，$|g_n(x)|\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$，且有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\lim_{n\to\infty}g_n(x)=f(x),$$

则必有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x,$$

但 $f(x)$ 之积分仍然可以不存在. 然而，上述积分之极限并不依赖于本身，而依赖于 $f(x)$. 既然如此，不妨定义其积分为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

这说明 Riemann 积分的定义太窄了.

3. 微积分基本定理的应用受到限制

微积分基本定理是微积分学的中枢：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可微函数且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的，则有

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a),\ x\in[a,b].$$

显然，为使这一微积分基本定理成立，$f'(x)$ 必须是 (R) 可积的. 但是，可微函数的导数未必可积. 例如

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\in(0,1],\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$f'(x)$ 是无界函数，当然不可积. 其实，早在 1881 年，Volterra(1860 ~ 1940) 就作出了一个可微函数，其导函数是有界的，但导函数不是 Riemann 可积的. 这就大大限制了微积分基本定理的应用范围.

4. (R) 可积函数空间 R([a,b]) 不完备性

Riemann 积分的另一局限性还表现在可积函数空间的不完备性，我们知道，在积分理论中，函数类用距离

$$\rho(f,g)=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\left(\text{或 } \rho(f,g)=\left\{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x\right\}^{1/2} \text{ 等}\right)$$

作成距离空间是完备的这一事实具有重要意义. 近代泛函分析中的许多基本技巧往往最终要用到空间的完备性.

例 0·3 记 $R([0,1])$ 为 $[0,1]$ 上 Riemann 可积函数的全体. 引进距离

$$\rho(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x, f,g\in \mathrm{R}([0,1])$$

(其中认定当 $\rho(f,g)=0$ 时, f 与 g 是同一元). 我们说 $R([0,1])$ 不是完备的意思, 是指当 $f_n\in R([0,1])(n=1,2,\cdots)$ 且满足

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho(f_n,f_m)=0$$

时, 并不一定存在 $f\in R([0,1])$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}\rho(f_n,f)=0.$$

可以证明: $R([0,1])$ 不是完备的. 事实上, 令 $\{r_n\}$ 是 $(0,1)$ 中有理数的全体, 设 I_n 是 $[0,1]$ 中的开区间, $r_n\in I_n$, $|I_n|<1/2^n(n=1,2,\cdots)$, 并作函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\end{cases}$$

和函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in\bigcup_{k=1}^{n} I_k,\\ 0, & x\in[0,1]\setminus\bigcup_{k=1}^{n} I_k,\end{cases}$$

则 $f_n(x)\in R([0,1])$, 且有

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\rho(f_n,f_m)=0, \text{以及 } f_n(x)\to f(x)(n\to\infty),$$

但 $f(x)$ 在$[0,1]\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ 上是不连续的，它不是 Riemann 可积的，且不存在 Riemann 可积函数 $g(x)$，使得 $\rho(f,g)=0$，即不存在 $g\in R([0,1])$，使$\rho(f_n,g)\to 0$. 故$R([0,1])$按上述距离ρ是不完备的.

(二) Lebesgue 积分思想简介

对于定义在$[a,b]$上的函数，为使 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，按照 Riemann 的积分思想，必须使得在划分$[a,b]$后，$f(x)$ 在多数小区间 Δx_i 上的振幅足够小，这迫使具有较多激烈振荡的函数被排除在可积函数类外. 对此，Lebesgue 提出，不从分割区间入手，而是从分割函数值域着手，即给 $\delta>0$，作划分

$$m=y_0<y_1<\cdots<y_{i-1}<y_i<\cdots<y_n=M,$$

其中，$y_i-y_{i-1}<\delta$，m，M是$f(x)$在$[a,b]$上的下界与上界. 并作集

$$E_i=\{x\,|\,y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\},i=1,2,\cdots,n.$$

这样，在 E_i 上，$f(x)$ 的振幅就不会大于 δ. 再计算$|I_i|=$“矩形面积”$=$“高”$y_{i-1}\times$“底边长度”$|E_i|$，并作和

$$\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}|E_i|=\sum_{i=1}^{n}|I_i|.$$

它是 $f(x)$ 在$[a,b]$上积分(面积)的近似值. 然后，让 $\delta\to 0$，且定义

$$\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}|E_i|.$$

(如果此极限存在) 也就是说，采取在 y 轴上的划分来限制函数值变动的振幅，即按函数值的大小先加以归类. Lebesgue 对这一设计作了生动的譬喻，大意如下：假定我欠人家许多钱，现在要归还. 此时，应先按照钞票的票面值的大小分类，再计算每一类的面额总

值，然后相加，这就是我的积分思想；如果不管面值大小如何，而是按某种先后次序（如顺手递出）来计算总数，那就是 Riemann 积分的思想.

当然，按照 Lebesgue 积分构思，会带来一系列的新问题. 首先，分割函数值范围后，所得的点集

$$E_i = \{x \mid y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i\}, i = 1,2,\cdots,n.$$

不一定是一个区间，也不一定是互不相交的有限个区间的并，而可能是一个分散而杂乱无章的点集及其并集. 因此，所谓"底边长度"$|E_i|$的说法是不清楚的，即如何度量其"长度"均成问题. 这促使 Lebesgue 去寻找一种测量一般点集"长度"的方案，并称点集 E 的"长度"为测度，记为 $m(E)$. 当然，这一方案必须满足一定的条件，才符合常理. 如 $E = [0,1]$ 时，应有

$$m(E) = m([0,1]) = 1;$$

又如 $E_1 \subset E_2$，应满足

$$m(E_1) \leqslant m(E_2);$$

特别是对 $E_n(n = 1,2,\cdots)$ 且 $E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$ 时，希望有

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

然而，这些限制使人们无法设计出一种测量方案，能使一切点集都有度量. 因此，欲使 Lebesgue 积分思想得以实现，必要求分割点集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是可测量的——可测集. 这一要求能否达到，与所给函数 $y = f(x)$ 的性质有关. 从而规定：凡是对任意 $a \in R^1$，点集

$$E = \{x \mid f(x) > a\}$$

均为可测集时，称 $f(x)$ 为可测函数. 这就是说，积分的对象必须属于可测函数范围.

注 Lebesgue 积分论仍有其不足之处，例如，在 Lebesgue 积分的意义下，广义积分 $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ 是不存在的，等等.

第一章　集　合

集合论创始自德国数学家Cantor,从19世纪末叶逐渐发展到今天,它不仅成为数学的一个分支,而且是全部数学的基础.本章讲述集合论的初步知识,作为实变函数论的基础.

§1·1　集合·集合的运算

1·1·1　集合

集合是数学中的一个基本概念,要把这个概念加以严格的规定并不是一件容易的事情.正像几何学中"点"、"直线"、"平面"一样,"集合"这个概念必须用若干公理组成的公理系来规定.目前,对"集合"这个概念有两种不同的规定,一种是Zermelo等人作出的ZFC公理系,另一种是Bernays等人作出的BNG公理系.这里不准备纠缠"集合"这个概念的严格规定,而只给出如下朴素的说法:一定范围内的所有个体事物,当把它们看作一个整体时,这个整体称为一个**集合**(或**集**),而其中的每一个个体事物称为这个集合的**元素**(或**元**).一个集合的各个元素必须是彼此相异的;哪些个体事物是给定集合的元素必须是确定无疑的.下面我们举出集合的几个例子.

例1·1·1　自然数的全体(称为**自然数集**,通常记作N).

例1·1·2　实数的全体(称为**实数集**,即R^1).

例1·1·3　小于1的正数的全体(即开区间(0,1)).

例 1·1·4　英文字母的全体.

本书常用大写字母 A,B,X,Y 等表示集合,用小写字母 a,b,x,y 等表示集合的元素. a 是集合 A 的元素记作 $a\in A$,读作 a 属于 A;a 不是集合 A 的元素记作 $a\,\overline{\in}\,A$ 或 $a\notin A$,读作 a 不属于 A.

如果集合 A 是具有某性质 P 的个体事物的全体,我们往往用下面的形式来表示 A:

$$A=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如 $\{x\mid x=\sqrt{r},\ r\geqslant 0,\ r$ 为有理数$\}$(其中的逗号"," 意为"并且") 即非负有理数的算术平方根的全体,它还可以写成 $\{\sqrt{r}\mid r\geqslant 0,\ r$ 是有理数$\}$. 如果能明确的写出集合 A 的所有元素,也可以把所有元素列举在大括号里来表示 A. 例如 $\{x\mid x^2-1=0\}$ 还可表示成 $\{-1,1\}$. 再如自然数集 $\mathbf{N}$ 可表示成 $\{1,2,3,\cdots\}$.

为了讨论问题方便,我们还引入不含任何元素的集,称为**空集**,记作 $\varnothing$,例如 $\{x\mid x>1,\ x<0\}$ 就是空集. 空集 $\varnothing$ 以及具有 n(n 为自然数) 个元素的集统称为**有限集**. 只具有一个元素的有限集称为**单元素集**,只具有元素 a 的单元素集可记作 $\{a\}$,但不能记作 a,不是有限集的集统称为**无限集**.

若属于集 A 的元素都属于集 B,就称 A 是 B 的**子集**,记作 $A\subset B$,读作 A 包含于 B,或记作 $B\supset A$,读作 B 包含 A. 我们认为空集 $\varnothing$ 是任何集的子集. 若 $A\subset B$,而 B 中确有元素不属于 A,就称 A 是 B 的**真子集**.

若属于集 A 的元素都属于集 B,属于集 B 的元素也都属于集 A,即 A,B 由相同的元素组成,就称 A **与** B **相等**,记作 $A=B$ 或 $B=A$. A 与 B 不相等记作 $A\neq B$ 或 $B\neq A$.

命题 1　对任何集 A,B,C,均有

(i) $A\subset A$;(反身性)

(ii) 若 $A\subset B$,$B\subset A$,则 $A=B$;(反对称性)

(iii) 若 $A\subset B$,$B\subset C$,则 $A\subset C$.(传递性)

要特别注意：一个集合的元素与此集合间只能有关系“$\in$”，不能有关系“$\subset$”；一个集合的子集与此集合间只能有关系“$\subset$”，不能有关系“$\in$”. 例如，$a \in A$不能写成$a \subset A$，而$\{a\} \subset A$不能写成$\{a\} \in A$，否则将造成混乱.

1·1·2　集合的运算

从给定的一些集出发，我们可以通过所谓“集合的运算”作出新的集，最常用的集运算有“并”、“交”、“差”三种.

定义 1　设 A,B 是两个集，A 中的所有元素及 B 中的所有元素合起来所组成的集称为 A 与 B 的**并集**或 A 与 B 的**并**，记作 $A \cup B$ 或 $A+B$(图 1·1·1). 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

同时属于 A 与 B 两者的所有元素所组成的集称为 A 与 B 的**交集**或 A 与 B 的**交**，记作 $A \cap B$ 或 AB(图 1·1·2). 即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

当 $A \cap B \neq \varnothing$ 时称 A 与 B **相交**；当 $A \cap B = \varnothing$ 时称 A 与 B **无交**.

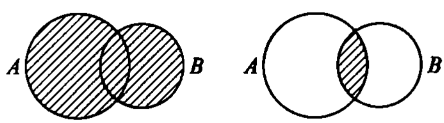

图 1·1·1　$A \cup B$　图 1·1·2　$A \cap B$

例 1·1·5　设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,4\}$，则 $A \cup B=\{1,2,3,4\}$(注意，不要写作 $A \cup B=\{1,2,3,3,4\}$)，$A \cap B=\{3\}$(注意，不能写作 $A \cap B=3$).

定理 1

(i) $A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.(交换律)

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.(结合律)

(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).\text{（分配律）}$$

(iv) $A \cup A = A$; $A \cap A = A$.（幂等律）

这些关系式从图形上来看是明显的.图形能够帮助我们理解和思考,但图形的观察毕竟不能代替关系式的证明.

证明　仅证(iii)的第一式

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

设 $x \in A \cap (B \cup C)$,则 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$.

从而 $x \in B$ 或 $x \in C$.不妨设 $x \in B$.

于是 $x \in A \cap B$,更有 $x \in (A \cap B) \cup (B \cap C)$.

设 $x \in (A \cap B) \cup (B \cap C)$,则 $x \in A \cap B$ 或 $x \in B \cap C$.

不妨设 $x \in A \cap B$,则 $x \in A$ 且 $x \in B$,从而 $x \in B \cup C$,

于是 $x \in A \cap (B \cup C)$.

由以上两个方面,(iii)的第一式得证. ▌

设 I 是一个非空集合,若相应于 I 的每个元 α 我们都给定了一个集 A_α(对不同的 α,相应的 A_α 可能相同),这样便给定了一族集,这族集通常记作 $A_\alpha, \alpha \in I$,称为**以 I 为标号集的一族集**(I 的元 α 称为集 A_α 的标号),当把其看作一个整体时称为**以 I 为标号集的一个集族**,通常记作 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$(当标号集 I 不说自明时也可简记作 $\{A_\alpha\}$).

若 $I = \mathbf{N} = \{1,2,3,\cdots\}$,这时 $A_\alpha, \alpha \in I$ 即一列集 $A_1, A_2, A_3, \cdots$(也可记作 $A_i, i = 1,2,3,\cdots$),当把其看作一个整体时称为一个**集列**或一个**集串**,记作 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ 或 $\{A_i\}_1^{\infty}$(有时简记作 $\{A_i\}$).

若 $I = \{1,2,\cdots,n\}$,这时 $A_\alpha, \alpha \in I$ 即 n 个集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$(也可记作 $A_i, i = 1,2,\cdots,n$),当把其看作一个整体时记作 $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ 或 $\{A_i\}_1^n$(有时简记作 $\{A_i\}$).

定义 2　设 $A_\alpha, \alpha \in I$ 是任意一族集,一切 $A_\alpha(\alpha \in I)$ 中的所有元素合起来所组成的集称为这族集的**并集**或**并**,记作 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$ 或

$\sum\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$. 即

$$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{存在某个}\,\alpha\in I\,\text{使}\,x\in A_\alpha\}.$$

同时属于每个集 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的所有元素所组成的集称为这族集的**交集**或**交**,记作 $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 或 $\prod\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$. 即

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x\mid \text{对每个}\,\alpha\in I\,\text{都有}\,x\in A_\alpha\}.$$

当标号集 I 不说自明时,$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 可简记作 $\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$,类似地有 $\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha$,$\sum\limits_{\alpha}A$,$\prod\limits_{\alpha}A_\alpha$.

当 $I=\mathrm{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 时,$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 又可写作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$,这个运算通常称为"可列并"运算.

当 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 时,$\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 又可写作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,这个运算通常称为"有限并"运算.

类似地可以定义"可列交"运算 $\bigcap\limits_{i=i}^{\infty}A_i=A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots$,以及"有限交"运算,$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$.

"一列集 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$"有时简写成"一列集 A_i 的并 $\bigcup\limits_{i}A_i$",

"n 个集 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$"有时简写成"$n$ 个集 A_i 的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$",如此等等.

例 1·1·6 $\quad\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\left\{x\ \middle|\ \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1-\dfrac{1}{n}\right\}=\{x\mid 0<x<1\}$.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x\ \middle|\ -\frac{1}{n}<x<1+\frac{1}{n}\right\}=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

例 1·1·7 相应于开区间 $(0,1)$ 中的每一点 α,作开区间 $A_\alpha=(\alpha-1,\alpha+1)$,则 $\bigcup\limits_{\alpha\in(0,1)}A_\alpha=(-1,2)$,$\bigcap\limits_{\alpha\in(0,1)}A_\alpha=[0,1]$.

定理 2

(i) 若相应于每个 $\alpha \in I$ 均有 $A_\alpha \subset B_\alpha$，则

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha,\ \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \subset \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha,$$

(ii) $\bigcup_{\alpha\in I,\beta\in J} A_\alpha^\beta = \bigcup_{\alpha\in I}\bigcup_{\beta\in J} A_\alpha^\beta$；

$$\bigcap_{\alpha\in I,\beta\in J} A_\alpha^\beta = \bigcap_{\alpha\in I}\bigcap_{\beta\in J} A_\alpha^\beta.$$

(iii) $A \cap (\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha\in I} (A \cap B_\alpha)$；

$$A \cup (\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in I} (A \cup B_\alpha).$$

注　$\bigcup_{\alpha\in \mathrm{N},\beta\in \mathrm{N}}$ 通常写作 $\bigcup_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$；$\bigcap_{\alpha\in \mathrm{N},\beta\in \mathrm{N}}$ 通常写作 $\bigcap_{\alpha,\beta=1}^{\infty}$.

定义 3　设 $\{A_n\}_1^\infty$ 是一个集列.

(i) 若 $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ 就称 $\{A_n\}_1^\infty$ 是**渐张集列**，记作 $A_n \uparrow$，并且称 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是**渐张集列** $\{A_n\}_1^\infty$ **的极限**，记作 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$，或 $A_n \uparrow A$.

(ii) 若 $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ 就称 $\{A_n\}_1^\infty$ 是**渐缩集列**，记作 $A_n \downarrow$，并且称 $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 是**渐缩集列** $\{A_n\}_1^\infty$ **的极限**，记作 $\lim_{n\to\infty} A_n = A$，或 $A_n \downarrow A$.

例 1·1·8　设 $A_n = [-n,n]$，$B_n = (n,+\infty)(n = 1,2,\cdots)$，则

$$A_n \uparrow R^1,\qquad B_n \downarrow \varnothing.$$

定义 4　设 A，B 是两个集，由属于 A 而不属于 B 的所有元素所组成的集称为集 A 减去集 B 的**差集**或**差**，记作 $A\backslash B$ 或 $A-B$(图 1·1·3). 即

$$A\backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \overline{\in} B\}.$$

当 $A \supset B$ 时，差集 $A\backslash B$ 称为 B 对于 A 的**余集**或**余**，记作 $\mathscr{C}_A B$ (图 1·1·4).

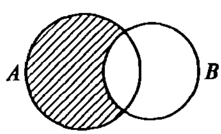

图 1·1·3　A\B

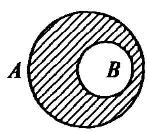

图 1·1·4　$\mathscr{C}_A B$

例 1·1·9 $\{1,2,3\}\backslash\{2,3,4\}=\{1\}$.

当我们讨论某方面问题时，往往所涉及的一切集都是某个取定的集 X 的子集，这时便称 X 是**基本集**或**空间**. 例如，当我们仅限于讨论直线上点的集合时，直线就是基本集. 如果已明确 X 是基本集，集 A 对于 X 的余集 $\mathscr{C}_x A$ 可以简单的说成集 A 的余集，简单的记作 $\mathscr{C}A$.

定理 3 设 X 是基本集，则

(i) $\mathscr{C}X=\varnothing$; $\mathscr{C}\varnothing=X$;

(ii) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$;

(iii) 当 $A\subset B$ 时 $\mathscr{C}A\supset\mathscr{C}B$.

定理 4 (De Morgan 公式) 设 X 是基本集，则

(i) $\mathscr{C}(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcap\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$;

(ii) $\mathscr{C}(\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha)=\bigcup\limits_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha$.

证明 仅证(ii). 下面的符号“$\Rightarrow$”表示由它前面的断语可推出它后面的断语.

$$x\in\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha)\Rightarrow x\,\bar{\in}\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\Rightarrow \text{有某个 }\alpha_0\in I\text{，使 }x\,\bar{\in}\,A_{\alpha_0}$$
$$\Rightarrow x\in\mathscr{C}A_{\alpha_0}\Rightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha.$$

$$x\in\bigcup_{\alpha\in I}\mathscr{C}A_\alpha\Rightarrow \text{有某个 }\alpha_0\in I\text{，使 }x\in\mathscr{C}A_{\alpha_0}\Rightarrow x\,\bar{\in}\,A_{\alpha_0}$$
$$\Rightarrow x\,\bar{\in}\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha A_{\alpha_0}\Rightarrow x\in\mathscr{C}(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha).$$

由以上两个方面，(ii) 得证. ▌

De Morgan 公式是一个很有用的结论，它使我们能通过“余”运算把并变为交、把交变为并.

定理 5

(i) $A\backslash B=A\cap\mathscr{C}B$.

(ii) $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$.

证明 仅证(ii). 前面的证明都是直接根据定义，这里我们换

一个方法.

$$A\cap(B\backslash C)=A\cap(B\cap\mathscr{C}C)=A\cap B\cap\mathscr{C}C.$$

$$\begin{aligned}(A\cap B)\backslash(A\cap C)&=(A\cap B)\cap\mathscr{C}(A\cap C)\\&=(A\cap B)\cap(\mathscr{C}A\cup\mathscr{C}C)\\&=(A\cap B\cap\mathscr{C}A)\cup(A\cap B\cap\mathscr{C}C)\\&=\varnothing\cup(A\cap B\cap\mathscr{C}C)=A\cap B\cap\mathscr{C}C.\end{aligned}$$

所以 $A\cap(B\backslash C)=(A\cap B)\backslash(A\cap C)$. ▌

对于集合的"差"运算,要特别注意实、复数减法运算的许多性质并不适用于它. 例如,$(A\backslash B)\cup B$ 未必等于 A,$(A\cup B)\backslash B$ 未必等于 A,移项变号的规则不再适用.

§1·2　映射·集合的对等

1·2·1　映射

定义 1　设 A,B 是两个集合,A 非空集. 若依照规则 f,对于 A 中的每个元 x,在 B 中都有唯一确定的元 y 与之对应,就称 f 是 A 到 B 的**映射**,记作 $f:A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$,而与 x 对应的元 y 称为 x(在映射 f 下)的**象**,记作 $f(x)$. 集合 A 称为映射 f 的**定义域**,集合 $\{f(x)\mid x\in A\}$ 称为映射 f 的**值域**. 若 E 是 A 的子集,则 $\{f(x)\mid x\in E\}$ 称为 E(在映射 f 下)的**象集**,记作 $f(E)$.

定义 2　若映射 $f:A\to B$ 的值域 $f(A)$ 恰等于 B,就说 f 是**满射的**. 若映射 $f:A\to B$ 使每个 $y\in f(A)$ 仅有唯一的 $x\in A$ 满足 $f(x)=y$,就说 f 是**单射的**. 若映射 $f:A\to B$ 既是满射的又是单射的,就称 f 是 A 到 B 的**一一映射**("一一映射"有时还说成"一一对应"),记作 $f:A\xrightarrow[1-1]{}B$ 或 $A\xrightarrow[1-1]{f}B$.

设 f 是 A 到 B 的一一映射,则对每个 $y\in B$ 有唯一 $x\in A$ 使

$f(x)=y$,定义 $g(y)=x$(当 $f(x)=y$ 时),则 g 是 B 到 A 的一一映射,我们称 g 是 f 的**逆映射**,记作 f^{-1}.

定义 3 设 f,g 分别是 F,G 到 B 的映射,若 $F\subset G$ 且对每个 $x\in F$ 都有 $f(x)=g(x)$,即映射 g 在 F 上与映射 f 一致,就称映射 g 是 f 在 G 上的一个**扩张**,而称映射 f 是 g 在 F 上的**限制**,记作 $f=g|_F$.("g 在 F 上的限制是 f"有时还说成"g 在 F 上是 f"或"F 上的 g 是 f". $g|_F: F\to B$ 有时还记成 $g: F\to B$ 或 $F\xrightarrow{g}B$.)

例 1·2·1 设 $f:[0,+\infty)\to R^1$, $f(x)=x^2$. 又设 $g: R^1\to R^1$, $g(x)=x^2$. f 与 g 是两个不同的映射(因为它们的定义域不同),g 是 f 在 R^1 上的一个扩张,而 f 是 g 在 $[0,+\infty)$ 上的限制.

1·2·2 集合的对等

定义 4 设 A,B 是两个集,若存在着 A 到 B 的某个一一映射,就称 A 与 B **对等**,记作 $A\sim B$.

我们规定空集 $\varnothing$ 与空集 $\varnothing$ 对等. 为了讨论对等问题方便,我们不妨假设:$\varnothing$ 到 $\varnothing$ 存在着一个一一映射,任何映射 $f: A\to B$ 限制在 $\varnothing$ 上便成为此一一映射.

例 1·2·2 设 $\mathrm{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $\mathrm{N_e}=\{2,4,\cdots,2n,\cdots\}$,则 $\mathrm{N}\sim\mathrm{N_e}$.

证明 定义 $f(n)=2n\,(n\in\mathrm{N})$,显然 f 是 N 到 $\mathrm{N_e}$ 的一一映射. ▌

例 1·2·2 揭示出一个极其重要的事实,就是无限集是有可能与它的真子集对等的,我们于 §1·3 还将证明任何一个无限集必然与它的一个真子集对等. 这对于有限集来说,显然是永远办不到的.

例 1·2·3 $R^1\sim(0,1)$.

证明 定义 $f(x)=\dfrac{1}{\pi}\arctan x+\dfrac{1}{2}\,(x\in R^1)$,显然 f 是 R^1 到 $(0,1)$ 的一一映射. ▌

命题 1 对等关系有如下性质:

(i) $A\sim A$;(反身性)

(ii) 若 $A\sim B$,则 $B\sim A$;(对称性)

(iii) 若 $A \sim B, B \sim C$,则 $A \sim C$.(传递性)

命题 2　设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两无交的一列集,$B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 是两两无交的一列集.若 $A_n \sim B_n (n = 1,2,\cdots)$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n, \qquad \bigcup_{n=1}^{m} A_n \sim \bigcup_{n=1}^{m} B_n (m = 1,2,\cdots).$$

证明　$A_n \sim B_n$,故存在一一映射 $f_n: A_n \to B_n$.

作映射 f:对每个 $x \in A_n$,令

$$f(x) = f_n(x), n = 1,2,\cdots$$

显然 f 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 到 $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 的一一映射,并且把 f 限制在 $\bigcup_{n=1}^{m} A_n$ 上是 $\bigcup_{n=1}^{m} A_n$ 到 $\bigcup_{n=1}^{m} B_n$ 的一一映射.命题 2 得证. ▌

例 1·2·4　$(0,1) \sim [0,1]$.

证明　设 $A = \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^4}, \cdots, \frac{1}{10^n}, \cdots\right\}$,

$$B = \left\{0, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \cdots, \frac{1}{10^{n-2}}, \cdots\right\}.$$

作 A 到 B 的映射 f,使

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{10^2}\right) = 1,$$

$$f\left(\frac{1}{10^n}\right) = \frac{1}{10^{n-2}}, \quad n = 3,4,5,\cdots$$

显然 $A \xrightarrow[1-1]{f} B$. 又 $(0,1) \backslash A = [0,1] \backslash B$,

故 $(0,1) \backslash A \sim [0,1] \backslash B$.

由命题 2 便知 $(0,1) \sim [0,1]$. ▌

定理 1　(Bernstein 定理)设 A 与 B 的子集 B_0 对等,且 B 与 A 的子集 A_0 对等,则 A 与 B 对等.

证明　由 $A \sim B_0$ 知可找到一个 f 使 $A \xrightarrow[1-1]{f} B_0$. 由 $B \sim A_0$ 知

可找到一个 g 使 $B \xrightarrow[1-1]{g} A_0$(图 1・2・1).

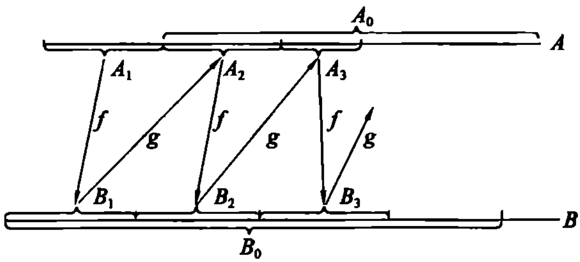

图 1・2・1

令 $\quad A \setminus A_0 = A_1, \qquad f(A_1) = B_1,$

$\qquad g(B_1) = A_2, \qquad f(A_2) = B_2,$

$\qquad g(B_2) = A_3, \qquad f(A_3) = B_3,$

$\qquad \cdots\cdots$

由 $g(B) = A_0$ 知 $A_2 = g(B_1) \subset A_0$,而 $A_1 = A \setminus A_0$,故 A_1, A_2 无交,从而 A_1, A_2 在 f 下的象集 B_1, B_2 无交,从而 B_1, B_2 在 g 下的象集 A_2, A_3 无交,由 A_2, A_3 均包含于 A_0 知 A_1 与 A_2, A_3 均无交,故 A_1, A_2, A_3 两两无交,从而 A_1, A_2, A_3 在 f 下的象集 B_1, B_2, B_3 两两无交,这样一直递推下去,便知 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 两两无交,并且 $B_1, B_2, B_3, \cdots$ 也两两无交.

显然 $A_n \xrightarrow[1-1]{f} B_n (n = 1, 2, \cdots)$,从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \xrightarrow[1-1]{f} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{1・2・1}$$

另一方面 $B_n \xrightarrow[1-1]{g} A_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$,从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \xrightarrow[1-1]{g} \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n. \tag{1・2・2}$$

由于 $B \xrightarrow[1-1]{g} A_0$,结合式(1・2・2) 便知

$$B\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \xrightarrow[1-1]{g} A_0\setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n = A\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

于是

$$A\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \xrightarrow[1-1]{g^{-1}} B\setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \qquad (1\cdot 2\cdot 3)$$

由式(1・2・1)及式(1・2・3)便知

$$A \sim B. \blacksquare$$

系 1 若 $A \supset B \supset C, A \sim C$,则 $A \sim B \sim C$.

证明 $A \sim C$,故可找到 f 使 $A \xrightarrow[1-1]{f} C$. 而 $B \subset A$,故 $B \xrightarrow[1-1]{f} f(B), f(B) \subset C$. 即 B 与 C 的一个子集对等. 又 $C \subset B$,C 当然与 B 的一个子集对等. 由定理 1 便知 $B \sim C$. 从而 $A \sim B \sim C$. $\blacksquare$

Bernstein 定理及系 1 是证明集合对等的有力工具. 例如,根据系 1,可从例 1・2・3 立即推出例 1・2・4 所述的结论.

§1・3 可列集与不可列集・集合的基数

1・3・1 可列集与不可列集

定义 1 与自然数集 $\mathbf{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ 对等的集称为**可列集**或**可数集**.

显然一个集是可列集当且仅当它的所有元素可排成一个无穷序列.

可列集当然是无限集. 下面的定理说明不是可列集的无限集也是存在的.

定理 1 实数集 R^1 不是可列集.

证明 假设定理不真,即 R^1 是可列集,则可把 R^1 中的所有点排成一个无穷序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

在 R^1 中作一闭区间 I_1,使 $0<|I_1|<\frac{1}{2}$($|I_1|$表示 I_1 的长)且 $x_1 \overline{\in} I_1$,这当然是可以做到的. 还可以在 I_1 中作一闭区间 I_2 使 $0<|I_2|<\frac{1}{2^2}$ 且 $x_2 \overline{\in} I_2$. 同样可在 I_2 中作一闭区间 I_3 使 $0<|I_3|<\frac{1}{2^3}$ 且 $x_3 \overline{\in} I_3$,等等. 根据归纳法便可以作出一串闭区间 $\{I_n\}$,满足

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

$$0<|I_n|<\frac{1}{2^n}, x_n \overline{\in} I_n, (n=1,2,\cdots).$$

由闭区间套定理知存在一点 ξ 属于所有的 I_n,再由 $x_n \overline{\in} I_n$ 知 $\xi \neq x_n (n=1,2,\cdots)$,而 $R^1=\{x_1,x_2,\cdots\}$,故 $\xi \overline{\in} R^1$. 此与 ξ 是 R^1 中诸 I_n 的公共点相矛盾. 这就证明了 R^1 不是可列集. ▌

定义 2 不是可列集的无限集称为**不可列集**或**不可数集**.

命题 1 任何无限集均包含一个可列子集.

证明 设 M 是一个无限集. 从 M 中任取一个元素,记作 a_1. 因 M 是无限集,故 $M\setminus\{a_1\}$不空,从而又可从集 $M\setminus\{a_1\}$中取一个元素 a_2. 同样 $M\setminus\{a_1,a_2\}$不空,又可取 a_3. 如此等等. 由归纳法,我们便得到一列彼此相异的元素 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 它们组成的可列集是 M 的子集. ▌

命题 2 无限集必与它的一个真子集对等.

证明 设 M 是一个无限集. 由命题 1,可从 M 中取一个可列子集$\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$. 令

$$M_0=M\setminus\{a_1,a_2,a_3,\cdots\},$$

则

$$M=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}\cup M_0.$$

令

$$\hat{M}=\{a_2,a_3,\cdots\}\cup M_0,$$

则 $\hat{M}$ 是 M 的真子集. 作 M 到 $\hat{M}$ 的映射 f，使

$$f(a_n) = a_{n+1}, \quad n = 1,2,\cdots$$
$$f(x) = x, \quad \text{当 } x \in M_0 \text{ 时}.$$

显然 f 是 M 到 $\hat{M}$ 的一一映射，因此 $M \sim \hat{M}$. ▌

1·3·2　集合的基数

集合的基数理论是集合论中最重要的内容之一.

我们在§1曾说，空集（即具有0个元素的集）以及具有 n（n 为自然数）个元素的集统称有限集. 但是"具有 n（n 为自然数）个元素的集"又是什么意思呢？严格地说就是"与自然数集 $\mathrm{N} = \{1,2,3,\cdots\}$ 的截段 $\{1,2,\cdots,n\}$ 对等的集". 也就是说，把 N 的截段 $\{1,2,\cdots,n\}$ 作为标准集，与之对等的所有集合我们认为具有同样多个元素，用同一个符号"n"来表示，称这些集合都具有 n 个元素.

我们还可以把以上的原则用于无限集. 例如，把自然数集 N 作为标准集，与之对等的所有集合我们认为具有同样多个元素，用同一个符号"$\aleph_0$"（读作"阿列夫零"）来表示，称这些集合都具有 $\aleph_0$ 个元素. 再例如，与实数集 R^1 对等的所有集合，我们称其都具有 $\aleph$（读作"阿列夫"）个元素，等等.

我们把所有的集合按如下原则划分成若干类：对每个集合 A，把与 A 对等的所有集合作为一类（不与 A 对等的集合不属于这一类）. 这样便得到许许多多不同的类，由对等关系的反身性、对称性及传递性容易看出，任何一个集合必然属于某一类，并且任何一个集合决不会同时属于不同的两类.

对于以上的分类，同一类中的各集合我们认为具有同样多个元素，而不属于同一类的两集合则认为不具有同样多个元素，对每一类集合我们规定一个专用符号（不同的两类集合规定不同的符号），我们说这一类中的每个集合都具有"此符号所表示的那么多"个元素，并且称此符号是这一类中每个集合的**基数**. 集合的基数有

时也称为集合的**势**或集合的**蕴度**.

具有 n(n 为自然数)个元素的集的基数就记作 n. 空集 $\varnothing$ 的基数记作 0. 可列集的基数通常记作 $\aleph_0$，还往往用 a 表示. 与实数集 R^1 对等的集的基数又称为**连续基数**或**连续势**，通常记作 $\aleph$，还往往用 c 表示. 在 §5·4 我们将说明，诸无限集所具有的基数远非仅仅 a 与 c.

集合 A 与集合 B 具有相同的基数又可以说成**A 的基数等于 B 的基数**，记作 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ (“$\overline{\overline{A}}$”是“A 的基数”的简写).

命题 3 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 的充要条件是 A 与 B 对等.

1·3·3 基数的大小

设 A,B 是两个有限集，若 A 与 B 不对等而 A 与 B 的某个子集对等，显然 A 所具有的元素的个数小于 B 所具有的元素的个数.

定义 3 设 A、B 是两个集，若 A 与 B 不对等而 A 与 B 的某个子集对等，就称**A 的基数小于 B 的基数**，记作 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$，或称 **$B$ 的基数大于 A 的基数**，记作 $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$.

设 A 是具有 n(n 为自然数)个元素的集，B 是可列集，C 是具有连续势的集，显然 $\overline{\overline{\varnothing}}$，$\overline{\overline{A}}$，$\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{C}}$ 中的每一个都小于它后面的任一个，即基数

$$0, n, a, c$$

是从小到大排列的.

要特别注意，对两个集合 A,B，若仅知道 A 与 B 的某个真子集对等，不能断定 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$，因为这时仍有可能 A 与 B 也对等. 例如任意一个无限集 M 都必然与 M 的一个真子集对等，而 M 与 M 自身也对等.

命题 4　$\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ 的充要条件是 A 与 B 的某个子集对等.

证明　由命题 3 及定义 3 立即得证. ▌

我们自然要问：对任意两个集合 A,B，在 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 三式中是否必有一式且仅有一式成立呢?答案是肯定的.

定理 2　设 A,B 是任意两个集，则下列三式

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}},\ \overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$$

(i) 至少有一式成立；

(ii) 至多有一式成立.

定理 2 结论(i) 的证明涉及 Zermelo 选取公理等较多的知识，我们就不介绍了(读者可参见[1]《实变函数论》第十四章 §7). 下面仅证定理 2 的结论(ii).

证明　若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ 成立，则 $A \sim B$，由定义 3 知 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 均不成立. 再证 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 不能同时成立.

假设 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 同时成立，由定义 3 知：A 必与 B 的某个子集对等，B 必与 A 的某个子集对等，再由 Bernstein 定理知 $A \sim B$，而这时 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 均不成立，与假设矛盾. 可见 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}} > \overline{\overline{B}}$ 不能同时成立. 定理 2 的结论(ii) 得证. ▌

定理 3　若 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}}$，则 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{C}}$.

证明　$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 故存在 f 及 B_0 使 $A \xrightarrow[1-1]{f} B_0 \subset B$. $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}}$，

故存在 g 及 C_0 使 $B \xrightarrow[1-1]{g} C_0 \subset C$,从而 $B_0 \xrightarrow[1-1]{g} g(B_0) \subset C$.

于是 $A \sim g(B_0) \subset C$, $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{C}}$.

再证 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ 不成立.

假若 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$,则由 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ 知 $\overline{\overline{C}} < \overline{\overline{B}}$,从而由定理 2 知:$\overline{\overline{C}} > \overline{\overline{B}}$ 不再成立.这与题设 $\overline{\overline{B}} < \overline{\overline{C}}$ 相矛盾.可见 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ 不成立.所以 $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{C}}$. ▌

显然,在所有的集合中空集 $\varnothing$ 的基数 0 最小,在所有的无限集合中可列集的基数 a 最小.不可列集即基数大于 a 的集.基数为 c 的集是不可列集,诸不可列集所具有的基数除 c 外还有很多别的(见 §5·4).

§1·4 可列集的判定

定理 1 可列集的子集是有限集或可列集.

证明 设 $\hat{A}$ 是可列集 $\hat{A}$ 的子集.若 $\hat{A}$ 不是有限集,则由 §3 命题 1 知 A 包含一个可列子集,再由 Bernstein 定理的系便知 $\hat{A}$ 是可列集. ▌

定理 2 设 $A_i(i=1,2,\cdots)$ 是可列集,且 $A_i \cap A_j = \varnothing(i \neq j)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列集.

证明 一个集合为可列集的充要条件是它的所有元素可以排成一个无穷序列.因此我们可以设

$$A_1 = \{a_1^1, \quad a_2^1, \quad a_3^1, \quad a_4^1, \quad \cdots\},$$

$$\swarrow \qquad \swarrow \qquad \swarrow \qquad \swarrow$$

$$
\begin{array}{l}
A_2 = \{a_1^2, \quad a_2^2, \quad a_3^2, \quad a_4^2, \quad \cdots\}, \\
\qquad\qquad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\
A_3 = \{a_1^3, \quad a_2^3, \quad a_3^3, \quad a_4^3, \quad \cdots\}, \\
\qquad\qquad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \\
A_4 = \{a_1^4, \quad a_2^4, \quad a_3^4, \quad a_4^4, \quad \cdots\}, \\
\cdots\cdots
\end{array}
$$

对元素 a_q^p 我们把 $p+q$ 称为它的和标. 显然 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 的所有元素可按如下二原则排成无穷序列:(i) 和标小的在前,(ii) 和标相同时上标 p 小的在前. 即

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_1^1, \underbrace{a_2^1, a_1^2}, \underbrace{a_3^1, a_2^2, a_1^3}, \cdots\}.$$

所以 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列集. ▌

注 定理 2 可用基数记号简述为:

$$a + a + a + \cdots = a \cdot a = a.$$

系 1 设 $B_i (i = 1, 2, \cdots)$ 是有限集或可列集,且 $B_i \cap B_j = \varnothing (i \neq j)$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ 是有限集或可列集.

证明 令 $A_i = \{\binom{i}{1}, \binom{i}{2}, \binom{i}{3}, \cdots\} (i = 1, 2, \cdots)$,由定理 2 立即知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可列集.

每个 B_i 必与 A_i 的一个子集 $\hat{A}_i$ 对等(若 B_i 为可列集则 B_i 与 A_i 对等;若 B_i 为具有 n 个元的有限集则 B_i 与 A_i 的前 n 个元所成之集对等). 显然 $\hat{A}_i \cap \hat{A}_j = \varnothing (i \neq j)$,由 §1·2 命题 2 知

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \sim \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{A}_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

由定理 1 即知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ 为有限集或可列集. ▌

注 1 系 1 中,当 $B_{n+1} = B_{n+2} = \cdots = \varnothing$ 时 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ 实际是 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

注 2 系 1 可用基数记号简述为:若 $\alpha_i \leqslant a(i=1,2,\cdots)$ 则

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leqslant a.$$

系 2 把系 1 中"$B_i \cap B_j = \varnothing(i \neq j)$"的条件去掉,仍然成立.

证明 令

$$\hat{B}_1 = B_1, \hat{B}_2 = B_2 \backslash B_1, \cdots, \hat{B}_i = B_i \backslash \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k, \cdots$$

则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{B}_i, \hat{B}_i \cap \hat{B}_j = \varnothing(i \neq j). \hat{B}_i \subset B_i,$$

由定理 1 知 $\hat{B}_i$ 有限或可列. 由系 1 即知系 2 成立. ▌

命题 1 有理数的全体(即有理数集)是一个可列集.

证明 设 $Q_i = \left\{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \frac{3}{i}, \cdots\right\}(i=1,2,\cdots)$,则 Q_i 可列. 记正有理数的全体为 Q^+,则 $Q^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$,由系 2 知 Q^+ 可列. 记负有理数的全体为 Q^-,显然 Q^- 也可列. 有理数集 $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$,由系 1 知 Q 是可列集. ▌

每当我们知道了一个新的具体集合为可列集,我们就增加了一个判定集合可列的方法 —— 把这个具体可列集作为标准集,来看其他集合是否与之对等. 除自然数集外,我们还常把有理数集作为标准集,因为它有许多好的性质(如在实数集中的稠密性),使我们易于找出与它一一对应的规则.

例 1·4·1 设M是由直线 R^1 中若干两两无交的非空开区间所组成之集,则 M 为有限集或可列集.

证明 R^1 中的任何非空开区间总含有有理数,对M中的每个开区间,使此开区间所含的某个有理数与此开区间对应. 由于 M 中诸开区间两两无交,所说的对应必为 M 与有理数集的某子集间

的一一对应. 由命题 1 及定理 1 即知 M 为有限集或可列集. ▌

定理 3　设 N^n 是 n 个分量都是自然数的有序 n 数组的全体,即

$\mathsf{N}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为自然数$\}$,则 N^n 是可列集.

证明　当 $n=1$ 时,

$\mathsf{N}^n=\{(x_1)\mid x_1$ 为自然数$\}=\{(1),(2),(3),\cdots\}$,可列.

设 $n=k$ 时 N^n 可列,来证 $n=k+1$ 时 N^n 可列.

$$\mathsf{N}^{k+1}=\{(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})\mid x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}\text{ 均为自然数}\}$$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(x_1,\cdots,x_k,i)\mid x_1,\cdots,x_k\text{ 均为自然数}\}.$$

对固定的 i,$\{(x_1,\cdots,x_k,i)\mid x_1,\cdots,x_k$ 均为自然数$\}\sim\mathsf{N}^k$. 由定理 2 即知 N^{k+1} 可列.

所以对任意自然数 n,N^n 是可列集. ▌

注 1 要注意,各项都是自然数的无穷序列的全体$\{(x_1,x_2,\cdots)\mid x_1,x_2,\cdots$ 均为自然数$\}$是不可列集. 这个结论利用 §1·5 定理 4 很容易证明.

注 2　由定理 3 立即可知:若 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 都是可列集,

$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in B_1,x_2\in B_2,\cdots,x_n\in B_n\}$,

则 A 是可列集. 这个结论还可用基数记号简述为:

$$\underbrace{a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n\text{个}}=a^n=a.$$

定理 4　设集合 M 的所有元素已经用有序数组标号,每个元素有唯一确定的标号并且不同的元素有不同的标号,若这些作为标号的有序数组都具有有限个分量(但未必都具有同样多个分量)并且分量都是自然数,则 M 是有限集或可列集.

证明　设 N^n 是定理 3 所说的集,由定理 2 知 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{N}^n$ 可列. 把集合 M 的所有元素的标号组成的集记为 M_*,显然 M_* 是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathsf{N}^n$ 的子集. 由定理 1 知 M_* 有限或可列,所以 M 有限或可列. ▌

命题 2 有理系数多项式的全体是一个可列集.

证明 设有理数集为$\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$,每个n次有理系数多项式可记为

$$r_{i_0}+r_{i_1}x+r_{i_2}x^2+\cdots+r_{i_n}x^n \qquad (1\cdot4\cdot1)$$

$(n=0,1,2,\cdots)$. 零多项式亦可记为此形式(这时$n=0,r_{i0}=0$). 多项式$(1\cdot4\cdot1)$可用分量为自然数的数组$(i_0,i_1,\cdots,i_n)$来标号,又有理系数多项式的全体显然不是有限集,由定理4便知其为可列集. ▎

例 1·4·2 有理系数多项式的实数根称为**代数数**,不是代数数的实数称为**超越数**. 由命题 2 及系 2 可知代数数的全体是一个可列集,再由 §1·3 定理 1 可知超越数的全体是一个不可列集.

历史上,超越数存在性的确认曾一度被认为是难题. 在 Cantor 创立集合论以前有许多数学家比较费力地证明了某些具体的数(例如e)是超越数. 利用集合论的方法不仅比较容易地证明了超越数的存在,而且还断定超越数是非常多的(但此证法未指出哪个具体的数是超越数). 这个例子从一个方面反映了研究集合论的意义.

§1·5 连续势集的判定

1·5·1 连续势集的判定

命题 1 直线R^1中任何包含非空开区间的点集都具有连续势.

证明 由 §1·2 例 3 知$R^1\sim(0,1)$,故$(0,1)$具有连续势. 对非空开区间(a,b)(其中a、b是实数),定义

$$f(x)=a+(b-a)x;(x\in(0,1)),$$

则f是$(0,1)$到(a,b)的一一映射,故(a,b)具有连续势. 若$A\subset R^1$且$A\supset(a,b)$,由 Bernstein 定理的系知$R^1\sim A\sim(a,b)$,故A具有连续势. ▎

定理 1 设 A 具有连续势，B 至多具有连续势，则 $A\cup B$ 具有连续势.

证明 $A\cup B=A\cup(B\backslash A)$，$A$ 与 $B\backslash A$ 无交. A 具有连续势，故 $A\sim(-\infty,0)$. B 至多具有连续势，故 $B\backslash A$ 至多具有连续势，从而 $B\backslash A$ 对等于 $[0,+\infty)$ 的某子集 C.
因此

$$A\cup(B\backslash A)\sim(-\infty,0)\cup C.$$

由命题 1 便知 $A\cup B$ 具有连续势. ▌

定理 2 设 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 具有连续势，且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 具有连续势.

证明 设 $I_n=(n-1,n](n=1,2,\cdots)$. I_n 具有连续势，故 $A_n\sim I_n$.

当 $i\neq j$ 时，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$I_i\cap I_j=\varnothing$，故

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n.\ \bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=(0,+\infty)$$

具有连续势，故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 具有连续势. ▌

注 定理 2 可用基数记号简述为：

$$c+c+c+\cdots=a\cdot c=c.$$

1·5·2 p 进无穷小数用于连续势集的判定

我们先来讨论 p 进无穷小数. 在 §1·5·2 我们总是假设 p 是一个已经给定的大于 1 的自然数.

定义 1 若数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的每一项都是小于 p 的非负整数，并且此数列有无限多项不为 0，就称级数

$$a_1\cdot\frac{1}{p}+a_2\cdot\frac{1}{p^2}+\cdots+a_n\cdot\frac{1}{p^n}+\cdots$$

为 p 进无穷小数，简记作 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$

命题 2 (i) 任何一个 p 进无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 都等于 $(0,1]$ 中的一个数 x（“等于”指“收敛于”）.

(ii) $(0,1]$ 中的任何一个数 x 都等于唯一的一个 p 进无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$

* **证明** (i) p 进无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$ 即级数

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\frac{a_3}{p^3}+\cdots$$

显然此级数收敛于某一个数 x,并且

$$0<x\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p-1}{p^k}=1.$$

(ii) 第一步. 设 $x\in(0,1]$. 把 $(0,1)$ 划分为 p 个等长的半开区间

$$(0,1]=(0,\frac{1}{p}]\cup(\frac{1}{p},\frac{2}{p}]\cup\cdots\cup(\frac{p-1}{p},1].$$

显然存在小于 p 的非负整数 a_1,使 $x\in(\frac{a_1}{p},\frac{a_1+1}{p}]$,即

$$\frac{a_1}{p}<x\leqslant\frac{a_1+1}{p}.$$

再把 $(\frac{a_1}{p},\frac{a_1+1}{p}]$ 划分为 p 个等长的半开区间,同理可知存在小于 p 的非负整数 a_2,使

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}<x\leqslant\frac{a_1}{p}+\frac{a_2+1}{p^2}.$$

如此继续作下去,便得到数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 其每一项是小于 p 的非负整数,且对每个自然数 n 都有

$$\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_n}{p^n}<x\leqslant\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\cdots+\frac{a_n+1}{p^n}. \tag{1·5·1}$$

因此 $0<x-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{p^k}\leqslant\frac{1}{p^n}$. 令 $n\to\infty$ 得

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k}. \tag{1·5·2}$$

由式(1·5·1)与式(1·5·2)立即可知 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 有无限多项不为 0,所以式(1·5·2)的右边是 p 进无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$

第二步.假设 x 还等于 p 进无穷小数 $0.b_1b_2b_3\cdots$ 并且存在自然数 N 使 $a_N\neq b_N$.不失一般性,不妨设

$$a_1=b_1,\cdots,a_{N-1}=b_{N-1},\text{但 } a_N<b_N.$$

此时

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k}\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{p^k}+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{p-1}{p^k}=\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{p^k}+\frac{1}{p^N}$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{p^k}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{p^k}.$$

但 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{p^k}$ 都等于 x.出现的矛盾说明 x 等于唯一的一个 p 进无穷小数 $0.a_1a_2a_3\cdots$ ▌

系 1　由所有 p 进无穷小数组成的集具有连续势.

下面我们利用 p 进无穷小数来证明某些集具有连续势.

定理 3　(i) 设 A 为平面 R^2 中的点集

$$\{(x,y)\mid 0<x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1\},$$

则 A 具有连续势.

(ii) 点集 R^2 具有连续势.

证明　(i) 我们作 A 到区间 $(0,1]$ 的映射 f 如下:对任意 $(x,y)\in A$,把 x、y 表示成十进无穷小数:

$$x=0.a_1a_2a_3\cdots\qquad y=0.b_1b_2b_3\cdots$$

由此作十进无穷小数 $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$,它必等于区间 $(0,1]$ 中的一个数 z,我们定义 (x,y) 在 f 下的象为 z.

由命题 2 不难看出 A 中不同的点在 f 下的象也不同,因此 f 是 A 到 $f(A)$ 的一一映射.所以 $(0,1]$ 的子集 $f(A)$ 与 A 对等.

另一方面,A 的子集 $\{(x,1)\mid 0<x\leqslant 1\}$ 显然与 $(0,1]$ 对等.根据 Bernstein 定理即知 A 与 $(0,1]$ 对等.所以 A 具有连续势.

(ii) 由于$(0,1]\sim R^1$,故存在φ使$(0,1]\xrightarrow[1-1]{\varphi}R^1$. 作$A$到$R^2$的映射$g$,使$A$中的点$(x,y)$在$g$下的象为$R^2$中的点$(\varphi(x),\varphi(y))$,显然$g$是$A$到$R^2$的一一映射,所以$R^2$具有连续势. ▌

注 由定理3立即可知:两两无交的c个基数为c的集之并是一个基数为c的集. 这个结论还可用基数记号简述为:

$$c\cdot c=c^2=c.$$

定理4 (i) 设D是由0,1两个数重复排列所成的无穷序列的全体,即

$$D=\{(a_1,a_2,\cdots)\,|\,a_i\in\{0,1\},i=1,2,\cdots\},$$

则D具有连续势.

(ii) 设M为可列集,则M的所有子集组成的集$\mathscr{M}$具有连续势.

证明 (i) 我们把D表为两个无交子集A与B的并:若D的元$(a_1,a_2,\cdots)$是一个从某项以后全为0的序列,就把它作为A的元;否则,就把它作为B的元.

由§1·4定理4易知A是可列集.

定义$\varphi(a_1,a_2,\cdots)=0.a_1a_2\cdots$,当$(a_1,a_2,\cdots)\in B$时,显然$\varphi$是$B$到二进无穷小数全体的一一映射,故$B$具有连续势. 根据定理1即知$D=A\cup B$具有连续势.

(ii) M为可列集,故M的所有元素可排成无穷序列

$$b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$$

设D是(i)中所说的集. 今作$\mathscr{M}$到D的映射f:对于$\mathscr{M}$中的任意元A,我们这样来确定A在f下的象$(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$:对每个自然数$n$,若$b_n\in A$就取$a_n=1$,若$b_n\overline{\in}A$就取$a_n=0$. 不难看出$f$是$\mathscr{M}$到$D$的一一映射,所以$\mathscr{M}$具有连续势. ▌

注 定理4可用基数记号简述为

$$2\cdot 2\cdot 2\cdot\cdots=2^a=c.$$

*1・5・3　Cantor 连续统假设

我们已经知道基数 a 小于基数 c，于是自然要问：是否存在一个集合 A 满足 $a < \overline{\overline{A}} < c$？Cantor 曾经猜想这样的集合 A 是不存在的，这个猜想就是著名的 **Cantor 连续统假设**. 但是，Cantor 本人极尽全力也未能证明这个假设. 现在这个问题终于搞清楚了：这个假设事实上相对于集合论的公理系(确切的说是 Zermelo 等人的 ZFC 公理系)是独立的，要从后者推出前者是不可能的.

1・5・4　不存在最大的基数

在 §1・3 曾提到诸无限集所具有的基数除 a，c 外还有很多别的，我们于本段来说明这个问题.

若集合 M 具有 n(n 为自然数或 0) 个元素，易知 M 的所有子集组成的集 $\mathscr{M}$ 具有 2^n 个元素，$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathscr{M}}}$.

若集合 M 的基数为 a，记 M 的所有子集组成的集为 $\mathscr{M}$，定理 4 指出 $\mathscr{M}$ 的基数为 c，$\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathscr{M}}}$.

定理 5　设 M 为任意集，记 M 的所有子集组成的集为 $\mathscr{M}$，则 $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathscr{M}}}$.

证明　设 M 的所有单元素子集组成的集为 $\mathscr{M}_0$，显然 $M \sim \mathscr{M}_0$，$\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}$，故 $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{M}}}$.

再证 $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{\mathscr{M}}}$. 用反证法. 假设 $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{\mathscr{M}}}$，则存在 f 使 $M \xrightarrow[1-1]{f} \mathscr{M}$，令 $M_1 = \{x \mid x \in M, x \overline{\in} f(x)\}$，则 M_1 是 M 的子集，故存在 $a_1 \in M$ 使

$$f(a_1) = M_1, \tag{1・5・3}$$

(1°) 假设 $a_1 \in M_1$，则由(1・5・3)知 $a_1 \in f(a_1)$，再由 M_1 的定义知 $a_1 \overline{\in} M_1$，此与 $a_1 \in M_1$ 的假设矛盾.

(2°) 假设 $a_1 \overline{\in} M_1$,则由(1·5·3)知 $a_1 \overline{\in} f(a_1)$,再由 M_1 的定义知 $a_1 \in M$,此与 $a_1 \overline{\in} M_1$ 的假设矛盾.

由(1°)(2°)知 $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{\mathscr{M}}}$,所以 $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathscr{M}}}$. ▌

注 M 的所有子集组成的集通常记作 2^M. 若 M 的基数为 α,2^M 的基数通常记作 2^α. 使用这个基数记号,定理 5 可简述为:

$$\alpha < 2^\alpha (\alpha \text{ 为任意一个基数}).$$

定理 5 告诉我们,不存在一个这样的集合:它的基数不小于任何一个集合的基数. 换句话说,不存在最大的基数. 由此可见诸无限集所具有的基数远非仅仅 a,c.

习　题　一

1. 证明

(i) §1·1 定理 1(iii) 第二式，

(ii) §1·1 定理 2(i).

2. 证明

(i) $A\backslash B = \mathscr{C}B\backslash\mathscr{C}A$，

(ii) $(A\backslash B)\cup B = A\cup B$，

(iii) $(A\cup B)\backslash B = A\backslash B$，

(iv) $A\cap B = (A\cup B)\backslash(A\backslash B)\backslash(B\backslash A)$，

(v) $A\backslash B = A\backslash(A\cap B)$，

(vi) 若 $A\supset B$，则 $C\backslash A\subset C\backslash B$.

3. 证明

(i) $A\backslash(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcap_{i=1}^{\infty}(A\backslash A_i)$，

(ii) $A\backslash(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A\backslash A_i)$，

(iii) $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty}(A_i\cap B_j)$，

(iv) $(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\backslash(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j) = \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcap_{j=1}^{\infty}(A_i\backslash B_j)$.

4. 设$\{A_i\}$是一列集，作 $\hat{A}_1 = A_1$，$\hat{A}_i = A_i\backslash\bigcup_{k=1}^{i-1} A_k$，$i = 2,3,\cdots$ 则

(i) $\hat{A}_i\cap\hat{A}_j = \varnothing\quad(i\neq j)$，

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n}\hat{A}_i\quad(n = 1,2,\cdots)$，

(iii) $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\hat{A}_i$.

5. 设 $A_i\supset B_i(i = 1,2,\cdots)$，$A_i\cap A_j = \varnothing(i\neq j)$，则

$$(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)\setminus(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i\setminus B_i).$$

6. 证明

(i) 若 $A_n \uparrow A$,则 $\mathscr{C}_X A_n \downarrow \mathscr{C}_X A$,

(ii) 若 $A_n \downarrow A$,则 $\mathscr{C}_X A_n \uparrow \mathscr{C}_X A$,

(iii) 设 $\{G_n\}$ 是一列集,作 $\hat{G}_n = \bigcap_{k=1}^{n} G_k, n = 1,2,\cdots$ 则 $\hat{G}_n \downarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$,

(iv) 设 $\{F_n\}$ 是一列集,作 $\hat{F}_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k, n = 1,2,\cdots$ 则 $\hat{F}_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

7. 对于集列 $\{A_n\}_1^{\infty}$,$\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ 称为 $\{A_n\}_1^{\infty}$ 的**上限集**,$\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$ 称为$\{A_n\}_1^{\infty}$ 的**下限集**. 试证明

(i) $x_0 \in \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty} A_n$ 等价于:x_0 属于$\{A_n\}_1^{\infty}$ 中的无限多个项,

(ii) $x_0 \in \bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty} A_n$ 等价于:x_0 属于$\{A_n\}_1^{\infty}$ 中某项以后的所有项.

8. 从 n 个两两无交的集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 出发,通过“并”、“交”、“差”运算,总共可以得到多少个不同的集?若是从 n 个两两不同的集出发呢?

9. 试作出圆周 A 到直线 R^1 的一个一一映射.

10. 若 $A \sim B$,且 $\hat{A} \subset A, \hat{B} \subset B, \hat{A} \sim \hat{B}$,问是否 $A\setminus\hat{A} \sim B\setminus\hat{B}$?

11. 若 A 是无限集,则必有 $\hat{A} \subset A$,使 $\hat{A} \sim A$ 且 $A\setminus\hat{A}$ 为可列集.

12. 若 A 为不可列集,B 为可列集,则 $A\setminus B \sim A$.

13. 平面 R^2 中有理点(即两个坐标均为有理数的点)的全体是一个可列集.

14. 平面 R^2 中以有理点为中心以正有理数为半径的圆的全体是一个可列集.

15. 定义在 R^1 上的单调函数,其不连续点至多有可列个.

16. 可列集的所有有限子集组成的集是可列集.

17. 设 R^1 上的实值函数 $f(x)$ 具有如下性质:对每个 $x_0 \in R^1$,都有相应的正数 δ_{x_0},使当 $|x-x_0|<\delta_{x_0}$ 时 $f(x) \geqslant f(x_0)$. 证明函数 $f(x)$ 的值域至多是一个可列集.

18. 若$[0,1]$上的实值函数 $f(x)$ 不是常数,$f(x)$ 在每个无理点上的取值为有理数,则 $f(x)$ 不是$[0,1]$上的连续函数.

19. 若 A 是由无穷序列$\{x_n\}_1^\infty$ 的所有子列组成的集($\{x_n\}_1^\infty$ 的各项未必两两相异),A 的基数如何?试讨论之.

20. 证明各项都是实数的无穷序列的全体是具有连续势的集.

21. 由闭区间$[a,b]$上的所有连续函数组成的集通常记作 $C[a,b]$. 证明 $C[a,b]$ 具有连续势.

22. 证明由$[0,1]$上的所有单调函数组成的集具有连续势.

23. 不使用 Cantor 连续统假设,证明以下二结论:

(i) 设 $A=A_1 \cup A_2$,A 具有连续势,则 A_1,A_2 中至少有一个集具有连续势,

(ii) 设 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,$A$ 具有连续势,则 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 中至少有一个集具有连续势.(答案可参见[17]p9)

24. 由实数集 R^1 的所有子集组成的集通常记作 2^{R^1},其基数通常记作 f. 证明由 R^1 上的所有实值函数组成的集具有基数 f.

第二章　点　集

本章研究特殊的集合——R^N 空间中点的集合(简称点集),作为 Lebesgue 测度及积分理论的预备知识. R^N 空间点集理论从点集拓扑的角度说也是重要的.

§2·1　R^N 空间·区间·距离

本节内容基本上是复习数学分析中已学过的知识.

定义 1　分量都是实数的有序 N 数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 之全体称为 **R^N 空间**,简称 R^N. N 称为 R^N 的**维数**. R^N 的元素 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 又称为 R^N 的**点**,点 x 的第 i 个分量又称为它的**第 i 个坐标**(当点记为 x 时,它的第 i 个坐标通常记为 x_i). 点 $(0, 0, \cdots, 0)$ 称为 R^N 的**原点**,记作 θ.

若无特别声明,今后凡说点集均指 R^N 空间中点的集合.

定义 2　设 a_i, b_i 是实数, $a_i \leqslant b_i (i = 1, 2, \cdots, N)$. R^N 中的点集

$$I = \{(x_1, x_2, \cdots, x_N) \mid a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \cdots, a_N < x_N < b_N\} \tag{2·1·1}$$

称为**开区间**,记作 $(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_N, b_N)$.

若把式(2·1·1)中的诸不等式换成 $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, 2, \cdots, N$,则称 I 为**闭区间**,记作

$$[a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_N, b_N].$$

若把式(2·1·1)中的诸不等式换成 $a_i < x_i \leqslant b_i, i = 1, 2, \cdots,$

N，则称 I 为**半开区间**，记作

$$(a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_N, b_N].$$

把(2·1·1)中任意多个"$<$"号换成"$\leqslant$"相应的点集 I 统称为**区间**，当无必要区别是何种区间时就统记作

$$< a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_N, b_N >$$

(此记号有时还写成 $< a_i. b_i; i = 1, 2, \cdots, N >$).

对于区间 $< a_i, b_i; i = 1, 2, \cdots, N >$，我们把 $b_i - a_i (i = 1, 2, \cdots, N)$ 称为它的**第 i 个边长**，把$\left[\sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i)^2\right]^{1/2}$ 称为它的**对角线长**.

注 1　数学分析中所说的无限区间，例如$(0, +\infty)$，按照定义 2 的意义不是区间. 今后凡说区间，若无特别声明，均指在定义 2 的意义下.

注 2　定义 2 允许 $a_i = b_i$，因此空集 $\varnothing$ 是除闭区间外的任何一种区间.

命题 1　对任意给定的正数 l，总可以把 R^N 表示成满足下面两个条件的可列个两两无交的半开区间 $I_1, I_2, I_3, \cdots$ 之并：

(i) 每个半开区间 I_n 的各个边长均为 l，

(ii) $I_1, I_2, I_3, \cdots$ 中有一个半开区间为

$$\{ x \mid 0 < x_i \leqslant l, i = 1, 2, \cdots, N \}.$$

(我们把这样的一族半开区间$\{I_n\}_1^\infty$ 称为 R^N 的**起点为 θ 边长为 l 的半开区间分解**)

证明　令

$$I_{k_1 k_2 \cdots k_N} = \{ x \mid k_i l < x_i \leqslant (k_i + 1) l, i = 1, 2, \cdots, N \},$$

其中 $k_i \in \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\} (i = 1, 2, \cdots, N)$.

显然这样的半开区间的全体是 R^N 的起点为 θ 边长为 l 的半开区间分解，可将其重新编号记作 $I_1, I_2, I_3, \cdots$ ∎

定义 3　对于 R^N 中的任意两点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 及 $y =$

$(y_1, y_2, \cdots, y_N)$,我们把非负实数

$$\left[\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

称为 x 与 y 的**欧几里德距离**,简称 x 与 y 的**距离**,记作 $\rho(x,y)$.

命题 2 距离有如下三条基本性质:

(i) $\rho(x,y) \geqslant 0$; $\rho(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$;

(iii) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$.(三角不等式)

显然区间 I 中任何两点的距离都不超过 I 的对角线长.

定义 4 设 $x_0 \in R^N, \delta > 0$. R^N 中到 x_0 的距离小于 δ 的所有点组成之集称为**以 x_0 为中心以 δ 为半径的球形邻域**,简称 **x_0 的 δ 邻域**,记作 $U(x_0,\delta)$. 当没有必要指出 x_0 和 δ 时,就简称为**球形邻域**或者**邻域**.

命题 3 球形邻域有如下三条基本性质:

(i) $x \in U(x,\delta)$;

(ii) 若 $y \in U(x,\delta)$,则存在 $\varepsilon > 0$ 使 $U(y,\varepsilon) \subset U(x,\delta)$;

(iii) 若 $x \in U(x_1,\delta_1), x \in U(x_2,\delta_2)$,则存在 $\varepsilon > 0$ 使

$$U(x,\varepsilon) \subset U(x_i,\delta_i), i = 1,2.$$

证明 仅证(ii):令 $\varepsilon = \delta - \rho(y,x)$,则 $\varepsilon > 0$.

若 $z \in U(y,\varepsilon)$,则 $\rho(z,y) < \varepsilon$,从而

$$\rho(z,x) \leqslant \rho(z,y) + \rho(y,x) < \varepsilon + (\delta - \varepsilon) = \delta,$$

故 $z \in U(x,\delta)$. 于是 $U(y,\varepsilon) \subset U(x,\delta)$. ▌

命题 4 (i) 若 x 为开区间 I 中的一点,则存在一个 x 的 δ 邻域 U 使 $U \subset I$.

(ii) 若 x 为邻域 U 中的一点,则存在一个含 x 的开区间 I 使 $I \subset U$.

定义 5 设 M 为 R^N 中一点集,若存在开区间 I 使 $I \supset M$,则称 M 是**有界集**.

容易看出,把定义 5 中的“开区间 I” 换为“邻域 U”,所得定义与原定义等价.

定义 6　设 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 是 R^N 中的一列点(点列 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 可记作 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 或 $\{x_n\}_1^{\infty}$,有时简记作 $\{x_n\}$),$x_0 \in R^N$. 若对于含 x_0 的任一邻域 U,总存在自然数 K,使当 $n \geqslant K$ 时 $x_n \in U$,就称 x_0 **为点列 $\{x_n\}$ 的极限,称 $\{x_n\}$ 是一个收敛于 x_0 的点列**,记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 或 $x_n \to x_0$.

由命题 4 易知,把定义 6 中的“邻域 U” 换为“开区间 I”,所得定义与原定义等价. 另外,定义 6 还与下面的定义 6′ 等价.

定义 6′　R^N 中的**点列 $\{x_n\}$ 收敛于** x_0 是指 $\rho(x_n, x_0) \to 0$.

定理 1　(**Bolzano-Weierstrass 定理**) 若 $\{x_n\}$ 是 R^N 中的有界点列,则 $\{x_n\}$ 中必存在收敛于 R^N 中某一点的子列 $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots$

这个定理的证明见数学分析.

我们指出,本书所有涉及 R^N 的概念,只有“球形邻域” 及“点集间的距离”(见 §2·5) 两个概念必须在给出了 R^N 空间的距离规定之后才能定义,其他概念都不是如此,尽管我们有时也借助距离概念来刻划它们或以距离为工具来研究它们的性质.

§2·2　内点与开集

这一节及下两节主要研究 R^N 空间中的开集和闭集,这两种点集在第三章 Lebesgue 测度的讨论中起着重要的作用. 另外,开集与闭集也是重要的拓扑概念.

定义 1　设 E 是 R^N 中一点集,x_0 是 R^N 中一点.

(i) 若存在 x_0 的邻域 $U(x_0, \delta)$,满足 $U(x_0, \delta) \subset E$,就称 x_0 是 E 的**内点**;

(ii) 若存在 x_0 的邻域 $U(x_0, \delta)$,其中不含 E 的任何点,就称 x_0

是 E 的**外点**;

(iii) 若 x_0 的任何邻域 $U(x_0,\delta)$ 都既含属于 E 的点也含不属于 E 的点,就称 x_0 是 E 的**边界点**.

由 §2·1 命题 4 易知,把定义 1 中的"x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)$"换为"含 x_0 的开区间 I",所得定义与原定义等价.

定义 2 点集 E 的所有内点组成的集称为 E 的**内部**,记作 E°.

定义 3 若 $E=E^\circ$,即点集 E 的每个点都是它的内点,就称 E 是 R^N 空间中的**开集**.

例 2·2·1 R^2 中的点集 $\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2<1\}$ 是开集,但 R^3 中的点集 $\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2<1,x_3=0\}$ 不是开集.

例 2·2·2 任何球形邻域都是开集.任何开区间都是开集.

命题 1 点集 E 的内部 E° 是开集.

这个命题的证明留给读者作练习.

定理 1 (i) 点集 R^N 及 $\varnothing$ 都是开集.

(ii) 有限个开集 G_i 的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ 仍是开集.

(iii) 任意多个开集 $G_\alpha,\alpha\in I$ 的并 $\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$ 仍是开集.

证明 (i) 由开集的定义立即得证.

(ii) 只需证两个开集 G_1,G_2 的交 $G_1\cap G_2$ 是开集.

设 $x_0\in G_1\cap G_2$,则 $x_0\in G_1$ 且 $x_0\in G_2$,从而存在正数 δ_1,δ_2 使

$$U(x_0,\delta_1)\subset G_1,U(x_0,\delta_2)\subset G_2.$$

由 §2·1 命题 3(iii),存在 $\varepsilon>0$ 使

$$U(x_0,\varepsilon)\subset U(x_0,\delta_i)\ (i=1,2),$$

从而

$$U(x_0,\varepsilon)\subset G_i(i=1,2),U(x_0,\varepsilon)\subset G_1\cap G_2,$$

故 x_0 是 $G_1\cap G_2$ 的内点.所以 $G_1\cap G_2$ 是开集.

(iii) 设 $x_0\in\bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$,则存在 $\alpha_0\in I$ 使 $x_0\in G_{\alpha_0}$.由 G_{α_0} 是开集

知存在$\delta>0$使$U(x_0,\delta)\subset G_{\alpha_0}$，从而$U(x_0,\delta)\subset\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$，故$x_0$是$\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$的内点．所以$\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$是开集．▌

注　无限多个开集的交可能不是开集．

例如，R^1中$G_n=\left(-\dfrac{1}{n},1+\dfrac{1}{n}\right)$ $(n=1,2,\cdots)$是开集，但$\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n=[0,1]$不是开集．

§2·3　聚点与闭集

定义1　设E是R^N中一点集，x_0是R^N中一点．

(i) 若x_0的任何邻域$U(x_0,\delta)$中都存在异于x_0而属于E的点，就称x_0是E的**聚点**；

(ii) 若$x_0\in E$，且存在邻域$U(x_0,\delta)$，其中除x_0外没有属于E的点，就称x_0是E的**孤立点**．

由§2·1命题4易知，把定义1中的“x_0的邻域$U(x_0,\delta)$”换成“含x_0的开区间I”，所得定义与原定义等价．

E的聚点可能属于E也可能不属于E，但E的孤立点一定属于E．E的内点必为E的聚点，但E的聚点未必是E的内点．

命题1　x_0是E的聚点的充要条件是：E中存在着一列异于x_0的点$x_1,x_2,x_3,\cdots$收敛于x_0．

证明　充分性是显然的．

必要性：设x_0是E的聚点，则对任意自然数n，$U(x_0,\frac{1}{n})$中存在点x_n使$x_n\neq x_0$且$x_n\in E$．$\rho(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$．▌

由命题1不难得知，若x_0是E的聚点，则x_0的任何邻域$U(x_0,\delta)$中都含有无限多个属于E的点．

定义2 (i) 点集 E 的所有聚点组成的集称为 E 的**导集**,记作 E'.

(ii) 点集 E 与它的导集 E' 的并集 $E\cup E'$ 称为 E 的**闭包**,记作 $\overline{E}$.

例2·3·1 R^1 中,自然数集的导集是空集,有理数集的导集是 R^1. R^N 的导集是 R^N. 空集的导集是空集.

定义3 若 $E'\subset E$,即点集 E 的所有聚点都属于 E,就称 E 是 R^N 空间中的闭集.

例2·3·2 R^2 中的点集 $\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$ 是闭集. R^3 中的点集 $\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 1, x_3=0\}$ 也是闭集.

例2·3·3 球形邻域与其边界点全体之并是闭集(这样的闭集称为闭球形邻域). 闭区间是闭集. 有限点集是闭集.

命题2 点集 E 为闭集的充要条件是:若点列 $\{x_n\}_1^\infty\subset E$(即 $x_n\in E, n=1,2,\cdots$),并且 $x_n\to x_0$,则 $x_0\in E$.

证明 必要性:设 E 为闭集,$\{x_n\}_1^\infty\subset E$,$x_n\to x_0$. 若 $\{x_n\}_1^\infty$ 中有 x_0 点,自然 $x_0\in E$;若 $\{x_n\}_1^\infty$ 中无 x_0 点,由命题1知 x_0 是 E 的聚点,故 $x_0\in E$.

充分性:设含于 E 的任何收敛点列必收敛于 E 中的点. 若 x_0 是 E 的聚点,由命题1知存在 $\{x_n\}_1^\infty\subset E$ 使 $x_n\to x_0$,于是 $x_0\in E$. 可见 E 是闭集. ▌

命题2实际是说:闭集就是对极限运算封闭的点集.

命题3 (i) E' 是闭集. (ii) $\overline{E}$ 是闭集.

证明 (i) 设 $x_0\in(E')'$,则对任意 $\delta>0$,$U(x_0,\delta)$ 中总存在点 x_1 使 $x_1\in E'$. 由 §1 命题3知,存在 $\varepsilon>0$ 使 $U(x_1,\varepsilon)\subset U(x_0,\delta)$. 又由 $x_1\in E'$ 知 $U(x_1,\varepsilon)$ 中有无限多个属于 E 的点,从而 $U(x_0,\delta)$ 中有异于 x_0 而属于 E 的点. 因此 x_0 是 E 的聚点,$x_0\in E'$. 由 x_0 是 $(E')'$ 中任意的点知 $(E')'\subset E'$,所以 E' 是闭集.

(ii) 设 $x_0\in(\overline{E})'$. 由命题1知存在 $\{x_n\}\subset\overline{E}$ 使诸 $x_n\neq x_0$ 且 $x_n\to x_0$. 若 $x_1,x_2,x_3,\cdots$ 中有无限多个项属于 E,则由命题1知 x_0

$\in E'$. 若 $x_1, x_2, x_3, \cdots$ 中仅有有限多个项属于 E，则其余的无限多个项属于 E'，由命题 1 知 $x_0 \in (E')'$，从而由(i) 知 $x_0 \in E'$. 无论何种情况均有 $x_0 \in E' \subset E' \cup E = \overline{E}$，由 x_0 是$(\overline{E})'$中任意的点知$(\overline{E})' \subset \overline{E}$，所以 $\overline{E}$ 是闭集. ▌

由命题 3 立即可知，点集 E 是闭集的充要条件是 $E = \overline{E}$.

若无特别说明，今后凡说点集 E 的余集 $\mathscr{C}E$ 均指 $R^N \setminus E$，这里 R^N 是 E 所在的空间.

下面的定理说明了开集与闭集的密切关系.

定理 1　(i) 开集的余集是闭集.

(ii) 闭集的余集是开集.

证明　(i) 设 G 是开集，来证 $\mathscr{C}G$ 是闭集：设 $x_0 \in (\mathscr{C}G)'$，则每个 $U(x_0, \delta)$ 均含有 $\mathscr{C}G$ 的点，即均含有不属于 G 的点，所以每个 $U(x_0, \delta)$ 都不包含于 G，可见 x_0 不是 G 的内点. 由于开集 G 的点均为 G 的内点，故 $x_0 \overline{\in} G$，即 $x_0 \in \mathscr{C}G$. $\mathscr{C}G$ 的聚点都属于 $\mathscr{C}G$，故 $\mathscr{C}G$ 是闭集.

(ii) 设 F 是闭集，来证 $\mathscr{C}F$ 是开集：设 $x_0 \in \mathscr{C}F$，则 $x_0 \overline{\in} F$. 由 $F' \subset F$ 知 $x_0 \overline{\in} F'$，即 x_0 不是 F 的聚点，根据聚点的定义(并注意到 x_0 不属于 F) 知存在 $\delta > 0$ 使 $U(x_0, \delta)$ 中没有 F 的点. 于是 $U(x_0, \delta) \subset \mathscr{C}F$，从而 x_0 是 $\mathscr{C}F$ 的内点. $\mathscr{C}F$ 的点都是 $\mathscr{C}F$ 的内点. 故 $\mathscr{C}F$ 是开集. ▌

由定理 1 立即可知，点集 E 为闭集的充要条件是 $\mathscr{C}E$ 为开集. 因此，当初如果定义"闭集即余集为开集的点集"来开展闭集的讨论，也未尝不可.

定理 2　(i) 点集 R^N 及 $\varnothing$ 都是闭集.

(ii) 有限个闭集 F_i 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ 仍是闭集.

(iii) 任意多个闭集 $F_\alpha, \alpha \in I$ 的交 $\bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$ 仍是闭集.

证明　(i) 由闭集的定义立即得证.

(ii) $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \mathscr{C}(\mathscr{C}\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \mathscr{C}(\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{C}F_i)$. $\mathscr{C}F_i$ 是开集，由§2·2定理1知 $\bigcap_{i=1}^{n} \mathscr{C}F_i$ 是开集，故 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ 是闭集.

(iii) $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha = \mathscr{C}(\mathscr{C}\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha) = \mathscr{C}(\bigcup_{\alpha\in I} \mathscr{C}F_\alpha)$. 由定理1及§2·2定理1知 $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha$ 是闭集. ▌

注 无限多个闭集的并可能不是闭集. 例如，R^1 中 $F_n = \left[\frac{1}{n}, 2-\frac{1}{n}\right]$ $(n=1,2,\cdots)$ 是闭集. 但 $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,2)$ 不是闭集.

我们看到，R^N 及 $\varnothing$ 既是开集也是闭集. 事实上，既是开集又是闭集的点集也只有 R^N 及 $\varnothing$(其证明可作为章§2·5的习题). 另外，既非开集又非闭集的点集是很容易举出的，例如半开区间 $(0,1]$. 由此可见，开集与闭集并非互斥的两个概念.

§2·4 开集和闭集的构造

2·4·1 R^1 中开集、闭集的构造

定义1 设 G 是 R^1 中的开集，若非空开区间 $(\alpha,\beta)\subset G$，但 (α,β) 的端点 α 与 β 均不属于 G，就称 (α,β) 是开集 G 的一个**构成区间**.

例2·4·1 有界开集 $(1,2)\cup(3,4)$ 有两个构成区间：$(1,2)$、$(3,4)$.

定理1 R^1 中非空的有界开集 G 必可表为有限个或可列个两两无交的非空开区间之并，并且把 G 表成这样的形式时参与并的那些非空开区间的全体恰是开集 G 的构成区间的全体(从而这种形式的表示，表示法是唯一的).

证明 我们分以下几步来证.

第一步. 证 G 的任何两个不同的构成区间必无交：

设 (α_1,β_1) 与 (α_2,β_2) 都是 G 的构成区间并且有公共点 x_0. 假

若 $\alpha_1<\alpha_2$，由 $\alpha_1<\alpha_2<x_0<\beta_1$ 知 $\alpha_2\in(\alpha_1,\beta_1)\subset G$，这与 (α_2,β_2) 是 G 的构成区间相矛盾. 可见 $\alpha_1\not<\alpha_2$. 同理 $\alpha_1\not>\alpha_2$. 于是 $\alpha_1=\alpha_2$. 类似可证 $\beta_1=\beta_2$. 所以 (α_1,β_1) 与 (α_1,β_2) 是同一个构成区间. 第一步得证.

第二步. 证 G 的任何一点必含在 G 的一个构成区间中：

设 $x_0\in G$，把适合条件 $x_0\in(\alpha,\beta)\subset G$ 的开区间 (α,β) 的全体记作 M. 由 G 是开集知 M 不空. 记

$$\alpha_0=\inf\{\alpha\mid(\alpha,\beta)\in \mathrm{M}\},\quad \beta_0=\sup\{\beta\mid(\alpha,\beta)\in \mathrm{M}\}.$$

G 有界，故 $-\infty<\alpha_0<\beta_0<\infty$. 作开区间 (α_0,β_0). 显然 $x_0\in(\alpha_0,\beta_0)$.

我们来证 (α_0,β_0) 是 G 的构成区间：

先证 $(\alpha_0,\beta_0)\subset G$.

设 $x\in(\alpha_0,\beta_0)$. 若 $x\leqslant x_0$，由 α_0 的定义知存在 $(\alpha,\beta)\in \mathrm{M}$ 使

$$\alpha_0\leqslant\alpha<x,$$

因此

$$x\in(\alpha,x_0]\subset(\alpha,\beta)\subset G.$$

同理可证 $x\geqslant x_0$ 时亦有 $x\in G$. 所以 $(\alpha_0,\beta_0)\subset G$.

再证 $\alpha_0,\beta_0\,\overline{\in}\,G$.

假若 $\alpha_0\in G$，由 G 是开集知存在开区间 (α',β') 使

$$\alpha_0\in(\alpha',\beta')\subset G.$$

由于

$$x_0\in(\alpha',\beta_0)\subset(\alpha',\beta')\cup(\alpha_0,\beta_0)\subset G,$$

所以 $(\alpha',\beta_0)\in \mathrm{M}$，再由 α_0 的定义知 $\alpha'\geqslant\alpha_0$. 此与上面所说的 $\alpha_0\in(\alpha',\beta')$ 相矛盾. 这就证明了 $\alpha_0\,\overline{\in}\,G$. 同理可证 $\beta_0\,\overline{\in}\,G$. 所以 (α_0,β_0) 是 G 的构成区间. 第二步得证.

第三步. 根据 §1·4 例 1·4·1，由第一步的结论可知 G 的所有构成区间必为有限个或可列个. 设 G 的构成区间的全体为 $\{(\alpha_i,\beta_i)\}$. 由 $(\alpha_i,\beta_i)\subset G$ 知 $\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)\subset G$，由第二步知 $\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)\supset G$，

故 $G=\bigcup\limits_i(\alpha_i,\beta_i)$. 定理的前一半得证.

第四步. 设 G 可表为若干个两两无交的非空开区间 $(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)$ 之并 $\bigcup\limits_i(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)$，来证这族开区间 $\{(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)\}$ 恰是 G 的构成区间的全体：

显然 $(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)\subset G$. 假若 $\hat{\alpha}_i\in G$，则有 $j\neq i$ 使 $\hat{\alpha}_i\in(\hat{\alpha}_j,\hat{\beta}_j)$，于是 $(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)$ 与 $(\hat{\alpha}_j,\hat{\beta}_j)$ 相交，这与假设相矛盾，可见 $\hat{\alpha}_i\,\overline{\in}\,G$. 同理 $\hat{\beta}_i\,\overline{\in}\,G$. 所以 $(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)$ 是 G 的构成区间.

设 (α_i,β_i) 是 G 的构成区间，任取 $x_0\in(\alpha_i,\beta_i)$，则

$$x_0\in G=\bigcup_i(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i),$$

故存在 j 使 $x_0\in(\hat{\alpha}_j,\hat{\beta}_j)$. $(\hat{\alpha}_j,\hat{\beta}_j)$ 也是 G 的构成区间，由第一步知 (α_i,β_i) 必与 $(\hat{\alpha}_j,\hat{\beta}_j)$ 相同. 定理的后一半得证. ▍

注 1 如果把 $(\alpha,\beta)(-\infty,\alpha)(\alpha,+\infty)(-\infty,+\infty)$（其中 α，β 为实数）都称为开区间，把定义 1 按此新意义来理解（注意到 $-\infty$，$+\infty$ 不是区间端点），这时把定理 1 中的“有界开集”改为“任意开集”仍然成立，证明过程也只需注意到 $-\infty$，$+\infty$ 不是区间端点来作少许修改.

注 2 $R^N(N>1)$ 中的某些有界开集，例如 $U(\theta,1)$，不能表为若干两两无交的开区间之并.

定义 2 设 F 是 R^1 中闭集，若非空开区间 $(\alpha,\beta)\subset\mathscr{C}F$，但 (α,β) 的端点属于 F，就称 (α,β) 是闭集 F 的一个**邻接区间**.

例 2·4·2 有界闭集 $[0,1]\cup[2,3]\cup\{4\}$ 有两个邻接区间：$(1,2)$，$(3,4)$.

定理 2 设 F 是 R^1 中非空的有界闭集，则有下面的结论：

(i) 存在唯一的闭区间 $[\mu,\nu]$，使 $[\mu,\nu]\supset F$ 且端点 μ,ν 属于 F（这样的 $[\mu,\nu]$ 称为包含闭集 F 的最小闭区间）；

(ii) F 当不恰是上述的$[\mu,\nu]$时必然是从上述的$[\mu,\nu]$挖去有限个或可列个两两无交的非空开区间所得到的集，并且把 F 表成这样的形式时所挖去的那些非空开区间的全体恰是闭集F的邻接区间的全体(从而这种形式的表示，表示法是唯一的).

证明　(i) 取 $\mu=\inf\limits_{x\in F}x$ 及 $\nu=\sup\limits_{x\in F}x$，由 F 有界知 $-\infty<\mu\leqslant\nu<+\infty$，显然 $F\subset[\mu,\nu]$. 由下确界的定义知存在点列$\{\mu_n\}\subset F$使$\mu_n\to\mu$，而F是闭集，故$\mu\in F$. 同理可知$\nu\in F$. 所以$[\mu,\nu]$是包含 F 的最小闭区间. 显然这样的闭区间是唯一的.

(ii) 第一步. 记 $G=[\mu,\nu]\backslash F$，则

$$G=[(\mu,\nu)\cup\{\mu,\nu\}]\backslash F=(\mu,\nu)\backslash F=(\mu,\nu)\cap\mathscr{C}F.$$

$\mathscr{C}F$ 是开集，故 G 是含于$[\mu,\nu]$的开集. $F=[\mu,\nu]\backslash G$. 若 $G=\varnothing$，则 $F=[\mu,\nu]$；若$G\neq\varnothing$，由定理1知G为含于$[\mu,\nu]$中的有限个或可列个两两无交的非空开区间之并. (ii) 的前一半得证.

第二步. 设 $F=[\mu,\nu]\backslash\bigcup\limits_i(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)$，其中诸$(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)$是含于$[\mu,\nu]$中的有限个或可列个两两无交的非空开区间. 显然 $\bigcup\limits_i(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)$是非空有界开集. 由定理 1 知所有的$(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)$恰为$\bigcup\limits_i(\hat{\alpha}_i,\hat{\beta}_i)=[\mu,\nu]\backslash F$ 的所有构成区间，从而恰为 F 的所有邻接区间，(ii) 的后一半得证. ▌

注 1　如果把$(\alpha,\beta、)(-\infty,\alpha)(\alpha,+\infty)(-\infty,+\infty)$(其中$\alpha$，$\beta$为实数)都称为开区间，把定义 2 按此新意义来理解，这时由定理 1 的注 1 立即可得到如下的结论：

设 F 是R^1中的闭集，则 F 当不恰是R^1时必然是从R^1挖去有限个或可列个两两无交的非空开区间所得到的集，并且把 F 表成这样的形式时所挖去的那些非空开区间的全体恰是闭集F的邻接区间的全体(从而这种形式的表示，表示法是唯一的).

注 2　$R^N(N>1)$中的某些有界闭集，例如$\overline{U(\theta,1)}$，不能从一

个闭区间挖去若干两两无交的开区间来得到.

2·4·2 R^N 中开集、闭集的构造

定理3 R^N 中的开集G必可表为可列个两两无交的半开区间之并(这可列个半开区间的全体称为开集 G 的一个 **半开区间分解.**)

证明 若$G=\varnothing$,可表$G=\varnothing+\varnothing+\cdots$定理得证.下设$G\neq\varnothing$.

对任意自然数k,设R^N的起点为θ边长为$\dfrac{1}{2^k}$的半开区间分解为$\{I_i^k\}$

在$\{I_i^1\}$中取所有包含于G的半开区间记作$\{J_j^1\}$再在$\{I_i^2\}$中取所有包含于$G\backslash(\bigcup\limits_j J_j^1)$的半开区间记作$\{J_j^2\}$,然后在$\{I_i^3\}$中取所有包含于$G\backslash(\bigcup\limits_j J_j^1)\backslash(\bigcup\limits_j J_j^2)$的半开区间记作$\{J_j^3\}$,如此继续下去.

显然$\{J_j^1\},\{J_j^2\},\cdots,\{J_j^k\},\cdots$中大大小小的所有半开区间至多为可列个,并且这些半开区间两两无交.把所有这些半开区间(当为有限个时再补上可列个空集)重新编号记作$J_1,J_2,\cdots,J_n,\cdots$下证$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J_n$.

由上面的选取过程立即知$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J_n\subset G$.再证$G\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J_n$:设$x_0\in G$,由$G$是开集知存在$x_0$的邻域$U(x_0,\delta)\subset G$.另一方面,对每个自然数$k$,$R^N$的半开区间分解$\{I_i^k\}$中显然有唯一的一个半开区间$I_{i_k}^k$含$x_0$,并且$I_{i_1}^1\supset I_{i_2}^2\supset I_{i_3}^3\supset\cdots$,当$k\to\infty$时$I_{i_k}^k$的对角线长趋于0.所以存在$k_0$使$I_{i_{k_0}}^{k_0}\subset U(x_0,\delta)\subset G$.不防设$k_0$是满足$I_{i_k}^k\subset G$的最小的$k$,则$I_{i_{k_0}}^{k_0}$是$\{J_i^{k_0}\}$中的半开区间,故$x_0\in I_{i_{k_0}}^{k_0}\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J_n$.由$x_0$是$G$的任意点知$G\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J_n$.总之$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}J_n$. ▌

注 非空开集G的半开区间分解显然不是唯一的.

定理 4　(i) 设 F 是 R^N 中的闭集，则 F 可以从 R^N 挖去可列个两两无交的半开区间来得到.

(ii) 设 F 是 R^N 中的有界闭集，则 F 可以从任给的包含 F 的开区间 I 挖去可列个两两无交的半开区间来得到.

证明　(i) $G = R^N \backslash F$ 是开集. $F = R^N \backslash G$. 由定理 3 便得证.

(ii) 设开区间 $I \supset F$，则 $G = I \backslash F = I \cap \mathscr{C} F$ 为开集. $F = I \backslash G$. 由定理 3 便得证. ▌

注　设非空闭集 $F \neq R^N$，把 F 表为定理 4(i) 或 (ii) 所述的形式，表示法都不是唯一的.

§2·5　点集间的距离·有界闭集的性质

定义 1　若 A, B 是 R^N 中两个非空的点集，我们把非负实数

$$\inf\{\rho(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

称为 A 与 B 间的距离，记作 $\rho(A, B)$.

如果 A 是单点集 $\{x_0\}$，这时 A 与 B 间的距离又叫做点 x_0 到点集 B 的距离，可改记作 $\rho(x_0, B)$.

显然，若 $A \cap B \neq \varnothing$ 则 $\rho(A, B) = 0$. 但其逆不真.

例 2·5·1　设 $A = (0,1)$，$B = (1,2)$，则 $A \cap B = \varnothing$，但 $\rho(A, B) = 0$.

R^N 空间中的有界闭集具有许多引人注目的性质. 例如下面的定理 1、定理 2.

定理 1　设 A 为非空有界闭集，B 对非空闭集，则存在 $x_0 \in A$，$y_0 \in B$，使 $\rho(x_0, y_0) = \rho(A, B)$.

证明　第一步找出 x_0 点：由 $\rho(A, B)$ 的定义知，存在点列 $\{x_n\} \subset A$，$\{y_n\} \subset B$，使 $\rho(x_n, y_n) \to \rho(A, B)$. $\{x_n\}$ 是有界点列，故存在收敛子列 $\{x_{n_i}\}$. 设 $x_{n_i} \to x_0$，由 A 是闭集知 $x_0 \in A$.

第二步找出 y_0 点：考察与$\{x_{n_i}\}$相应的点列$\{y_{n_i}\}$. 由 $\rho(x_{n_i}, y_{n_i}) \to \rho(A,B)$ 知 $\rho(x_{n_i}, y_{n_i})$ 有界. 由 $\rho(x_{n_i}, x_0) \to 0$ 知$\{\rho(x_{n_i}, x_0)\}$有界. 因为 $\rho(y_{n_i}, x_0) \leqslant \rho(x_{n_i}, y_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, x_0)$，所以$\{\rho(y_{n_i}, x_0)\}$也有界. 因此$\{y_{n_i}\}$是有界点列，$\{y_{n_i}\}$中存在收敛子列$\{y_{n_{i_k}}\}$. 设 $y_{n_{i_k}} \to y_0$，由 B 是闭集知 $y_0 \in B$.

第三步证 $\rho(x_0, y_0) = \rho(A,B)$：

$$\rho(A,B) \leqslant \rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, x_{n_{i_k}}) + \rho(x_{n_{i_k}}, y_{n_{i_k}}) + \rho(y_{n_{i_k}}, y_0) \to \rho(A,B),$$

所以 $\rho(x_0, y_0) = \rho(A,B)$. ▌

系 1 设 A 为非空有界闭集，B 为非空闭集，若 $A \cap B = \varnothing$，则 $\rho(A,B) > 0$.

证明 由定理1知，存在 $x_0 \in A, y_0 \in B$，使 $\rho(x_0, y_0) = \rho(A,B)$. 由 $A \cap B = \varnothing$ 知 $x_0 \neq y_0$，故 $\rho(x_0, y_0) > 0$，从而 $\rho(A,B) > 0$. ▌

定理1及系1中的条件“A为非空有界闭集”不能改为“A为非空闭集”.

例 2·5·2 设 R^1 中点集 $A = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，

$B = \left\{1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{3}, \cdots, n + \frac{1}{n+1}, \cdots\right\}$. 显然，$A$ 与 B 都是闭集，$A \cap B = \varnothing$. 当 $x \in A$、$y \in B$ 时 $\rho(x,y) > 0$，而 $\rho(A,B) = 0$.

对于点集 E，若点集族$\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$满足 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} E_\alpha \supset E$，就称$\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$是 E 的一个**复盖**. 或称$\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$复盖 E（有时也说 $E_\alpha, \alpha \in I$ 合起来复盖 E）.

设$\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$是 E 的复盖，(i) 若 $J \subset I$ 而$\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$仍是 E 的复盖，即$\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$是$\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$的一个能复盖 E 的子族，就称(E 的)复盖$\{E_\alpha\}_{\alpha \in J}$是($E$ 的)复盖$\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$的一个**子复盖**；

(ii) 若 I 为有限集，即有限个集 $E_\alpha, \alpha \in I$ 合起来复盖 E，就称

$\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 的**有限复盖**,类似地可定义**无限复盖**、**可列复盖**等;

(iii) 若每个 $\alpha\in I$ 所相应的 E_α 都是开集,即 E 的复盖 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是开集族,就称 $\{E_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 E 的**开集复盖**,类似地可定义**半开区间复盖**、**球形邻域复盖**等.

("(E 的) 复盖 $\{E_\alpha\}$ 的可列子复盖"指的是 $\{E_\alpha\}$ 中可列个集所组成的(E 的) 复盖,"(E 的) 有限半开区间复盖"指的是由有限个半开区间所组成的(E 的) 复盖,如此等等.)

定理 2 (**Borel 有限复盖定理**) 设 F 是一个有界闭集,M 是一族开集,M 复盖 F,则可从 M 中选出有限个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_n$,合起来复盖 F.

定理 2 简单地说就是:有界闭集的任何开集复盖都存在有限子复盖,这个定理有多种证法,下面的证法基本上是属于 Lebesgue 的.

证明　不妨设 $F\neq\varnothing$($F=\varnothing$ 时定理显然成立).

第一步. 先证存在正数 λ,使得任一以 F 的点为中心以 λ 为半径的球形领域,都必包含于 M 中的一个开集内. 这样的数 λ 称为 E 的开集复盖 M 的 Lebesgue 数.

用反证法. 假若不存在这样的数 λ,则对于每个自然数 n,都存在 $x_n\in F$,使 $U\left(x_n,\dfrac{1}{n}\right)$,不包含于 M 中的任何一个开集内. 由 F 有界知点列 $\{x_n\}_1^\infty$ 有界,由 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\{x_n\}_1^\infty$ 中存在收敛于某一点 x_0 的子列 $\{x_{n_i}\}_{i=1}^\infty$,由 F 是闭集知 $x_0\in F$. 由 M 复盖 F 知存在 $G\in$ M(即存在 M 中的开集 G) 使 $x_0\in G$,从而存在 $\delta>0$ 使 $U(x_0,\delta)\subset G$. 由于 $x_{n_i}\to x_0$,故可取充分大的 n_i 使

$$\rho(x_{n_i},\ x_0)<\frac{\delta}{2}\quad 且\quad \frac{1}{n_i}<\frac{\delta}{2},$$

于是

$$U\left(x_{n_i},\frac{1}{n_i}\right)\subset U(x_0,\delta)\subset G\in \mathrm{M}.$$

此与 x_{n_i} 的定义矛盾. 这就证明了 Lebesgue 数 λ 是存在的.

第二步. 再证 F 的复盖 M 有有限子复盖, 取正数 $l<\lambda/\sqrt{N}$, 设 R^N 的边长为 l 的半开区间分解为 $\{I_n\}_1^\infty$. 每个 I_n 的对角线长为 $\sqrt{N}l$, 故 I_n 中任两点的距离小于 λ. 令

$$F_n = F \cap I_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

由 F 有界知 $F_1, F_2, F_3, \cdots$ 中只有有限个不是空集, 不妨设不是空集的为 $F_1, \cdots, F_k$, 则 $F=\bigcup_{i=1}^k F_i$. 在每个 F_i 中任取一点 x_i, 作邻域 $U(x_i,\lambda)$, 则 $F_i \subset U(x_i,\lambda)$, 由第一步知存在 $G_i \in$ M 使 $U(x_i,\lambda) \subset G_i$. 这样便得到 M 中的有限个开集 $G_1, \cdots, G_k$, 且有

$$F=\bigcup_{i=1}^k F_i \subset \bigcup_{i=1}^k U(x_i,\lambda) \subset \bigcup_{i=1}^k G_i,$$

即 $\{G_i\}_1^k$ 复盖 F. ▌

§2·6 完备集·Cantor 集

定义 1 设 E 是 R^N 中的点集, 若 $E'=E$, 就称 E 是**完备集**.

如果点集 E 的每个点都是它的聚点, 我们就说 E 是**自密**的. 因此, 完备集就是自密的闭集.

例 2·6·1 不是单点集的闭区间是完备集. R^N 及 $\varnothing$ 都是完备集.

下面我们来研究完备集的一个重要的例子 ——Cantor 集. 它有许多"奇怪"的性质, 因而在有关点集、测度、函数性质的讨论中往往可以用它构造一些具体的例子来说明某方面的问题.

定义 2 把闭区间 $[0,1]$ 用分点 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{2}{3}$ 三等分, 删除中间的开区间 $I_1^1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. 再把余下的两个闭区间分别三等分, 分别删除中间的开区间 $I_1^2=\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ 及 $I_2^2=\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$. 然后把余下的四

个闭区间分别三等分，分别删除中间的开区间

$$I_1^3=\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right),\ I_2^3=\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right),\ I_3^3=\left(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right),\ I_4^3=\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right).$$

如此一直继续下去. 一般地说，第 $n-1$ 次删除后余下 2^{n-1} 个闭区间，第 n 次删除的开区间是

$$I_1^n=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\ I_2^n=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\cdots$$

$$I_{2^{n-1}}^n=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right).$$

我们把逐次删除的所有开区间的并 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n\right)$ 记作 K^C，把 $[0,1]\setminus K^C$ 记作 K，点集 K 称为 Cantor 集.

定理 1 Cantor 集 K 有如下性质：

(i) K 是非空完备集.

(ii) K 没有内点.

(iii) K 具有连续势.

证明 (i) $K^C=\bigcup\limits_{n,k} I_k^n$ 是含于 $[0,1]$ 的开集，故

$$K=[0,1]\setminus K^C=[0,1]\cap \mathscr{C}K^C$$

是非空闭集. 由 §2·4 定理 2 知每个 I_k^n 是 K 的邻接区间，故其端点属于 K，$[0,1]$ 的端点显然也属于 K.

再证 K 是自密的. 这只需设 $x_0\in K$ 来证 x_0 的任何领域 $U(x_0,\delta)$ 中总存在异于 x_0 而属于 K 的点：由 $x_0\in K$ 知在定义 2 所述的每次删除后 x_0 总属于余下的某个闭区间. 设第 n 次删除所余下的诸闭区间中含 x_0 者为 J^n. 显然当 $n\to\infty$ 时 J^n 的长趋于 0. 因此，对于任意 $\delta>0$，当 n 充分大时 $J^n\subset U(x_0,\delta)$，而闭区间 J^n 的两个端点均属于 K(这由诸 I_k^n 的端点及 0,1 均属于 K 即知)，故 $U(x_0,\delta)$ 中存在异于 x_0 而属于 K 的点.

总之 K 是自密的非空闭集，即 K 是非空完备集.

(ii) 设 $x_0 \in K$,在定义 2 所述的第 n 次删除后 x_0 必属于余下的某闭区间 J^n. 对于任意 $\delta > 0$,当 n 充分大时 $J^n \subset U(x_0, \delta)$,由 K 的定义知 J^n 的中点不属于 K,故 $U(x_0, \delta)$ 中有不属于 K 的点,因此 x_0 不是 K 的内点. 所以 K 没有内点.

(iii) 考察定义 2 所述的逐次删除过程. 第 1 次删除后,$[0,1]$ 变成了左、右两个小闭区间 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$、$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$,分别记其为 J_0, J_1. 第 2 次删除后,J_0 变成了左、右两个更小的闭区间,分别记其为 J_{00}, J_{01},J_1 也变成了左、右两个更小的闭区间,分别记其为 J_{10}, J_{11}. 如此一直作下去. 于是,第 n 次删除后所余下的闭区间之全体(记作 $\mathcal{J}_n$)为

$$\{J_{a_1 a_2 \cdots a_n} \mid a_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\cdots,n\},$$

其中的 $J_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 经第 $n+1$ 次删除后所变成的左、右两个小闭区间分别为 $J_{a_1 a_2 \cdots a_n 0}$, $J_{a_1 a_2 \cdots a_n 1}$.

设

$$D = \{(a_1, a_2, \cdots) \mid a_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\cdots\}.$$

今作 K 到 D 的映射 f:设 x 是 K 中任意一点,则对任意 $n \in \mathbf{N}$ 存在唯一的 $J_{a_1 \cdots a_n} \in \mathcal{J}_n$ 使 $x \in J_{a_1, \cdots, a_n}$,又有唯一的 $a_{n+1} \in \{0,1\}$ 使 $x \in J_{a_1 \cdots a_n a_{n+1}}$,于是便得到一串含 x 的闭区间 $J_{a_1}, J_{a_1 a_2}, J_{a_1 a_2 a_3}$, $\cdots$,由此再作出 D 的元素 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$,我们定义 x 在 f 下在象为 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$.

设 $(a_1, a_2, a_3, \cdots)$ 是 D 的任意一元,相应地取 $J_{a_1}, J_{a_1 a_2}$, $J_{a_1 a_2 a_3}, \cdots$ 由闭区间套定理知这串闭区间有唯一的公共点 x,由 K 的定义知 $x \in K$,还易知此 x 且仅此 x 在 f 下的象为 $(a_1, a_2, a_3$, $\cdots)$. 所以 f 是 K 到 D 的一一映射. 由 §1·5 定理 4 知 D 具有连续势,故 K 也具有连续势. ▌

定义 3 设 α 是一个不大于 1 的正数. 把 $[0,1]$ 从正中央挖去长为 $\frac{1}{3}\alpha$ 的开区间 I_1^1,再把余下的两个闭区间分别从正中央挖去

长为$\frac{1}{3^2}\alpha$的开区间I_1^2,I_2^2,第3次则把余下的四个闭区间分别从正中央挖去长为$\frac{1}{3^3}\alpha$的开区间I_1^3,I_2^3,I_3^3,I_4^3,如此一直继续下去.我们把逐次挖去的所有开区间的并$\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_k^n)$记作$K_\alpha^C$,把$[0,1]\setminus K_\alpha^c$记作$K_\alpha$,点集$K_\alpha$称为**α－Cantor集.**

α－Cantor集当$\alpha=1$时即Cantor集.对于α－Cantor集,定理1所述的三条性质仍然成立,证明过程也相同.

习 题 二

1. 证明 §2·1 命题4.

2. 设$\{x_n\}$,$\{y_n\}$是R^N中二点列.若$x_n \to x_0$,$y_n \to y_0$,则$\rho(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.

3. 设$f(x)$是R^1上的实值函数,称R^2中的点集$\{(x,y) \mid x \in R^1, y = f(x)\}$为$f(x)$的图像.若

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x \in R^1 \setminus \{0\} \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

试求其图像的内部、导集、闭包.

4. 若点集E仅有一个聚点,则E是可列集.

5. x_0为E的弧立点的充要条件是:x_0为E的边界点且x_0非E的聚点.

6. 若点集E的每个点都是E的弧立点,就称E为**孤立点集**.证明弧立点集必为有限集或可列集.

7. 证明:(i) 若$A \subset B$,则$A^\circ \subset B^\circ$,$A' \subset B'$;

(ii) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$;

(iii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

8. 证明"求闭包"运算具有下列性质:(i) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;

(ii) $\overline{A} \supset A$;

(iii) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;

(iv) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(这四条性质又称为 Kuratowski 闭包公理)

9. 记$A' = A^{(1)}$,$(A^{(1)})' = A^{(2)}$,$\cdots$,$(A^{(n)})' = A^{(n+1)}$,$\cdots$试作一点集A,使$A^{(n)}$,$n = 1,2,\cdots$彼此相异.

10. 若E'是可列集,则E是可列集.

11. $\overline{E}$恰是包含 E 的所有闭集的交.

12. 若开区间 $I \supset \overline{E}$,则$\{ F \mid F$ 为闭集,$F \subset E\} = \{ I \backslash G \mid G$ 为开集,$I \supset G \supset I \backslash E\}$.

13. 点集 E 的边界点的全体称为 E 的边界,通常记作 ∂E. 证明 $\partial E = \overline{E} \backslash E^{\circ}$.

14. R^N 上的实值函数 $f(x)$ 在 R^N 上连续的充要条件是:对任何 R^1 中的开集 G,点集$\{x \mid f(x) \in G\}$ 都是 R^N 中开集.

15. R^N 上的实值函数 $f(x)$ 在 R^N 上连续的充要条件是:对任何 $a \in R^1$,$\{ x \mid f(x) \geqslant a\}$ 与$\{ x \mid f(x) \leqslant a\}$ 都是闭集.

16. 设 $f(x)$ 是区间$[a,b]$上的实值函数. 证明 $f(x)$ 的第一类不连续点至多有可列个.

17. 设 F 是 R^1 中的非空闭集,作 R^1 上的实值函数 $f(x)$,使 $f(x)$ 的不连续点全体恰是 F.

18. 证明 R^2 中的有界开集$\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ 不能表成可列个两两无交的开区间之并.

19. R^N 中任何开集都可以表成可列个开区间的并.

20. 证明由 R^N 中的所有开集组成的集具有连续势. 问由 R^N 中的所有闭集组成的集具有何基数?

21. 设 $E \subset R^N$,$E \neq \varnothing$,x、$y \in R^N$,则

$$\rho(x,E) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,E).$$

22. 非空点集 A 为闭集当且仅当对每个 $x \in R^N$ 恒有 $y \in A$ 使 $\rho(x,A) = \rho(x,y)$.

23. 证明 R^N 中既是开集又是闭集的点集仅 R^N 与 $\varnothing$ 两个.

24. 设 E 是非空点集,$d > 0$,V 是到 E 的距离小于 d 的所有点组成之集,即

$$V = \{ x \mid \rho(x,E) < d\},$$

则 V 是包含 E 的开集.

25. 任何闭集均可表成可列个开集的交. 任何开集均可表成

可列个闭集的并.

26. (隔离性定理)设 F_1, F_2 是两个有界闭集,$F_1 \cap F_2 = \varnothing$,则存在两个开集 G_1、G_2,使 $G_1 \supset F_1, G_2 \supset F_2, G_1 \cap G = \varnothing$.(把这个定理中的“有界”二字去掉仍然成立)

27. 试用 Borel 有限复盖定理证明 Bolzano－Weierstrass 定理.

28. (Lindelof 定理)设 E 是任一点集,M 是一族开集,M 复盖 E,若 M 中有无限多个开集,则可从 M 中选出可列个开集 $G_1, G_2, G_3, \cdots$,合起来复盖 E.

29. 证明点集 E 为自密的当且仅当 E 没有孤立点.

30. 如果 E 是 R^1 中非空的有界完备集,那么 E 或者是一个长度为正数的闭区间,或者是从一个正长度闭区间 $[\mu,\nu]$ 挖掉有限或可列个满足下述条件的非空开区间而成:这些开区间两两无交,彼此无公共端点且与 $[\mu,\nu]$ 也无公共端点.这个命题的逆命题也是正确的.

31. R^1 中非空的有界完备集具有连续势.

32. 证明闭区间[0,1]不能表成可列个两两无交的闭区间之并.

33. R^1 中的非空有界闭集一定能表成有限个或可列个两两无交的闭区间之并吗?

34. 把 Cantor 集 K 对于[0,1]的余集记作 K^C.设 E 是 K^C 的所有构成区间的中点组成之点集,求 E'.

35. 设 K_α 是 α－Cantor 集,$K_\alpha^C = [0,1] \setminus K_\alpha$,则 $\overline{K_\alpha^C} = [0,1]$.

第三章 测 度

§3·1 引 言

我们知道平面中的矩形是可言及面积的，面积值就是它的两个边长的乘积. 平面中还有哪些点集可言及面积（可确定出面积值）？面积值是什么？这是一个值得研究的问题.

我们首先来看 Jordan 所建立的面积概念.

以下凡说到点集，若未声明点集所在的空间，均指平面 R^2 中的点集.

对于区间 $I=\langle a_1,b_1;a_2,b_2\rangle$（其中 $-\infty<a_i\leqslant b_i<\infty$），我们把它的边长积 $(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)$ 记作 $|I|$.

定义 1 设 E 是任一有界点集. 若对于 E 的每个有限半开区间复盖 $\{I_i\}_1^n$（n 为任意自然数），都求出其半开区间的边长积之和 $\sum_{i=1}^{n}|I_i|$，所有这样得到的数组成一个数集，这个数集的下确界称为 E 的 Jordan 外面积，记作 m_J^*E. 即

$$m_J^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{n}|I_i|\,\middle|\,n\in\mathbf{N},\text{诸 }I_i\text{ 为半开区间，}\bigcup_{i=1}^{n}I_i\supset E\right\}.$$

易知，区间 I 的 Jordan 外面积 m_J^*I 恰等于它的边长积 $|I|$.

例 3·1·1 设 $I=(0,1;0,1]$，E 为 I 中有理点的全体，易知

$$m_J^*I=|I|=1,\quad m_J^*E=1,\quad m_J^*(I\backslash E)=1.$$

假如我们就把每个有界点集的 Jordan 外面积定义为它的面积，这样做固然可使任何有界点集都有了“面积”可言，但是下述

的“有限可加性”不能成立：

当两个无交的点集及其并集都有面积可言时，这两个点集的面积之和等于其并集的面积.

例如，上面例 3·1·1 中的点集 E 与 $I\setminus E$ 无交，$E\cup(I\setminus E)=I$，但

$$m_J^*E+m_J^*(I\setminus E)>m_J^*I.$$

为了保证有限可加性的成立，Jordan 不是把全部而是把某些有界点集的 Jordan 外面积定义为它的面积，并且仅仅说这些有界点集是有面积可言的，他所作的定义是

定义 2 设 E 是有界点集. 若存在半开区间 $I\supset E$，使

$$m_J^*E+m_J^*(I\setminus E)=|I|,$$

就称 E 是 Jordan 可测的，或称 E 是有(Jordan) 面积可言的，对于这样的点集 E 就把它的 Jordan 外面积 m_J^*E 定义为它的(Jordan) 面积，记作 m_JE.

易知，任何区间 I 都是 Jordan 可测的，其(Jordan) 面积恰等于它的边长积 $|I|$. 例 1 中的点集 E 及 $I\setminus E$ 都不是 Jordan 可测的，即没有(Jordan) 面积可言.

设 E 是平面 R^2 中的有界点集，任取包含 E 的半开区间 I，用两组分别平行于坐标轴的直线把半开区间 I 划分成有限个两两无交的半开区间 $\{I_i\}$，使每个半开区间 I_i 的各边长都小于正数 h(图 3·1·1). 取 $\{I_i\}$ 中所有与 E 相交的半开区间，记其(Jordan) 面积的和为 S_h，不难证明

$$\lim_{h\to 0^+}S_h=m_J^*E. \qquad (3\cdot 1\cdot 1)$$

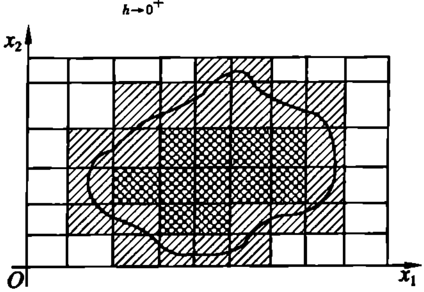

图 3·1·1

对上述图形，取$\{I_i\}$中所有完全含于E的半开区间，记其(Jordan)面积的和为s_h. 再取$\{I_i\}$中所有与$I\backslash E$相交的半开区间，记其(Jordan)面积的和为T_h. 显然$s_h = |I| - T_h$. 由此容易证明

$$\lim_{h\to 0+} s_h = |I| - m_J^*(I\backslash E). \qquad (3\cdot 1\cdot 2)$$

我们还不难看出，不论最初如何选取包含E的半开区间I，$\lim\limits_{h\to 0+} s_h$的值是不变的，因而$|I| - m_J^*(I\backslash E)$的值是不变的. 我们把此仅与$E$相关的数值$\lim\limits_{h\to 0+} s_h$称为$E$的Jordan内面积，记作$m_*^J E$.

由以上两段的讨论立即知

定理 1　有界点集E为Jordan可测集的充要条件是：

$$m_J^* E = m_*^J E \quad (\text{或} \lim_{h\to 0+} S_h = \lim_{h\to 0+} s_h).$$

注　若把定义2中的"存在半开区间$I \supset E$"改为"存在开区间$I \supset E$"，所得定义与原定义等价.

事实上，若开区间$I = (a_1, b_1; \cdots; a_N, b_N) \supset E$，则半开区间

$$\hat{I} = (a_1, b_1; \cdots; a_N, b_N] \supset E,$$

由定义1易知

$$|I| - m_J^*(I\backslash E) = |\hat{I}| - m_J^*(\hat{I}\backslash E),$$

而

$$|\hat{I}| - m_J^*(\hat{I}\backslash E) = m_*^J E,$$

可见$m_J^* E = m_*^J E$的充要条件是存在开区间$I \supset E$使

$$m_J^* E + m_J^*(I\backslash E) = |I|,$$

再由定理1即知所说的二定义等价.

例 3·1·2　设$G = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2 \in K_{\frac{1}{2}}^C\}$

(其中$K_{\frac{1}{2}}^C$是$\frac{1}{2}$－Cantor集$K_{\frac{1}{2}}$对于$[0,1]$的余集).

G是有界开集. 由定理1易知G不是Jordan可测的.

Jordan可测集及其Jordan面积有如下的性质(证明从略)：

定理 2　设Jordan可测集的全体为J.

(i) 若 $E_1 \in \mathrm{J}, E_2 \in \mathrm{J}$,则 $E_1 \cup E_2 \in \mathrm{J}, E_1 \setminus E_2 \in \mathrm{J}$.

(ii) 对任何 $E \in \mathrm{J}$,有 $m_{\mathrm{J}} E \geqslant 0$. (非负性)

(iii) $m_{\mathrm{J}} \varnothing = 0$.

(iv) 若 $E_i \in \mathrm{J}(i = 1,2,\cdots), E_i \cap E_j = \varnothing (i \neq j)$,并且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathrm{J}$,则

$$m_{\mathrm{J}} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \sum_{i=1}^{\infty} m_{\mathrm{J}} E_i. \quad \text{(可列可加性)}$$

(v) 若 $E \in \mathrm{J}, m_{\mathrm{J}} E = 0, E_1 \subset E$,则 $E_1 \in \mathrm{J}, m_{\mathrm{J}} E_1 = 0$.(完全性)

由性质(iii)及(iv)立即可知:若 E_1、$E_2 \in \mathrm{J}, E_1 \cap E_2 = \varnothing$,并且 $E_1 \cup E_2 \in \mathrm{J}$,则

$$m_{\mathrm{J}} E_1 + m_{\mathrm{J}} E_2 = m_{\mathrm{J}} (E_1 \cup E_2).$$

即前面所说的“有限可加性”成立.

Jordan 所建立的面积概念有一个不能令人满意之处,就是下述的“对‘可列并’运算的封闭性”不能成立:

若可列个点集都有面积可言,则其并集也有面积可言.

例如,例 3·1·1 中的 E 是可列点集,它的每个点作为单点集有(Jordan)面积可言,(Jordan)面积为 0,但 E 是没有(Jordan)面积可言的.再如,例 3·1·2 中的有界开集 G 可表为可列个两两无交的区间之并,每个区间有(Jordan)面积可言,但 G 是没有(Jordan)面积可言的.

能否推广 Jordan 的面积概念使之不再有上述的缺点?详细一点说,能否作出这样的面积定义,使之满足以下的三条要求?

(i) 当一个点集按 Jordan 的定义有面积可言时,按新定义也有面积可言,并且面积值相同.

(ii) 新定义下的面积,仍满足非负性、可列可加性及完全性.

(iii) 全体按新定义有面积可言的点集,不仅对“有限并”及“差”运算是封闭的,而且对“可列并”运算也是封闭的.

Lebesgue 的面积概念正是出于以上的考虑作出的. 它的定义事实上是把上面的定义 1 及定义 2 作了如下的改动和补充：

(1°) 对于定义 1,把其中的"E 为任一有界点集"改为"E 为任一点集",把"对 E 的每个有限半开区间复盖 $\{I_i\}_1^n$ 求出 $\sum_{i=1}^{n}|I_i|$"改为"对 E 的每个可列半开区间复盖 $\{I_i\}_1^\infty$ 求出 $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|$",便得到"Lebesgue 外面积 m^*E"的定义(见 §3·2).

(2°) 对于定义 2(其中的"存在半开区间 $I\supset E$"可改为"存在开区间 $I\supset E$"),把其中的 m^* 理解为 Lebesgue 外面积的符号,便得到"有界点集 E 是 Lebesgue 可测的"及"Lebesgue 面积 mE"的定义(见 §3·3).

(3°) 对于无界点集 E,利用 R^2 的半开区间分解把 E 划分成可列个有界点集,当诸有界点集都 Lebesgue 可测时就称 E 是 Lebesgue 可测的,此时把 E 的 Lebesgue 外面积定义为 E 的 Lebesgue 面积 mE(见 §3·4).

可以证明如此定义的面积能够满足上述的(i),(ii),(iii) 三条要求(见 §3·2～§3·4).

由"对'可列并'运算的封闭性"立即可知例 3·1·1 中的 E 及例 3·1·2 中的 G 都是 Lebesgue 可测的点集. 由开集可表为可列个半开区间的并可知开集都是 Lebesgue 可测的. 由"对'差'运算的封闭性"可知闭集也都是 Lebesgue 可测的.

Lebesgue 的新面积概念使更多的点集可以言及面积,单从这一点已可看出这个面积理论具有更多的深刻性,并且应用范围也更广泛. 由于 Lebesgue 可测点集的全体具有"对'可列并'运算的封闭性",所以仅须知道参与运算的点集是 Lebesgue 可测的就可以利用可列可加性来进行面积的演算,因此 Lebesgue 面积的极限演算要比 Jordan 面积的极限演算通畅和方便得多，特别是新面积

概念的建立必然导致新积分概念的建立,而新面积的种种好处将全面反映到新积分中来.

与 Jordan 面积相应的是 Riemann 积分,它们之间的关系可以从下面的定理看出.

定理3 闭区间$[a,b]$上的非负函数 $f(x)$ 为 Riemann 可积的充要条件是 $f(x)$ 的下方图

$$\{(x,y)\in R^2 \mid x\in[a,b],0\leqslant y<f(x)\}$$

是 Jordan 可测的. 当 $f(x)$ 为非负的 Riemann 可积函数时,$f(x)$ 的 Riemann 积分值恰等于 $f(x)$ 的下方图的 Jordan 面积值.

与 Lebesgue 面积相应的是 Lebesgue 积分,它们之间的关系与定理 3 所说的类似(见 §4·3 中的 3·3·3 问题、§5·1 和 §5·4 中的 5·4·2). 因此,新面积概念有什么好处,新积分概念必然也有类似的好处. 例如,Riemann 可积函数类是很狭窄的,而 Lebesgue 积分能够对更多的函数来进行. 因此,作为一个数学工具,Lebesgue 积分能够更好的适应诸如微分方程、量子力学等数学、物理领域的需要. 再如,前面说到用可列可加性进行新面积演算时不必检验较多的前提条件,反映到新积分中来,积分号与极限号的交换、积分号与积分号的交换等演算便只需检验较弱的条件就可以进行(见 §5·3、§5·4 中的 5·4·3). 因此应用 Lebesgue 积分讨论数学、物理问题,演算起来要比 Riemann 积分通畅和方便的多.

以上讨论是对平面 R^2 来进行的,显然这些讨论无须作实质性的改变便可化为空间 R^N 中的叙述. 只是要把"面积"代之以 N 维空间通用的术语 — 测度,把与面积相应的一元函数积分代之以与 R^{N+1} 中点集测度相应的 N 元函数积分.

本章将于 §3·2 ~ §3·6 详细讨论 R^N 空间 Lebesgue 测度理论. 另外,还将于 §3·7, §3·8 简单介绍 R^N 空间 Lebesgue — Stieltjes 测度理论以及抽象测度理论(此二者自然也有与之相应的积分理论). 本章所建立的测度理论以及随后在此基础上建立的

（可测函数的）积分理论，正是实变函数论的主体内容.

§3·2 Lebesgue 外测度

为了讨论问题方便，我们规定正无限大变量的极限是 $+\infty$（简记为 ∞），负无限大变量的极限是 $-\infty$，这里我们把 ∞，$-\infty$ 看成是两个固定的数，称为**无限数**，以区别于实数 —— **有限数**. 若无特别说明，今后凡说到数，均指集合 $R^1\cup\{\infty,-\infty\}$ 中的元素. 对此新数集中的数，我们规定大小顺序为 $-\infty<a<\infty(a\in R^1)$. 我们说 ∞ 是一个正数，$-\infty$ 是一个负数，并规定 $|\infty|=|-\infty|=\infty$. 我们还规定：数学分析中关于正、负无限大变量的四则运算性质，若把其中所涉及的正、负无限大变量分别看成数 ∞，$-\infty$，便是关于数 ∞，$-\infty$ 的四则运算规则. 例如

(i) $a\in R^1$ 时 $a+(\pm\infty)=\pm\infty$；

$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$；

但 $(\pm\infty)+(\mp\infty)$ 无意义.

(ii) 减去 $(\pm\infty)$ 即加上 $(\mp\infty)$.

(iii) $$u\cdot(\pm\infty)=\begin{cases}\pm\infty, & \text{当 } u>0 \text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } u=0 \text{ 时；}\\ \mp\infty, & \text{当 } u<0 \text{ 时.}\end{cases}$$

(iv) $\dfrac{0}{\pm\infty}=0$；　但 $u\neq 0$ 时 $\dfrac{u}{\pm\infty}$ 无意义.

对 $R^1\cup\{\infty,-\infty\}$ 中的数来说，数列的极限的定义与数学分析中的提法相同（记法也相同），无穷级数的和仍是前 n 项的和当 $n\to\infty$ 时的极限；所谓非空数集 A 有界是指存在实常数 M 使对每个 $u\in A$ 都有 $|u|\leqslant M$；所谓 w（w 为有限数或 $\pm\infty$）为非空数集 A 的下界是指对每个 $u\in A$ 都有 $u\geqslant w$；非空数集 A 的诸下界中之最大者称为 A 的下确界；类似地可定义非空数集的上界及上确界.

例 3·2·1 若 $\{u_n\}\subset R^1\cup\{\infty,-\infty\}$，$u_n\leqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，则 $\{u_n\}$ 必存在极限 u（$\{u_n\}$ 递增地趋于 u 可记作 $u_n\uparrow u$），当 $\{u_n\}$ 有界时 u 为有限数，当 $\{u_n\}$ 没有有限上界时 $u=+\infty$.

例 3·2·2 设 $u_n\to u$，$v_n\to v$，则当 u 与 v 不同时为 $+\infty$ 也不同时为 $-\infty$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=u-v$.

例 3·2·3 若 $u_{ij}\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots)$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}u_{ij}=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}u_{ij}.$$

例 3·2·4 任何非空数集均有上、下确界.

3·2·1 外测度的定义·区间的外测度

若无特别声明，今后凡说到点集，均指 R^N 空间中的点集.

对于区间 $I=\langle a_i,b_i;i=1,2,\cdots,N\rangle$（其中 $-\infty<a_i\leqslant b_i<\infty$），我们称各边长的乘积 $\prod\limits_{i=1}^{N}(b_i-a_i)$ 为它的容度，记作 $|I|$.

定义 1 设 E 是任一(有界或无界)点集. 对于 E 的每个可列半开区间复盖 $\{I_n\}_1^{\infty}$，都求出其所有半开区间的容度之和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|$（它是非负实数或 $+\infty$），一切这样得到的数组成一个数集，这个数集的下确界称为 E 的 Lebesgue 外测度（简称 E 的外测度），记作 m^*E. 即

$$m^*E=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\,\middle|\,\text{诸 }I_n\text{ 为半开区间},\ \bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supset E\right\}.$$

显然任何点集都有外测度，它是非负实数或 $+\infty$.

因为空集 $\varnothing$ 是半开区间，$|\varnothing|=0$，所以，把 E 的有限半开区间复盖 $\{I_i\}_1^n$ 看成由 $I_1,I_2,\cdots,I_n,\varnothing,\varnothing,\cdots$ 所组成的 E 的可列半开区间复盖，不会改变区间容度的和. 因此，R^N 中有界点集的 Jordan 外测度一定不小于其 Lebesgue 外测度. 而且，确有某些点集，其 Jordan 外测度大于其 Lebesgue 外测度. 例如，§3·1·1 例 3·1·1 中的 E，其 Jordan 外测度是 1，而其 Lebesgue 外测度是 0.

命题 1　任何区间 I 的外测度 m^*I 都等于其容度 $|I|$.

这里仅就 I 为半开区间的情况给出证明，其他情况的证明留给读者作练习.

证明　由外测度的定义立即知

$$m^*I \leqslant |I|.$$

再证相反的不等式. 为此，设

$$I = \{x \mid a_i < x_i \leqslant b_i, i = 1, \cdots, N\}, \quad \{I_n\}_1^\infty$$

为复盖 I 的任意半开区间串，其中

$$I_n = \{x \mid a_i^{(n)} < x_i \leqslant b_i^{(n)}, i = 1, \cdots, N\},$$

来证 $|I| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$：

对任给 $\varepsilon > 0$，取充分小的正数 δ，作

$$J = \{x \mid a_i + \delta \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \cdots, N\},$$

使

$$|J| > |I| - \varepsilon \quad (\text{这是可以做到的}).$$

对每个自然数 n，取充分小的正数 δ_n，作

$$J_n = \{x \mid a_i^{(n)} < x_i < b_i^{(n)} + \delta_n, i = 1, \cdots, N\}$$

使

$$|J_n| < |I_n| + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (\text{这是可以做到的}).$$

于是开区间族 $\{J_n\}$ 复盖闭集 J. 由 Borel 有限复盖定理知可选出有限个开区间 $J_{n_1}, J_{n_2}, \cdots, J_{n_k}$ 合起来复盖 J. 因此

$$|J| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |J_{n_i}|,$$

$$|I| - \varepsilon < |J| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |J_{n_i}| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 得

$$|I| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

由于 $\{I_n\}_1^\infty$ 是复盖 I 的任意半开区间串，由外测度的定义知

$$|I| \leqslant m^* I.$$

所以 $m^* I = |I|$. ▌

3·2·2 外测度的基本性质

定理 1 外测度有如下四条基本性质:

(i) 对任何点集 E,有 $m^* E \geqslant 0$;(非负性)

并且 $m^* \varnothing = 0$.

(ii) 若 $E_1 \subset E_2$,则 $m^* E_1 \leqslant m^* E_2$.(单调性)

(iii) $m^* \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} m^* E_i$;(半可列可加性)

$m^* \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} m^* E_i$.(半有限可加性)

(iv) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两距离大于 0,则

$m^* \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \sum\limits_{i=1}^{n} m^* A_i$;(隔距有限可加性)

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两距离大于 0,则

$m^* \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m^* A_i$.(隔距可列可加性)

证明 (i) 显然成立.

(ii) 若 $\{I_n\}$ 为复盖 E_2 的半开区间串,则 $\{I_n\}$ 也复盖 E_1,故 $m^* E_1 \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |I_n|$,由 $m^* E_2$ 的定义即知 $m^* E_1 \leqslant m^* E_2$.

(iii) 任给 $\varepsilon > 0$. 对每个 E_i,由外测度的定义知存在半开区间串 $\{I_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ 使

$$E_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^i, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^i| \leqslant m^* E_i + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

因此

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^i,$$

$$m^* \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n^i| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \left(m^* E_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$,得

$$m^* \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^* E_i.$$

在上式中令 $E_{n+1} = E_{n+2} = \cdots = \varnothing$,得

$$m^* \bigcup_{i=1}^{n} E_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} m^* E_i.$$

(iv) (1°) 证隔距有限可加性. 为此设 $d = \rho(A,B) > 0$,来证

$$m^*(A \cup B) = m^* A + m^* B. \qquad (3 \cdot 2 \cdot 1)$$

由(iii) 知

$$m^*(A \cup B) \leqslant m^* A + m^* B.$$

再证相反的不等式. 任给 $\varepsilon > 0$,由外测度的定义知存在复盖 $A \cup B$ 的半开区间串$\{I_n\}$ 使

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leqslant m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

每个半开区间 I_n 都可以表成有限个两两无交的对角线长小于d 的半开区间 I_n^i 之并 $\bigcup_i I_n^i$(利用 R^N 的边长为 $d/2\sqrt{N}$ 的半开区间分解,这是容易做到的),并且这时 $|I_n| = \sum_i |I_n^i|$.

因此,我们不妨设$\{I_n\}$ 中的每个 I_n 的对角线长都小于d. 这样的 I_n 显然不能同时含有A 与B 的点. 把$\{I_n\}$ 中的所有半开区间分成两组:凡是含有 A 的点的归为一组,记作$\{I_i^{(1)}\}$,其余的归为一组,记作$\{I_j^{(2)}\}$. 显然

$$\bigcup_i I_i^{(1)} \supset A, \qquad \bigcup_j I_j^{(2)} \supset B,$$

$$m^* A + m^* B \leqslant \sum_i |I_i^{(1)}| + \sum_j |I_j^{(2)}|$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \leqslant m^*(A \cup B) + \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$,得

$$m^* A + m^* B \leqslant m^* (A \cup B).$$

所以(1) 式成立.

由 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两距离大于 0 知

$$\rho(\bigcup_{i=1}^{k} A_i, A_{k+1}) > 0 \quad (k = 1, \cdots, n-1).$$

逐次运用(3・2・1) 式便得到

$$m^* \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} m^* A_i.$$

(2°) 证隔距可列可加性. 由(iii) 知

$$m^* \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^* A_i.$$

再证相反的不等式,对任意自然数 n,由外测度的单调性及隔距有限可加性,

$$m^* \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \geqslant m^* \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} m^* A_i.$$

令 $n \to \infty$,得

$$m^* \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m^* A_i.$$

所以 $m^* \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} m^* A_i$. ▌

注 当两个点集 E_1, E_2 无交时,未必有

$$m^* (E_1 \cup E_2) = m^* E_1 + m^* E_2.$$

这从 §3・5 可以看出.

3・2・3 外测度的开集逼近

定理 2 设 E 是任一(有界或无界) 点集,则所有包含 E 的开集的外测度组成一个非空数集,这个数集的下确界恰等于 E 的外测度.

证明 若开集 $G \supset E$,由外测度的单调性知 $m^* G \geqslant m^* E$.

下证：对任给 $\varepsilon>0$，存在开集 $G_\varepsilon\supset E$，使 $m^*G_\varepsilon\leqslant m^*E+\varepsilon$.

由外测度的定义知，存在复盖 E 的半开区间串 $\{I_n\}$ 使

$$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|\leqslant m^*E+\frac{\varepsilon}{2}.$$

对每个 I_n，显然可以作开区间 $J_n\supset I_n$，使

$$|J_n|<|I_n|+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

令

$$G_\varepsilon=\bigcup_{n=1}^{\infty}J_n,$$

则 G_ε 是开集，$G_\varepsilon\supset E$. 由外测度的半可列可加性及命题 1 知

$$\begin{aligned} m^*G_\varepsilon&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*J_n=\sum_{n=1}^{\infty}|J_n|\\ &\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant m^*E+\varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了定理 2. ▌

* **注**　根据外测度的基本性质及命题 1 可以证明：若开集 G 的一个半开区间分解为 $\{I_n\}_1^\infty$，则 $m^*G=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$. 由此及定理 2 可以看出：把定义 1（外测度的定义）中的"对 E 的每个可列半开区间复盖 $\{I_n\}_1^\infty$ 求出 $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$"改成"对 E 的每个由一串两两无交的半开区间所组成的复盖 $\{I_n\}_1^\infty$ 求出 $\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$"，所得到的定义与原定义等价.

§3·3　有界 Lebesgue 可测集

3·3·1　有界可测集的定义·有界开、闭集的可测性

定义 1　设 E 是有界点集. 若存在开区间 $I\supset E$，使

$$m^* E + m^* (I \setminus E) = |I|,$$

就称 E 是**Lebesgue 可测的**(简称 E **可测**). 对于 Lebesgue 可测的点集 E,我们把 E 的 Lebesgue 外测度称为 E 的 **Lebesgue 测度**(简称 E 的**测度**),记作 mE.

例 3·3·1 开区间 I 是可测的,并且 $mI = |I|$.

由定义 1 不难看出,R^N 中的 Jordan 可测集都是 Lebesgue 可测的,并且 Jordan 可测集的 Lebesgue 测度恰等于它的 Jordan 测度. 但是,存在着某些点集(例如 §3·1 例 3·1·1 中的 E),它是 Lebesgue 可测的,却不是 Jordan 可测的.

命题 1 若 G 是有界开集,则 G 可测,并且对任何包含 G 的开区间 I 恒有

$$m^* G + m^* (I \setminus G) = |I|.$$

证明 G 有界,故存在着包含 G 的开区间. 设开区间 $I \supset G$,由外测度的半有限可加性知

$$m^* G + m^* (I \setminus G) \geqslant |I|.$$

再证相反的不等式. 设 $\{I_n\}$ 是开集 G 的一个半开区间分解(不妨认为诸 $I_n \neq \varnothing$). 由外测度的定义知

$$m^* G \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

任给 $\varepsilon > 0$. 对每个 I_n,显然可以作闭区间 $J_n \subset I_n$,使

$$|J_n| > |I_n| - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

闭区间 $J_1, J_2, J_3, \cdots$ 两两无交,每个闭区间 J_n 与闭集 $\bar{I} \setminus G$ 无交,而两个无交的非空有界闭集间的距离大于 0,由 §3·2 命题 1 以及外测度的隔距可列可加性等性质,

$$|I| = m^* I = m^* \left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) \cup (I \setminus G) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&\geqslant m^*\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n\right)\cup(I\backslash G)\right]\\
&=\sum_{n=1}^{\infty} m^* J_n+m^*(I\backslash G)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}|J_n|+m^*(I\backslash G)\\
&\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|-\varepsilon+m^*(I\backslash G)\\
&\geqslant m^* G-\varepsilon+m^*(I\backslash G).
\end{aligned}
$$

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$|I|\geqslant m^* G+m^*(I\backslash G).$$

于是

$$m^* G+m^*(I\backslash G)=|I|.$$

所以 G 可测. ▌

命题 2　设 F 是有界闭集，则 F 可测，并且对任何包含 F 的开区间 I 恒有

$$m^* F+m^*(I\backslash F)=|I|.$$

证明　设开区间 $I\supset F$. 令 $G=I\backslash F$，则 G 是含于 I 的开集，$F=I\backslash G$. 由命题 1 立即知命题 2 成立. ▌

3·3·2　有界点集的内测度·有界点集可测的充要条件

命题 3　设 E 是有界点集，则

$$\inf\{mG\mid G\text{ 为有界开集},G\supset E\}=m^* E.$$

证明　E 有界，故存在开区间 $I\supset E$. 若 G 是包含 E 的开集，则 $G\cap I$ 是包含 E 的有界开集，并且 $m^* G\geqslant m^*(G\cap I)$. 据此，由 §3·2 定理 2 及本节命题 1 便知命题 3 成立. ▌

命题 3 可以与 §3·1 的(3·1·1)式对照. 那里是用有限个两两无交的半开区间的并去复盖 E，逼近 E 的 Jordan 外测度；而这里是用有界开集去复盖 E，逼近 E 的 Lebesgue 外测度.

命题 4　设 E 是有界点集. 若开区间 $I\supset E$，则

$$\sup\{mF \mid F \text{ 是闭集}, F\subset E\} = |I| - m^*(I\setminus E).$$

证明 第一步. 若闭集 $F\subset E$,则 $I\setminus F\supset I\setminus E$,由命题 2 及外测度的单调性知

$$mF = |I| - m^*(I\setminus F) \leqslant |I| - m^*(I\setminus E).$$

第二步. 对任给 $\varepsilon>0$,来证存在闭集 $F_\varepsilon\subset E$,使

$$mF_\varepsilon \geqslant |I| - m^*(I\setminus E) - \varepsilon:$$

由 §3·2 定理 2 知存在开集 $G\supset I\setminus E$,使

$$m^*G \leqslant m^*(I\setminus E) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

不妨设 $I\neq\varnothing$. 显然可以作出闭区间 $J\subset I$,使

$$|I| - |J| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令

$$F_\varepsilon = J\setminus G,$$

则 $F_\varepsilon = J\cap \mathscr{C}G$ 是闭集,$F_\varepsilon\subset I\setminus G\subset E$. 由 $J\subset F_\varepsilon\cup G$ 知

$$m^*J \leqslant m^*(F_\varepsilon\cup G) \leqslant m^*F_\varepsilon + m^*G.$$

因此

$$\begin{aligned} mF_\varepsilon &\geqslant m^*J - m^*G \\ &\geqslant |I| - (|I| - |J|)] - \left[m^*(I\setminus E) + \frac{\varepsilon}{2}\right] \\ &\geqslant |I| - m^*(I\setminus E) - \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了命题 4. ▌

由命题 4 可知,对有界点集 E,只要开区间 I 包含 E,无论 I 如何选取,数 $|I| - m^*(I\setminus E)$ 是不变的.

定义 2 设 E 是任一有界点集. 所有包含于 E 的闭集的测度之上确界

$$\sup\{mF \mid F \text{ 为闭集}, F\subset E\}$$

称为 E 的 Lebesgue **内测度(简称 E 的内测度)**,记作 m_*E.

读者不妨把命题 4 与 §3·1 的(3·1·2)式相对照,把

Lebesgue 内测度的定义与 Jordan 内测度的定义相对照，看有何异同.

由命题 3,4 及内测度的定义立即可知

定理 1　有界点集 E 可测的充要条件是：

$$m^*E=m_*E(\text{或}\inf_{\text{有界开集}G\supset E}mG=\sup_{\text{闭集}F\subset E}mF).$$

下面我们举一个应用定理 1 的简单例子.

命题 5　任何区间都可测.

证明　设 I 为任一区间，来证 $m_*I=m^*I$. 不妨设 $I\neq\varnothing$. 对任意 $\varepsilon>0$，显然可作出闭区间 $J\subset I$，使

$$|J|>|I|-\varepsilon,$$

由 §3·2 命题 1 知上式即

$$m^*J>m^*I-\varepsilon.$$

另一方面，对任何闭集 $F\subset I$，由外测度的单调性知

$$mF\leqslant m^*I.$$

注意到 J 是闭集，由 m_*I 的定义即知 $m_*I=m^*I$. 根据定理 1 知 I 可测. ▌

为了便于应用定理 1 来讨论点集的可测性及测度的性质，我们给出内测度的如下四条性质：

定理 2　(i) 对任意有界点集 E，有 $m_*E\geqslant 0$；$m_*\varnothing=0$.

(ii) 若 E_1,E_2 是有界点集，$E_1\subset E_2$，则 $m_*E_1\leqslant m_*E_2$.

(iii) 若有界点集 E 是有限个或可列个两两无交的点集 E_i 之并 $\bigcup\limits_i E_i$，则

$$m_*E\geqslant\sum_i m_*E_i.$$

(iv) 若 E 是有界点集，则 $m_*E\leqslant m^*E$.

证明　由内测度的定义立即可知(i)，(ii) 成立.

(iii) 先看 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$ 的情况. 任给 $\varepsilon>0$. 对每个 E_i，由内测度

的定义知,存在闭集 $F_i \subset E_i$,使

$$mF_i \geqslant m_* E_i - \frac{\varepsilon}{n}.$$

有界闭集 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 两两无交,从而两两距离大于 0(空集除外),$\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ 是含于E 的有界闭集. 由内测度的定义及外测度的隔距有限可加性,

$$m_* E \geqslant m \bigcup_{i=1}^{n} F_i = m^* \bigcup_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} m^* F_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_* E_i - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$,得

$$m_* E \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_* E_i.$$

再看 $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的情况. 对任意自然数 n,由(ii) 及刚证得的结论,

$$m_* E \geqslant m_* \bigcup_{i=1}^{n} E_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_* E_i.$$

令 $n \to \infty$,得

$$m_* E \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_* E_i.$$

(iv) 若闭集 $F \subset E$,由外测度的单调性知 $mF \leqslant m^* E$. 所以

$$m_* E = \sup\{mF \mid \text{闭集 } F \subset E\} \leqslant m^* E. \ \blacksquare$$

3·3·3 有界可测集及其测度的运算性质

定理 3 若有界集 E 是有限个或可列个两两无交的有界可测集 E_i 之并 $\bigcup_i E_i$,则 E 可测,并且

$$mE = \sum_i mE_i.$$

证明 由内、外测度的性质及定理 1,

$$\sum_i mE_i = \sum_i m_* E_i \leqslant m_* E$$
$$\leqslant m^* E \leqslant \sum_i m^* E_i = \sum_i mE_i.$$

因此 $m_* E = m^* E$，E 可测，并且 $mE = m^* E = \sum_i mE_i$. ▌

定理 4　若有界集 E_1, E_2 都可测，则 $E_1 \cup E_2$ 也可测.

证明　对每个 $i \in \{1,2\}$，E_i 可测，由定理 1 知：对任意 $\varepsilon > 0$，存在有界开集 G_i 及有界闭集 F_i，使

$$F_i \subset E_i \subset G_i,$$

$$mE_i - \varepsilon < mF_i \leqslant mG_i < mE_i + \varepsilon. \qquad (3 \cdot 3 \cdot 1)$$

令 $E = E_1 \cup E_2$，$F = F_1 \cup F_2$，$G = G_1 \cup G_2$，则 F 为有界闭集，G 为有界开集，并且

$$F \subset E \subset G,$$

$$mF \leqslant m_* E \leqslant m^* E \leqslant mG. \qquad (3 \cdot 3 \cdot 2)$$

下证 $mG - mF < 4\varepsilon$：

$G \backslash F$ 是有界开集，故可测，由定理 3，

$$\begin{aligned} mG - mF &= m(F \cup (G \backslash F)) - mF \\ &= mF + m(G \backslash F) - mF = m(G \backslash F). \end{aligned}$$

同理可证

$$mG_i - mF_i = m(G_i \backslash F_i).$$

由于

$$\begin{aligned} G \backslash F &= (G_1 \cup G_2) \backslash F \\ &= (G_1 \backslash F) \cup (G_2 \backslash F) \subset (G_1 \backslash F_1) \cup (G_2 \backslash F_2), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & mG - mF = m(G \backslash F) \\ & \leqslant m(G_1 \backslash F_1) + m(G_2 \backslash F_2) \\ & = (mG_1 - mF_1) + (mG_2 - mF_2), \end{aligned}$$

由 $(3 \cdot 3 \cdot 1)$ 知上式后端的两项都小于 2ε，于是

$$mG - mF < 4\varepsilon.$$

根据上式及 $(3 \cdot 3 \cdot 2)$ 可得

$$0 \leqslant m^* E - m_* E < 4\varepsilon,$$

由正数 ε 的任意性即知

$$m_* E = m^* E,$$

所以 $E = E_1 \cup E_2$ 可测. ▌

定理 5 若有界集 E 可测,开区间 $I \supset E$,则 $\mathscr{C}_I E$ 也可测.

证明 E 可测,故 $m^* E = m_* E$. 由命题 4 知

$$m_* E = |I| - m^*(I \setminus E),$$

所以

$$m^* E + m^*(I \setminus E) = |I|,$$

由此即知 $\mathscr{C}_I E = I \setminus E$ 可测. ▌

定理 6 若有界集 E_1, E_2 可测,则 $E_1 \cap E_2$ 也可测.

证明 存在开区间 $I \supset E_1 \cup E_2$,易知

$$E_1 \cap E_2 = \mathscr{C}_I(\mathscr{C}_I(E_1 \cap E_2)) = \mathscr{C}_I(\mathscr{C}_I E_1 \cup \mathscr{C}_I E_2).$$

由定理 4,5 即知定理 6 成立. ▌

定理 7 若有界集 E_1, E_2 可测,则 $E_1 \setminus E_2$ 也可测.

证明 存在开区间 $I \supset E_1 \cup E_2$,易知

$$E_1 \setminus E_2 = E_1 \cap \mathscr{C}_I E_2.$$

由定理 5,6 即知定理 7 成立. ▌

定理 8 若有界集 $E_1, E_2, E_3, \cdots$ 均可测,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 有界,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测.

证明 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup \cdots \cup (E_i \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} E_k) \cup \cdots$

由定理 4,7,3 即知定理 8 成立. ▌

定理 9 若有界集 $E_1, E_2, E_3, \cdots$ 均可测,则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也可测.

证明 存在开区间 $I \supset \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = I \setminus (I \setminus \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = I \setminus \Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} (I \setminus E_i) \Big).$$

由命题 1 及定理 7,8 即知定理 9 成立. ▌

§3·4　无界 Lebesgue 可测集

3·4·1　无界可测集的定义

在 §3·4 中，我们把空间 R^N 的起点为 θ 边长为 1 的半开区间分解记作 $\{L_n\}$，即 $\{L_n\}$ 为下面形式的半开区间的全体：

$$\{x \mid n_i < x_i \leqslant n_i + 1, i = 1, \cdots, N\},$$

$$n_i \text{ 是整数}, i = 1, \cdots, N.$$

显然，有界点集 E 可测的充要条件是：E 与 $\{L_n\}$ 中每个半开区间 L_n 的交都可测.

定义 1　设 E 是无界点集，若 E 与 $\{L_n\}$ 中每个半开区间 L_n 的交都是有界可测集，就称 E 是 **(Lebesgue) 可测**的. 对于 (Lebesgue) 可测的点集 E，我们把 E 的 (Lebesgue) 外测度称为 E 的 **(Lebesgue) 测度**，记作 mE.

有界可测集与无界可测集统称为**可测集**.

3·4·2　可测集及其测度的运算性质

引理 1　设 E 是可测集，则

$$mE = \sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap L_n).$$

证明　记 $E_n = E \cap L_n (n = 1, 2, \cdots)$，则诸 E_n 是两两无交的有界可测集，$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 由外测度的半可列可加性，

$$mE \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE_n.$$

对任意自然数 m，由外测度的单调性及 §3·3 定理 3，

$$mE \geqslant m \bigcup_{n=1}^{m} E_n = \sum_{n=1}^{m} mE_n.$$

令 $m \to \infty$，得

$$mE \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} mE_n,$$

所以 $mE = \sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap L_n)$. ▍

定理 1 设 E 是有限个或可列个两两无交的可测集 E_i 之并 $\bigcup_i E_i$,则 E 是可测集,并且

$$mE = \sum_i mE_i.$$

证明 对于$\{L_n\}$中的每个 L_n,

$$E \cap L_n = \bigcup_i (E_i \cap L_n).$$

由 E_i 可测知 $E_i \cap L_n$ 为有界可测集. 由 §3·3 定理 3 知 $E \cap L_n$ 为有界可测集,并且

$$m(E \cap L_n) = \sum_i m(E_i \cap L_n).$$

由定义 1 知 E 可测,并且

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} m(E \cap L_n) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_i m(E_i \cap L_n) \\ &= \sum_i \sum_{n=1}^{\infty} m(E_i \cap L_n),\end{aligned}$$

再根据引理 1 便知

$$mE = \sum_i mE_i. \quad ▍$$

定理 1 说明,对于可测集来说,测度是有限可加的,也是可列可加的.

§3·3 定理 4 ~ 定理 9,把其中点集有界的条件去掉(定理 5 中的 $\mathscr{C}_I$改为 $\mathscr{C}_{R^N}$),都仍然成立. 也就是说,可测集的全体对"有限并"、"余"、"有限交"、"差"、"可列并"、"可列交"这些运算都是封闭的. 这些结论的证明都与定理 1 类似,不再赘述.

定理 2$^{\bullet}$ (i) 设$\{E_n\}$是渐张可测集列(即诸 E_n 可测且 $E_n \uparrow$),$E_n \uparrow E$,则 E 是可测集,并且

$$mE_n \uparrow mE.\text{（下连续性）}$$

(ii) 设$\{E_n\}$是渐缩可测集列，$E_n \downarrow E$，并且$\{E_n\}$中至少有一项E_{n_0}测度有限，则E是可测集，并且

$$mE_n \downarrow mE.\text{（上连续性）}$$

证明　(i) $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，故$E$可测. 令

$$\hat{E}_1 = E_1,\quad \hat{E}_i = E_i \setminus E_{i-1}\quad (i=2,3,\cdots),$$

则诸$\hat{E}_i$可测，并且$\hat{E}_i \cap \hat{E}_j = \varnothing\ (i \neq j)$，

$$E_n = \bigcup_{i=1}^{n} \hat{E}_i,\qquad E=\bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{E}_i.$$

由定理1，

$$mE = \sum_{i=1}^{\infty} m\hat{E}_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m\hat{E}_i = \lim_{n\to\infty} mE_n,$$

而$mE_1 \leqslant mE_2 \leqslant \cdots$故

$$mE_n \uparrow mE.$$

(ii) $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，故$E$可测. 不妨设$mE_1<\infty$.

$$(E_1\setminus E_n)\uparrow \bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1\setminus E_n) = E_1\setminus\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = E_1\setminus E.$$

由(i)知

$$m(E_1\setminus E_n)\uparrow m(E_1\setminus E). \tag{3·4·1}$$

由于$mE_1<\infty$，$E_1\supset E_n$，$E_1\supset E$，根据定理1可知

$$m(E_1\setminus E_n) = mE_1 - mE_n,\quad m(E_1\setminus E) = mE_1 - mE.$$

把以上二式代入(3·4·1)得

$$mE_1 - mE_n \uparrow mE_1 - mE.$$

注意到$mE_1<\infty$，由上式即得

$$mE_n \downarrow mE.\ \blacksquare$$

注　定理2(ii)，其中“$\{E_n\}$中至少有一项E_{n_0}测度有限”这个条件不能去掉，例如，R^1中可测集列$I_n=[n,+\infty]$，$n=1,2,\cdots$显

然 $I_n \downarrow \varnothing$，但是 $mI_n \downarrow m\varnothing$ 不成立.

3·4·3　可测集的构造

一般常见的点集有哪些是可测的?可测集的具体构造是怎样的?我们在 §3·4 中的 3·4·3 试图来回答这个问题.

我们已经知道半开区间是可测集，而开集可表成可列个半开区间的并集，闭集可表成开集的余集，由可测集的运算性质立即知

命题 1　开集及闭集都是可测集.

定义 2　(i) 若点集 G 可表成可列个开集 G_n 的交 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$，就称 G 是 G_δ 型集.

(ii) 若点集 F 可表成可列个闭集 F_n 的并 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$，就称 F 是 F_σ 型集.

注　G_δ 型集 G 一定能表成渐缩开集列 $\{G_n\}$ 的极限，当 G 含于开区间 I 时，还可使诸 $G_n \subset I$；F_σ 型集 F 一定能表成渐张闭集列 $\{F_n\}$ 的极限.

显然 G_δ 型集的余集是 F_σ 型集，F_σ 型集的余集是 G_δ 型集.

命题 2　G_δ 型集及 F_σ 型集都是可测集.

从开集出发，通过取有限或可列个集的并或交、取一个集的余这样的手续所得到的集统称为Borel集(§3·8将给出严格定义). 显然所有 Borel 集都是可测集，但可以举出例子来说明可测集并不都是 Borel 集(见[9]《分析中的反例》第八章 17).

定理 3　设 E 是任意可测集，则

(i) 对任意 $\varepsilon > 0$，总存在开集 $G \supset E$，使

$$m(G \setminus E) \leqslant \varepsilon$$

$$(\text{从而 } mE \leqslant mG \leqslant mE + \varepsilon);$$

(ii) 存在 G_δ 型集 $G \supset E$，使

$$m(G \setminus E) = 0$$

$$(\text{从而 } mG = mE).$$

证明　(i) 由无界可测集的定义知 E 可表成可列个两两无交的有界可测集 E_i 之并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. 对每个 E_i,由 §3·2定理2知存在开集 $G_i \supset E_i$,使 $mG_i \leqslant mE_i + \frac{\varepsilon}{2^i}$,从而

$$m(G_i \backslash E_i) = mG_i - mE_i \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

令 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$,则 G 是开集,$G \supset E$,

$$G \backslash E = (\bigcup_{i=1}^{\infty} G_i) \cap \mathscr{C}E = \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \cap \mathscr{C}E) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (G_i \backslash E_i),$$

因此

$$m(G \backslash E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(G_i \backslash E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

(从而由 $mG = mE + m(G \backslash E)$ 知 $mE \leqslant mG \leqslant mE + \varepsilon$).

(ii) 由(i) 知,对任意自然数 n,存在开集 $G_n \supset E$,使

$$m(G_n \backslash E) \leqslant \frac{1}{n}.$$

令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$,则 G 是 G_δ 型集,$G \supset E$. 由 $G \backslash E \subset G_n \backslash E$ 知

$$m(G \backslash E) \leqslant m(G_n \backslash E) \leqslant \frac{1}{n}.$$

令 $n \to \infty$,得

$$m(G \backslash E) = 0$$

(从而由 $mG = mE + m(G \backslash E)$ 知 $mG = mE$). ▌

注　当 $G \supset E$,$mG \leqslant mE + \varepsilon$ 时未必有 $m(G \backslash E) \leqslant \varepsilon$. 当 $G \supset E$,$mG = mE$ 时未必有 $m(G \backslash E) = 0$.

由定理 3,用对偶方法可以推出下面的定理.

定理 4　设 E 是任意可测集,则

(i) 对任意正实数 ε,总存在闭集 $F \subset E$,使

$$m(E \backslash F) \leqslant \varepsilon$$

$$(从而\ mE-\varepsilon\leqslant mF\leqslant mE);$$

(ii) 存在 F_σ 型集 $F\subset E$,使

$$m(E\backslash F)=0$$

$$(从而\ mE=mF).$$

证明 (i) E 可测,故 $\mathscr{C}E$ 可测,由定理 3 知,存在开集 $G\supset\mathscr{C}E$,使

$$m(G\backslash\mathscr{C}E)\leqslant\varepsilon.$$

令 $F=\mathscr{C}G$,则 F 是闭集,$F\subset E$,由 $E\backslash F=\mathscr{C}F\backslash\mathscr{C}E$ 知

$$m(E\backslash F)=m(G\backslash\mathscr{C}E)\leqslant\varepsilon.$$

(ii) 由定理 3 知,存在 G_δ 型集 $G\supset\mathscr{C}E$,使

$$m(G\backslash\mathscr{C}E)=0.$$

令 $F=\mathscr{C}G$,则 F 是 F_σ 型集,$F\subset E$,

$$m(E\backslash F)=m(\mathscr{C}F\backslash\mathscr{C}E)=m(G\backslash\mathscr{C}E)=0.\ \blacksquare$$

定义 3 测度是 0 的可测集称为**零集**.

命题 3 所有外测度为 0 的点集恰是所有零集,从而零集的任意子集仍是零集.

证明 外测度为 0 的有界点集必是可测集(因为其内、外测度相等).由此,根据无界可测集的定义及外测度的单调性即知命题 3 成立. $\blacksquare$

由定理 3 立即可以看出,一个零集一定是一个 G_δ 型零集的子集.

命题 4 (i) E 为可测集当且仅当 E 可表为一个 G_δ 型集 G 与一个零集 N 之差 $G\backslash N$.

(ii) E 为可测集当且仅当 E 可表为一个 F_σ 型集 F 与一个零集 N 之并 $F\cup N$.

证明 由定理 3,4 立即得证. $\blacksquare$

由上所述,我们得知:从所有的半开区间及外测度为 0 的点集出发,通过“有限并”、“有限交”、“差”、“余”、“可列并”、“可列交”

这些运算，便可产生所有的可测集，产生的过程可按图 3·4·1 所示的来进行.

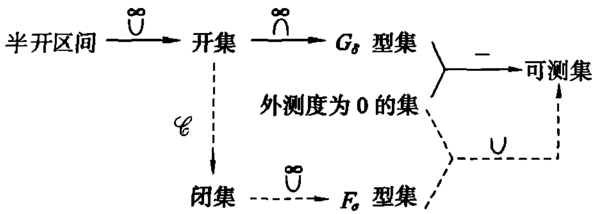

图 3·4·1

这个产生的过程反映了可测集的构造. 今后再探讨可测集的性质，可以沿着这个产生的过程来进行(例如 §3·6 中 3·6·2，§3·4 中的 3·4·2 就是这样做的).

$*$3·4·4　Caratheodory 条件

所谓点集 E 满足 Caratheodory 条件是指：对于任何点集 T，都有

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\backslash E)=m^*T. \qquad (3\cdot 4\cdot 2)$$

定理 5　(有界或无界)点集 E 为可测集的充要条件是：E 满足 Caratheodory 条件.

证明　充分性：设对任何点集 T 都有

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\backslash E)=m^*T.$$

在上式中取 T 为任意开区间 I 并注意到 $I\backslash E=I\backslash(I\cap E)$ 得

$$m^*(I\cap E)+m^*(I\backslash(I\cap E))=|I|.$$

因此 $I\cap E$ 是有界可测集. 设开区间

$$I_n=\{x\mid -n<x_i<n, i=1,\cdots,N\}\quad (n=1,2,\cdots),$$

则 $I_n\cap E\uparrow E$. 由已证得的结论知诸 $I_n\cap E$ 可测，故 E 可测.

必要性：设 E 可测，T 为任意点集. 由外测度的半有限可加性，

$$m^*(T\cap E)+m^*(T\backslash E)\geqslant m^*T.$$

再证相反的不等式,由 §3·2 定理 2,对任 $\varepsilon>0$,存在开集 $G\supset T$,使

$$mG\leqslant m^*T+\varepsilon.$$

G 可表为两个无交的可测集 $G\cap E$ 与 $G\backslash E$ 之并,而

$$G\cap E\supset T\cap E,\quad G\backslash E\supset T\backslash E,$$

于是

$$\begin{aligned}m^*T+\varepsilon&\geqslant mG=m(G\cap E)+m(G\backslash E)\\&\geqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\backslash E).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$,得

$$m^*T\geqslant m^*(T\cap E)+m^*(T\backslash E).$$

所以 $m^*(T\cap E)+m^*(T\backslash E)=m^*T$. ▌

我们当然也可以把满足 Caratheodory 条件作为可测集的定义来展开测度理论(见 §3·8). 只是这个定义对初学者来说不够直观、自然.

§3·5 不可测集的例

3·5·1 R^1 中 Lebesgue 测度的平移不变性

若 h 是一个固定实数,T_h 是 $R^1\to R^1$ 的映射,当 $x\in R^1$ 时 $T_h(x)=x+h$,就称 T_h 是 R^1 的**平移量为 h 的平移变换**.

当 $I=(a,b]$ 时 $T_h(I)=(a+h,b+h]$, $|T_h(I)|=|I|$. 因此由外测度的定义知,对于 R^1 中的任何点集 E,恒有 $m^*T_h(E)=m^*E$. 于是由可测集及测度的定义知,若 E 是 R^1 中可测集,则 $T_h(E)$ 也是 R^1 中可测集,并且 $mT_h(E)=mE$. 这个性质称为"R^1 中 Lebesgue 测度的平移不变性".

3·5·2 不可测集的例

对于闭区间$[0,1]$中的两个数 x 与 y,若 $x-y$ 是有理数,就称

x与y是“相亲”的. 显然,当x与y相亲时y与x也相亲,与同一个数相亲的两个数也是相亲的. 对每个$x\in[0,1]$,把$[0,1]$中与x相亲的数的全体记作$E(x)$,称它是一个“相亲集”. 由上所述,对于相亲集$E(x)$与$E(y)$,当x与y相亲时,$E(x)=E(y)$,当x与y不相亲时,$E(x)\cap E(y)=\varnothing$,所以不同的相亲集是无交的. 这样一来,就把闭区间$[0,1]$分解成为一族两两无交的相亲集的并. 对于这一族两两无交的相亲集,我们在每个相亲集中取一个数(若x与y相亲,不论x与y相等与否,$E(x)$与$E(y)$实际是同一个相亲集,我们只取这个集中的一个数),把所取出的数组成的集记作S. 显然对任何$x\in[0,1]$,$E(x)\cap S$是一个单元素集. 下面我们来证明S是R^1中的一个不可测的点集.

设$[-1,1]$中有理数的全体为$\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$,$T_{r_n}$是$R^1$的平移量为$r_n$的平移变换,$S_n$是点集$S$在$T_{r_n}$下的象集$T_{r_n}(S)$.

引理 1 (i) $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$两两相交.

(ii) $[0,1]\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n\subset[-1,2]$.

证明 (i) 假设有两个不同的自然数m与n使S_m与S_n相交,则存在$a\in S_m\cap S_n$,于是

$$a-r_m\in S,\quad a-r_n\in S,\quad a-r_m\neq a-r_n.$$

由S的定义知S中此不同的二数$a-r_m,a-r_n$不属于同一个相亲集. 但是,$a-r_m$与$a-r_n$的差为有理数r_n-r_m,从而

$$E(a-r_m)=E(a-r_n).$$

出现的矛盾说明(i)成立.

(ii) 由S_n的定义知$S_n\subset[-1,2]$,故$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n\subset[-1,2]$.

再证$[0,1]\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}S_n$. 设$x\in[0,1]$,则$x\in E(x)$. 由$S$的定义知$E(x)\cap S$仅含有一个数,记此数为$y$,由$y\in E(x)$知$x-y$为有理数且$x-y\in[-1,1]$,故$x-y\in\{r_n\}$. 设$x-y=r_{n_0}$,则$x$

$= y + r_{n_0}$,由 $y \in S$ 知 $x \in S_{n_0}$. 所以$[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. ▍

定理 1 S 是一个不可测集.

证明 假设 S 可测,由引理 1(i) 及测度的平移不变性知,$\{S_n\}$ 是可列个两两无交的可测集,$mS = mS_n(n = 1,2,\cdots)$. 由引理 1(ii) 知,$1 \leqslant m\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n \leqslant 3$,于是

$$1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} mS_n \leqslant 3. \qquad (3 \cdot 5 \cdot 1)$$

(1°) 若 $mS = 0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} mS_n = 0 < 1$,与(3·5·1) 矛盾.

(2°) 若 $mS \neq 0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} mS_n = +\infty > 3$,与(3·5·1) 矛盾.

(1°) 与(2°) 说明 S 不可测. ▍

注 对 R^1 中任何一个测度非 0 的可测集 E,都可以仿照上述的方法作出一个不可测的子集 E_1.

§3·6 集合的乘积·R^p,R^q 与 R^{p+q} 中可测集间的关系

3·6·1 集合的乘积

定义 1 设 A,B 是两个集合,对任意 $a \in A$,$b \in B$,作有序元素对(a,b),所有这样作出的有序元素对组成一个集合,这个集合称为 A 与 B 的乘积,记作 $A \times B$. 即

$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

类似地可定义

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$$
$$= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in E_i,\ i = 1,2,\cdots,n\}.$$

例 3·6·1 对任意两个自然数 p 与 q,有 $R^p \times R^q = R^{p+q}$.

例 3·6·2　设 $I_i = \langle a_i, b_i \rangle$ $(i = 1,2,\cdots,N)$，则

$$I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N = \langle a_1, b_1; a_2, b_2; \cdots; a_N, b_N \rangle.$$

当 $I_1, I_2, \cdots, I_N$ 都是半开区间时 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_N$ 也是半开区间.

由定义 1 易知下列结论成立.

(i) 若 A 或 B 是空集，则 $A \times B$ 是空集. 反之亦对.

(ii) 若 $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ 或 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$，则

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \varnothing.$$

反之亦对.

(iii) 若 $A_1 \subset A_2$ 且 $B_1 \subset B_2$，则 $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2$. 反之亦对.

(iv) $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) \times \left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \bigcup\limits_{i,j=1}^{\infty} (A_i \times B_j)$.

(v) $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right) \times \left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)$.

定义 2　若 X, Y 是两个空间(空间即基本集)，则称 $X \times Y$ 是**乘积空间**. 这时，若 $A \subset X, B \subset Y$，则称 $A \times B$ 是乘积空间 $X \times Y$ 中的**矩形**，而 A, B 称为**矩形 $A \times B$ 的边**.

3·6·2　R^p, R^q 与 R^{p+q} 中可测集间的关系

我们知道 $R^p \times R^q = R^{p+q}$，并且在 R^p, R^q 及 R^{p+q} 中都已定义了可测集，因此自然要问：R^p, R^q 中的可测集与 R^{p+q} 中可测集之间有什么关系？本节的定理给出了这个问题的部分回答. 至于完满的回答，要等到 §5·4 中 5·4·2 才能给出.

定理 1　若 A 和 B 分别是 R^p 和 R^q 中的可测集，则 $A \times B$ 是 R^{p+q} 中的可测集，并且

$$m(A \times B) = mA \times mB.$$

证明　(1°) 设 A, B 是区间.

这时，$A \times B$ 也是区间，故 $A \times B$ 可测，

$$m(A \times B) = |A \times B| = |A| \times |B| = mA \times mB.$$

(2°) 设 A, B 是开集.

这时，A,B 可分别表为可列个两两无交的半开区间之并：

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\quad B=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j,$$

从而

$$A\times B=\bigcup_{i,j=1}^{\infty}(A_i\times B_j),$$

并且 $A_i\times B_j,i=1,2,\cdots;j=1,2,\cdots$ 两两无交. 由(1°)知 $A_i\times B_j$ 是可测集，所以 $A\times B$ 可测，

$$\begin{aligned}m(A\times B)&=\sum_{i,j=1}^{\infty}m(A_i\times B_j)=\sum_{i,j=1}^{\infty}(mA_i\times mB_j)\\&=\Big(\sum_{i=1}^{\infty}mA_i\Big)\times\Big(\sum_{j=1}^{\infty}mB_j\Big)=mA\times mB.\end{aligned}$$

(3°) 设 A,B 是有界 G_δ 型集.

这时，A,B 可分别表为渐缩有界开集列的极限：

$$A_n\downarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=A,\qquad B_n\downarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=B,$$

从而

$$A_n\times B_n\downarrow\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\times B_n)=\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\Big)\times\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\Big)=A\times B.$$

由(2°)知诸 $A_n\times B_n$ 为有界可测集，所以 $A\times B$ 可测，

$$\begin{aligned}m(A\times B)&=\lim_{n\to\infty}m(A_n\times B_n)=\lim_{n\to\infty}(mA_n\times mB_n)\\&=(\lim_{n\to\infty}mA_n)\times(\lim_{n\to\infty}mB_n)=mA\times mB.\end{aligned}$$

(4°) 设 A,B 是有界可测集，并且其中有一个是零集. 不妨设 A 是零集.

由 §3·4 定理 3 知，存在有界 G_δ 型集 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$，使

$$\hat{A}\supset A,\quad \hat{B}\supset B,\quad m\hat{A}=mA=0,\quad mB=m\hat{B}.$$

根据(3°)，

$$\begin{aligned}m^*(A\times B)&\leqslant m^*(\hat{A}\times\hat{B})=m(\hat{A}\times\hat{B})\\&=m\hat{A}\times m\hat{B}=0,\end{aligned}$$

所以 $A\times B$ 可测，$m(A\times B)=0=mA\times mB$.

(5°) 设 A,B 是有界可测集.

由 §3·4 定理 3 知,存在有界 G_δ 型集 $\hat{A}$ 与 $\hat{B}$,使

$$\hat{A} \supset A,\ \hat{B} \supset B,\ m(\hat{A}\setminus A) = 0,\ m(\hat{B}\setminus B) = 0.$$

令 $N_1 = \hat{A}\setminus A, N_2 = \hat{B}\setminus B$,则 N_1、N_2 是零集,

$$\begin{aligned}\hat{A} \times \hat{B} &= (A \cup N_1) \times (B \cup N_2)\\ &= (A \times B) \cup (N_1 \times B) \cup (A \times N_2) \cup (N_1 \times N_2).\end{aligned}$$

由(3°) 知 $\hat{A} \times \hat{B}$ 可测,由(4°) 知 $N_1 \times B$、$A \times N_2$、$N_1 \times N_2$ 都是零集,所以 $A \times B$ 可测,

$$\begin{aligned}m(A \times B) &= m(\hat{A} \times \hat{B}) = m\hat{A} \times m\hat{B}\\ &= mA \times mB.\end{aligned}$$

(6°) 设 A、B 是任意可测集.

这时,A,B 可分别表为可列个两两无交的有界可测集的并:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \qquad B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

从而

$$A \times B = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} (A_i \times B_j).$$

由(5°) 知诸 $A_i \times B_j$ 可测,所以 $A \times B$ 可测,

$$\begin{aligned}m(A \times B) &= \sum_{i,j=1}^{\infty} m(A_i \times B_j) = \sum_{i,j=1}^{\infty} (mA_i \times mB_j)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} mA_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{\infty} mB_j\right) = mA \times mB. \blacksquare\end{aligned}$$

* §3·7　Lebesgue－Stieltjes 测度

鉴于 Lebesgue－Stieltjes 测度及积分的理论在概率论、物理学等方面有着重要的应用,我们于本节及 §5·6 中 5·6·1 对其作

一简单介绍.

为书写方便,我们把"Lebesgue－Stieltjes 测度(可测函数、积分)"简写作"L－S 测度(可测函数、积分)",而把"Lebesgue 测度(可测函数、积分)"简写作"L 测度(可测函数、积分)".

L－S 测度是 L 测度的进一步推广,建立 L－S 测度的基本想法与 L 测度相似,所以我们着重对不同之处加以讨论.

3·7·1 R^1 中点集的 L－S 外测度

定义 1 若定义在 R^1 上的实值函数 $\alpha(x)$ 单调不减且右方连续,就称 $\alpha(x)$ 是 R^1 上的一个**分布函数**.

例 3·7·1 在直线 R^1 上放 4 克物质:在线段$[0,1]$,$[3,5]$上分别均匀地放 1 克物质,在 $x=2$,$x=5$ 两个点上分别放 1 克物质.对于任意 $x\in R^1$,把$(-\infty,x]$上物质的总质量记为 $\alpha(x)$,则 $\alpha(x)$ 是 R^1 上的一个分布函数.我们由此可看出"分布函数"这个名称的来历.

定义 2 设已给定 R^1 上的一个分布函数 $\alpha(x)$.对于 R^1 中的任意点集 E,我们把

$$\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha(b_n)-\alpha(a_n)]\,\middle|\,\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n]\supset E\right\}$$

称为点集 E **关于 $\alpha(x)$ 的 L－S 外测度**(简称 E **的 α－外测度**),记作 $m_\alpha^* E$.

注 当 $\alpha(x)\equiv x$ 时,关于 $\alpha(x)$ 的 L－S 外测度 $m_\alpha^* E$ 就是 L 外测度 $m^* E$.

命题 1 (i) $m_\alpha^*(a,b]=\alpha(b)-\alpha(a)$.

(ii) $m_\alpha^*(a,b)=\alpha(b-0)-\alpha(a)$(这里 $a<b$).

(iii) $m_\alpha^*[a,b)=\alpha(b-0)-\alpha(a-0)$.

(iv) $m_\alpha^*[a,b]=\alpha(b)-\alpha(a-0)$.

这里仅对(i)给出证明,其他几条读者自证.

证明 由 α－外测度的定义

$$m_\alpha^*(a,b] \leqslant \alpha(b)-\alpha(a).$$

再证相反的不等式. 为此，设半开区间串$\{(a_n,b_n]\}$复盖$(a,b]$来证

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}[\alpha(b_n)-\alpha(a_n)] \geqslant \alpha(b)-\alpha(a). \quad (3\cdot 7\cdot 1)$$

不妨设$a<b$. 任给$\varepsilon>0$，由$\alpha(x)$右方连续知，存在$\delta>0$使$a+\delta<b$且

$$\alpha(a+\delta)<\alpha(a)+\varepsilon,$$

对每个自然数n存在$c_n>b_n$使

$$\alpha(c_n)<\alpha(b_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

显然开区间族$\{(a_n,c_n)\}$复盖闭区间$[a+\delta,b]$. 由 Borel 有限复盖定理知可以选出有限个开区间$(a_{n_1},c_{n_1}),\cdots,(a_{n_k},c_{n_k})$合起来复盖$[a+\delta,b]$，显然还可以使选出的这有限个开区间满足

$$a_{n_{i+1}}<c_{n_i}, \quad i=1,2,\cdots,k-1.$$

于是

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha(c_n)-\alpha(a_n)] \geqslant \sum_{i=1}^{k}[\alpha(c_{n_i})-\alpha(a_{n_i})] \\ &= \alpha(c_{n_k})+[\alpha(c_{n_{k-1}})-\alpha(a_{n_k})]+\cdots \\ &\quad +[\alpha(c_{n_1})-\alpha(a_{n_2})]-\alpha(a_{n_1}) \geqslant \alpha(c_{n_k})-\alpha(a_{n_1}),\end{aligned}$$

再由$c_{n_k}>b$，$a_{n_1}<a+\delta$知

$$\hat{u} \geqslant \alpha(b)-\alpha(a+\delta)>\alpha(b)-\alpha(a)-\varepsilon.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha(c_n)-\alpha(a_n)] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha(b_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}-\alpha(a_n)\right] \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha(b_n)-\alpha(a_n)]+\varepsilon=u+\varepsilon.\end{aligned}$$

所以

$$u+\varepsilon \geqslant \hat{u} > \alpha(b)-\alpha(a)-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0$,得

$$u \geqslant \alpha(b)-\alpha(a),$$

即(3·7·1)式成立. 则 α－外测度的定义便知

$$m_\alpha^*(a,b] \geqslant \alpha(b)-\alpha(a).$$

所以 $m_\alpha^*(a,b]=\alpha(b)-\alpha(a)$. ▌

读者可把命题1(及证明)与§3·2命题1(及证明)作对照,看有何异同.

对于 R^1 中的任意点 a,单点集 $\{a\}$ 即闭区间 $[a,a]$,由命题1知 $m_\alpha^*\{a\}=\alpha(a)-\alpha(a-0)$. 若 $\alpha(x)$ 在点 a 非左方连续,则 $m^*\{a\}>0$. 单点集的L－S外测度未必是0,这是与L外测度不同的.

§3·2定理1所述的L外测度的四条基本性质,把其中的 m^* 改为 m_α^* 仍然成立,其证明也只需把原证明中的 m^* 改为 m_α^*,把容度 $|(a,b]|$ 改为 $\alpha(b)-\alpha(a)$. 这样就得到了L－S外测度的四条基本性质.

§3·2定理2及其证明,把其中的 m^* 改为 m_α^*,把区间的容度改为区间的 α－外测度,仍然成立.

3·7·2　R^1 中的L－S可测集

定义3　设已给定 R^1 上的一个分布函数 $\alpha(x)$. 对于 R^1 中的有界点集 E,若存在开区间 $I\supset E$,使

$$m_\alpha^* E+m_\alpha^*(I\backslash E)=m_\alpha^* I,$$

就称 E 关于 $\alpha(x)$ 是L－S**可测的**(简称 E 是 α－**可测的**).

设 R^1 的起点为 θ 边长为1的半开区间分解为 $\{L_n\}$. 对于 R^1 中的无界点集 E,若 E 与 $\{L_n\}$ 中每个半开区间 L_n 的交都是 α－可测的,就称 E 是 α－**可测的**.

α－可测集 E 的 α－外测度称为 E **关于** $\alpha(x)$ **的L－S测度**(简称 E 的 α－**测度**),记作 $m_\alpha E$.

注　当 $\alpha(x)\equiv x$ 时,以上L－S可测集及L－S测度的定义

便还原为 L 可测集及 L 测度的定义.

§3·3,§3·4 的所有定理、命题及其证明,把其中的 m^*,m 改为 m_α^*,m_α,把区间的容度改为区间的 α－外测度,把 m_* 改为 m_*^α(对有界点集 E,$m_*^\alpha E=\sup\{m_\alpha F \mid 闭集 F\subset E\}$),仍然成立.

值得提到的是:R^1 中的 α－可测集 E 经平移变换 T_h 后所得的 $T_h(E)$ 未必 α－可测,$T_h(E)$ 即使 α－可测,也未必有 $m_\alpha T_h(E)=m_\alpha E$.

3·7·3　R^N 中的 L－S 测度理论

对于 R^N 上的任意实值函数 $\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_N)$ 及任意半开区间 $I=\{x \mid a_i<x_i\leqslant b_i,i=1,2,\cdots,N\}$,我们规定符号 $\delta_k^I(\alpha)$,$m_\alpha^0 I$ 的意义如下:

$$\delta_k^I(\alpha)=\alpha(x_1,\cdots,x_{k-1},b_k,x_{k+1},\cdots,x_N)$$
$$-\alpha(x_1,\cdots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\cdots,x_N)\quad(k=1,\cdots,N),$$
$$m_\alpha^0 I=\delta_1^I(\delta_2^I(\cdots(\delta_N^I(\alpha))\cdots)).$$

定义 4　若 R^N 上的实值函数 $\alpha(x_1,\cdots,x_N)$ 满足如下条件:

(i) 对每个变数 x_i 都右方连续,亦即

$$\lim_{x_i\to c+0}\alpha(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_N)=\alpha(x_1,\cdots,c,\cdots,x_N)$$
$$(c\in R^1,i=1,\cdots,N),$$

(ii) 对每个半开区间 $I=\{x \mid a_i<x_i\leqslant b_i,i=1,\cdots,N\}$,

$$m_\alpha^0 I=\delta_1^I(\delta_2^I(\cdots(\delta_N^I(\alpha))\cdots))\geqslant 0,$$

就称 $\alpha(x_1,\cdots,x_N)$ 是 R^N 上的一个**分布函数**.

注　当 $N=1$ 时上面的定义 4 还原为定义 1.

例 3·7·2　设 $\alpha(x)$,$\beta(x)$ 是 R^1 上的两个分布函数,则

$$\gamma(x_1,x_2)=\alpha(x_1)\cdot\beta(x_2)$$

是 R^2 上的一个分布函数.

证明　$\gamma(x_1,x_2)$ 显然满足定义 4 中的条件(i).

对于任意半开区间

$$
\begin{aligned}
I &= \{(x_1,x_2)\mid a_1 < x_1 \leqslant b_1, a_2 < x_2 \leqslant b_2\} \\
&= (a_1,b_1] \times (a_2,b_2], \\
m_\gamma^0 I &= \delta_1^I(\delta_2^I(\gamma)) = \delta_1^I(\gamma(x_1,b_2) - \gamma(x_1,a_2)) \\
&= \gamma(b_1,b_2) - \gamma(b_1,a_2) - \gamma(a_1,b_2) + \gamma(a_1,a_2) \\
&= [\alpha(b_1) - \alpha(a_1)] \times [\beta(b_2) - \beta(a_2)] \\
&= m_\alpha^0(a_1,b_1] \times m_\beta^0(a_2,b_2] \geqslant 0. \blacksquare
\end{aligned}
$$

设已给定 R^N 上的一个分布函数 $\alpha(x)$. 对于 R^N 中的任意点集 E,我们把

$$
\inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m_\alpha^0 I_n \;\middle|\; \text{诸 } I_n \text{ 为半开区间}, \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E \right\}
$$

称为 E 的 α — **外测度**,记作 $m_\alpha^* E$.

有了 $m_\alpha^* E$ 的定义,把 §3·7 3·7·2 定义 3 中的 R^1 改为 R^N,就得到 R^N 中 α — **可测集**以及 α — **测度** $m_\alpha E$ 的定义.

R^N 中 α —外测度、α— 可测集以及 α—测度的性质,与 R^1 中的情况类似.

相应于 §3·6 定理 1,这里有下面的定理.

定理 1 设 $\alpha(x_1,\cdots,x_p)$,$\beta(y_1,\cdots,y_q)$ 分别是 R^p,R^q 上的分布函数. 记 $R^p \times R^q$ 上的函数 $\alpha(x_1,\cdots,x_p) \times \beta(y_1,\cdots,y_q)$ 为 $(\alpha \times \beta)(x_1,\cdots,x_p,y_1,\cdots,y_q)$,此函数是 R^{p+q} 上的一个分布函数. 若 A 是 R^p 中的 α — 可测集,B 是 R^q 中的 β — 可测集,则 $A \times B$ 是 R^{p+q} 中的 $\alpha \times \beta$ — 可测集,并且

$$
m_{\alpha\times\beta}(A \times B) = m_\alpha A \times m_\beta B.
$$

这个定理的证明与 §3·6 定理 1 类似.

* §3·8 抽象测度理论初步

在概率论、泛函分析、群上调和分析以及物理学等许多方面,

抽象测度及相应积分的理论已经成为经常用到的基础理论，所以我们于本节 §5·6 中 §5·6·2 对其作一简单介绍.

本节在讲法上假定L测度理论及L－S测度理论尚未建立，而在建立抽象测度理论的同时，把L测度及L－S测度作为其具体例子跟随着建立起来(此建立方式与前不尽相同).

3·8·1　环·σ－环

为了层次分明起见，我们把空间 X 的子集叫做空间 X 中的**集**，而把空间 X 的某些子集所组成的集称为空间 X 中的**集类**. 在 §3·8 中，我们总是假设已经预先给定了空间 X，我们凡说到集、集类都是指这个空间 X 中的集、集类(某些另作特别声明之处除外). 对于集，我们用英文大写字母表示，例如 A,B,E 等；对于集类，我们用黑体英文大写字母表示，例如 $\mathbf{R},\mathbf{S},\mathbf{T}$ 等. 我们还约定：对于集 E，我们把"$a\in E$"说成"a 是属于 E 的元"(或"a 是 E 中的元")；对于集类 $\mathbf{R}$，我们把"$E\in\mathbf{R}$"说成"E 是属于 $\mathbf{R}$ 的集"(或"E 是 $\mathbf{R}$ 中的集"). 在今后的讨论中，读者要特别注意分清元、集、集类这三个层次.

3·8·1·1　环

定义 1　设 $\mathbf{R}$ 是一个非空集类. 若对任何 E_1、$E_2\in\mathbf{R}$，都有

$$E_1\cup E_2\in\mathbf{R},\qquad E_1\setminus E_2\in\mathbf{R},$$

就称 $\mathbf{R}$ 是一个**环**. 特别若又有 $X\in\mathbf{R}$，就称 $\mathbf{R}$ 是一个**代数**.

简单地说，环就是对"有限并"及"差"运算封闭的非空集类.

例 3·8·1　空间 X 的所有子集组成的集类 2^X 是一个代数.

例 3·8·2　R^N 中 Jordan 可测集的全体称为 R^N 中的 Jordan **可测集类**，记作 $\mathbf{J}$. R^N 中的 $\mathbf{J}$ 是一个环，但不是代数.

环有如下的性质：空集 $\varnothing$ 属于任何环 $\mathbf{R}$. 环 $\mathbf{R}$ 对"有限交"运算封闭，即当 $E_1,E_2\in\mathbf{R}$ 时 $E_1\cap E_2\in\mathbf{R}$(因为 $E_1\cap E_2=(E_1\cup E_2)\setminus(E_1\setminus E_2)\setminus(E_2\setminus E_1)$). 两个环 $\mathbf{R}_1$、$\mathbf{R}_2$ 的交 $\mathbf{R}$ 仍是环(因为当 E_1，

$E_2 \in$ R 时,它们都属于 R_1 也都属于 R_2,所以 $E_1 \cup E_2$ 与 $E_1 \setminus E_2$ 既属于 R_1 也属于 R_2,从而属于 R). 更一般地,任意多个环的交仍是环.

定理 1 对任一非空集类 E,有且仅有一个包含 E 的最小环,亦即存在唯一的环 R,使

(i) E $\subset$ R,

(ii) 若环 $R_1 \supset$ E,则 $R_1 \supset$ R.

证明 包含 E 的环确实存在,例如 2^X. 设包含 E 的所有环的交为 R,则 R 是环且满足(i) 与(ii). 显然满足(i) 与(ii) 的环只能有一个. ▌

包含非空集类 E 的最小环一般记作 R(E).

3・8・1・2 R^N 中的集类P 及环 Q

定义 2 所谓 R^N 中的集类 P 是指:R^N 中半开区间的全体. 所谓 R^N 中的集类 Q 是指:R^N 中可表成有限个两两无交半开区间之并的集的全体,即

$$\mathrm{Q} = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i \;\middle|\; n \in \mathrm{N}, I_1, \cdots, I_n \text{ 为两两无交的半开区间} \right\}.$$

命题 1 在 R^N 中,Q 恰是包含 P 的最小环 R(P).

证明 为叙述简便,我们仅就 $X = R^1$ 的情况来证明.

显然 Q $\subset$ R(P). 再证 Q $\supset$ R(P),而这只需证 Q 是一个环.

两个半开区间 $(a,b]$, $(c,d]$ 的交仍是半开区间. $(a,b]$ 与 $(c,d]$ 的差或者为一个半开区间或者为两个无交半开区间之并,总之都属于 Q.

设 $A, B \in$ Q,则 A、B 可表为有限个两两无交的半开区间之并:

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} I_i, \quad B = \bigcup_{j=1}^{n} J_j.$$

这时

$$A \cap B = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}(I_i \cap J_j),$$

诸 $I_i \cap J_j$ 是两两无交的半开区间，故 $A \cap B \in$ Q，所以 Q 对“有限交”运算封闭.

对上述的 A,B，经演算可知

$$A\backslash B = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n}(I_i\backslash J_j).$$

由已证得的结论知，$I_i\backslash J_j \in$ Q，$\bigcap_{j=1}^{n}(I_i\backslash J_j) \in$ Q，而

$$\bigcap_{j=1}^{n}(I_i\backslash J_j), \quad i = 1,2,\cdots,m$$

两两无交，故 $A\backslash B$ 可表为有限个两两无交的半开区间之并，即

$$A\backslash B \in \mathrm{Q}.$$

由于 $A \cup B = (A\backslash B) \cup B$，$A\backslash B$ 与 B 无交，$A\backslash B \in$ Q，所以

$$A \cup B \in \mathrm{Q}.$$

总之 Q 是环. 所以 Q = R(P). ▌

3·8·1·3　σ－环

定义 3　设 S 是一个非空集类. 若对任何 $E_i \in$ S$(i = 1,2,\cdots)$，都有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathrm{S}, \quad E_1\backslash E_2 \in \mathrm{S},$$

就称 S 是一个 **σ－环**. 特别若又有 $X \in$ S，就称 S 是一个 **σ－代数**.

简单地说，σ－环就是对“可列并”及“差”运算封闭的非空集类.

例 3·8·3　空间 X 中的集类 2^X 是一个 σ－代数. R^N 中的 Jordan 可测集类 J 不是 σ－环. R^N 中的环 Q 也不是 σ－环.

σ－环有如下的性质：σ－环是环. σ－环对“可列交”运算封闭（因为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)\backslash E_i\right)$）. 任意多个 σ－环的交仍是 σ－环.

定理 2　对任一非空集类 E，有且仅有一个包含 E 的最小 σ－

环,亦即存在唯一的 $\sigma-$ 环 S,使

(i) $\mathsf{E} \subset \mathsf{S}$,

(ii) 若 $\sigma-$ 环 $\mathsf{S}_1 \supset \mathsf{E}$,则 $\mathsf{S}_1 \supset \mathsf{S}$.

定理2的证法与定理1相同,只要把定理1证明中的“环”都改成“$\sigma-$ 环”就可以了.

包含非空集类 E 的最小 $\sigma-$ 环一般记作 S(E).

命题 2 对任一非空集类 E,$\mathsf{S}(\mathsf{E}) = \mathsf{S}(\mathsf{R}(\mathsf{E}))$.

证明 $\mathsf{E} \subset \mathsf{R}(\mathsf{E})$,故 $\mathsf{S}(\mathsf{E}) \subset \mathsf{S}(\mathsf{R}(\mathsf{E}))$. 另一方面,$\mathsf{S}(\mathsf{E}) \supset \mathsf{R}(\mathsf{E})$,故 $\mathsf{S}(\mathsf{E}) \supset \mathsf{S}(\mathsf{R}(\mathsf{E}))$. 所以 $\mathsf{S}(\mathsf{E}) = \mathsf{S}(\mathsf{R}(\mathsf{E}))$. ▌

例 3·8·4 R^N 中包含集类 P 的最小 $\sigma-$ 环 S(P) 称为 R^N 中的**Borel 集类**,记作 B. 属于集类 B 的集称为 **Borel 集**. 由命题 2 立即知 $\mathsf{B} = \mathsf{S}(\mathsf{Q})$.

3·8·1·4 可测空间

定义 4 设 X 是一个集,S 是 X 的某些子集组成的 $\sigma-$ 环. 若

$$X = \bigcup_{E \in S} E,$$

就称 (X,S) **是一个可测空间**,而每个 $E \in \mathsf{S}$ 称为可测空间 (X,S) 中的**可测集**.

例 3·8·5 (R^N,B) 是一个可测空间.

3·8·2 环上的测度

3·8·2·1 环上的测度

非空集类 E 到 $R^1 \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ 的映射 μ 叫做 E 上的**集函数**. 换句话说,E 上的集函数 μ 就是自变元取集类 E 中的集,函数值为实数或 $+\infty$, $-\infty$ 的函数. 集类 E 称为集函数 μ 的定义域.

例 3·8·6 设 E 是空间 X 的所有有限子集组成的集类,对每个 $E \in \mathsf{E}$,定义

$$\mu(E) = E \text{ 中元素的个数},$$

则 μ 是 E 上的一个集函数.

定义 1 设 R 是一个环,μ 是 R 上的一个集函数,若 μ 满足下

列三条性质：

(i) 非负性：对任 $E \in \mathrm{R}$，有 $\mu(E) \geqslant 0$，

(ii) $\mu(\varnothing) = 0$，

(iii) 可列可加性：若 $E_i \in \mathrm{R}(i = 1,2,\cdots)$，$E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j$ 时)，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathrm{R}$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

就称 μ 为环 R 上的一个**测度函数**(简称环 R 上的**测度**)．这时对每个集 $E \in \mathrm{R}$，称 $\mu(E)$ 为 E 的测度．

例 3·8·7　例 3·8·6 所说的集类 E 及 E 上的集函数 μ，E 是一个环，μ 是环 E 上的一个测度．

例 3·8·8　在 R^N 中，Jordan 测度是环 J(见 §3·8·1 例 3·8·1) 上的一个测度．

定理 1　环 R 上的测度 μ 有下列性质：

(i) 有限可加性：若 $E_i \in \mathrm{R}(i = 1,2,\cdots,n)$，$E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j)$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\mu(E_i).$$

(ii) 单调性：若 $E_1, E_2 \in \mathrm{R}$，$E_1 \subset E_2$，则 $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$．

(iii) 半可列可加性：若 $E_i \in \mathrm{R}(i = 1,2,\cdots)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathrm{R}$，则

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i).$$

(iv) 下连续性：若 $E_n \in \mathrm{R}\ (n = 1,2,\cdots)$，$E_n \uparrow E$，且 $E \in \mathrm{R}$，则 $\mu(E_n) \uparrow \mu(E)$．

(v) 上连续性：若 $E_n \in \mathrm{R}(n = 1,2,\cdots)$，$E_n \downarrow E$，$E \in \mathrm{R}$，且 $\{E_n\}$ 中至少有一个 E_{n_0} 使 $\mu(E_{n_0}) < \infty$，则 $\mu(E_n) \downarrow \mu(E)$．

性质(i) 由可列可加性及 $\mu(\varnothing) = 0$ 可得证．性质(ii) 由(i) 可

得证. 性质(iii) 由可列可加性及(ii) 可得征. 性质(iv) 及(v) 的证法与 §3·4 定理 2 相同.

3·8·2·2 R^N 中的环 Q 上的测度 m 及测度 m_α.

对 $E \in$ Q,若 E 可表为有限个两两无交的半开区间 $I_1,\cdots,I_n$ 之并,就称$\{I_1,\cdots,I_n\}$是 E 的一个初等分解,并说 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i$ 表示了 E 的一个初等分解. 显然 $E \in$ Q 的初等分解存在,但不唯一.

引理 1 (i) 对每个 $I \in$ P,定义

$$m^0(I) = |I|.$$

则 m^0 是 P 上的一个集函数.

(ii) 对每个 $E \in$ Q,任取 E 的一个初等分解$\{I_1,\cdots,I_n\}$,令

$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m^0(I_i),$$

则 $m(E)$ 不随 E 的初等分解的不同选取而改变,从而 m 是环 Q 上的一个集函数,并且 m 限制在 P 上与 m^0 相同.

证明 只需证(ii). 为简便计,我们仅就 $R^N = R^1$ 的情况来叙述.

第一步先看 $E \in$ P 的情况. 设 $E=(a,b]$, 且$(a,b]$的一个初等分解如下式所示:

$$(a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i,b_i].$$

不妨认为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$. 由于$(a_i,b_i]$,$i=1,2,\cdots,n$ 是两两无交的,必然会有

$$a = a_1 \leqslant b_1 = a_2 \leqslant b_2 = \cdots = b_{n-1} = a_n \leqslant b_n = b,$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m^0((a_i,b_i]) &= \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\\ &= (b_1-a_1)+(b_2-a_2)+\cdots+(b_n-a_n)\\ &= b-a = m^0(E).\end{aligned}$$

所以，不论如何选取 E 的初等分解，相应的 $m(E)$ 恒等于 $m^0(E)$.

第二步再看 $E\in \mathsf{Q}$ 的情况. 设 E 的两个不同的初等分解如以下二式所示：

$$E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i, \qquad E=\bigcup_{j=1}^{l} F_j.$$

记 $\quad G_{ij}=E_i\cap F_j,\quad$ 则

$$G_{ij}\in \mathsf{P}, \qquad E_i=\bigcup_{j=1}^{l} G_{ij},$$

上式表示了 E_i 的一个初等分解. 由第一步知

$$m^0(E_i)=\sum_{j=1}^{l} m^0(G_{ij}),$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n} m^0(E_i)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{l} m^0(G_{ij})\Big).$$

同理可知

$$\sum_{j=1}^{l} m^0(F_j)=\sum_{j=1}^{l}\Big(\sum_{i=1}^{n} m^0(G_{ij})\Big).$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n} m^0(E_i)=\sum_{j=1}^{l} m^0(F_j).$$

所以，不论如何选取 E 的初等分解，相应的 $m(E)$ 恒等于同一个数值.

由此立即可知 m 是环 Q 上的一个集函数，并且 m 限制在 P 上与 m^0 相同. ▌

引理 2　引理 1 中所定义的环 Q 上的集函数 m 有下列性质.

(i) 有限可加性.

(ii) 单调性.

(iii) 半有限可加性：若 $E_i\in \mathsf{Q}(i=1,\cdots,n)$，则

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big)\leqslant \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

证明 (i) 设

$$E_i \in \mathrm{Q}(i=1,\cdots,n), E_i \cap E_j = \varnothing(i \neq j), \quad E=\bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

又设 E_i 的一个初等分解如下式所示：

$$E_i=\bigcup_{j=1}^{l_i} F_{ij} \quad (i=1,\cdots,n).$$

这时

$$E=\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{l_i} F_{ij},$$

上式表示了 E 的一个初等分解. 由引理 1，

$$m(E)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l_i} m^0(F_{ij})=\sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

即 m 有有限可加性.

(ii) 由有限可加性可得证.

(iii) 由单调性及有限可加性可得证. ▌

定理 2 环 Q 上的集函数 m 有可列可加性，从而 m 是环 Q 上的一个测度.

证明 设

$$E_i \in \mathrm{Q}(i=1,2,\cdots), E_i \cap E_j=\varnothing(i \neq j), \quad E=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

且 $E \in \mathrm{Q}$，来证

$$m(E)=\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i). \qquad (3 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 1)$$

由引理 2(i)(ii)，对任意自然数 n

$$\sum_{i=1}^{n} m(E_i)=m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leqslant m(E).$$

令 $n \rightarrow \infty$，得

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) \leqslant m(E).$$

再证相反的不等式. 为简便计，我们仅就 $R^N=R^1$ 的情况来叙

述. 设 E 的一个初等分解如下式所示：

$$E=\bigcup_{j=1}^{l}(a_j,b_j].$$

不妨认为诸$(a_j,b_j]$非空. 对各个 E_i 分别作出一个初等分解，所作诸 E_i 的初等分解共有可列个半开区间，记其为$(\alpha_n,\beta_n]$, $n=1,2,\cdots$ 显然这些半开区间两两无交，由引理 1 知

$$\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n). \qquad (3\cdot 8\cdot 2\cdot 2)$$

对任意 $\varepsilon>0$(不妨设 $\varepsilon<(b_j-a_j)$, $j=1,\cdots,l$)，作闭区间

$$\left[a_j+\frac{\varepsilon}{l},\ b_j\right],\quad j=1,2,\cdots,l,$$

显然这些闭区间两两无交，又作开区间

$$\left(\alpha_n,\ \beta_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right),\quad n=1,2,\cdots$$

显然这些开区间合起来复盖 E，从而复盖闭集

$$\bigcup_{j=1}^{l}\left[a_j+\frac{\varepsilon}{l},b_j\right].$$

由 Borel 有限复盖定理知可选出有限个开区间

$$\left(\alpha_{n_i},\ \beta_{n_i}+\frac{\varepsilon}{2^{n_i}}\right),\quad i=1,2,\cdots,k,$$

合起来复盖

$$\bigcup_{j=1}^{l}\left[a_j+\frac{\varepsilon}{l},\ b_j\right],$$

从而

$$\bigcup_{j=1}^{l}\left[a_j+\frac{\varepsilon}{l},b_j\right]\subset\bigcup_{i=1}^{k}\left(\alpha_{n_i},\ \beta_{n_i}+\frac{\varepsilon}{2^{n_i}}\right].$$

由 m 的单调性及半有限可加性，

$$\sum_{j=1}^{l}\left(b_j-a_j-\frac{\varepsilon}{l}\right)=m\left(\bigcup_{j=1}^{l}\left(a_j+\frac{\varepsilon}{l},b_j\right]\right)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}m\left(\left(\alpha_{n_i},\beta_{n_i}+\frac{\varepsilon}{2^{n_i}}\right]\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\beta_{n_i}+\frac{\varepsilon}{2^{n_i}}-\alpha_{n_i}\right)$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0$，得

$$\sum_{j=1}^{l}(b_j-a_j)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n).$$

再由(3·8·2·2)，

$$m(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i).$$

所以(1) 成立，即 m 有可列可加性.

显然 m 有非负性，又 $m(\varnothing)=m((a,a])=a-a=0$，所以 m 是环 Q 上的一个测度. ▌

设 $\alpha(x)$ 是 R^N 上的一个分布函数. 对每个 $I\in$ P，定义

$m_\alpha^0(I)=\delta_1^I(\delta_2^I(\cdots(\delta_N^I(\alpha))\cdots))$(见 §3·7 中 3·7·3)，

则 m_α^0 是 P 上的一个集函数. 类似于以上建立环 Q 上测度 m 的过程，我们可以把 m_α^0 从集类 P 扩张到环 Q 上，建立起环 Q 上的测度 m_α.

3·8·2·3 有限测度及 σ－有限测度、完全测度·测度空间

定义 2 (i) 设 μ 是环 R 上的测度. 对于 $E\in$ R，若 $\mu(E)<\infty$，就称集 E **有有限测度**. 若每个 $E\in$ R 都有有限测度，就称**测度 μ 是有限的**. 若 $X\in$ R(即 R 是一个代数) 且 $\mu(X)<\infty$，就称**测度 μ 是全有限的**.

(ii) 设 μ 是环 R 上的测度. 对于 $E\in$ R，若有集列 $\{E_i\}_1^\infty\subset$ R 使 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，而每个 E_i 都有有限测度，就称**集 E 的测度是 σ－有限的**. 若每个 $E\in$ R 的测度都是 σ－有限的，就称**测度 μ 是 σ－有

限的. 若 $X \in$ R(即 R 是一个代数)且 X 的测度是σ—有限的,就称**测度 μ 是全σ—有限的**.

例 3·8·9　对任意 $E \in 2^X$,规定:当 E 为无限集时,$\mu(E)=\infty$;当 E 为有限集时,$\mu(E)$ 等于集 E 中元素的个数. 容易证明,μ 是环 2^X 上的测度. 当 X 是有限集时,μ 是全有限的;当 X 是可列集时,μ 是全σ—有限的;当 X 是不可列集时,μ 不是σ—有限的.

例 3·8·10　R^N 中环 J 上的 Jordan 测度有限的,因而是σ—有限的,但不是全σ—有限的.

例 3·8·11　R^N 中环 Q 上的测度 m 是有限的,因而是σ—有限的,但不是全σ—有限的.

定义 3　(i) 设μ是环 R 上的测度. 若 $E \in$ R, $\mu(E)=0$,就称 E 是μ **零集**.

(ii) 设μ是环 R 上的测度. 若 R 中每个μ零集的任何子集都属于 R,就称μ是一个**完全测度**.

例 3·8·12　R^N 中环 J 上的 Jordan 测度是完全测度. R^N 中环 Q 上的测度 m 是完全测度.

定义 4　若(X,S)是一个可测空间,μ是 S 上的一个测度,就称$(X$,S$,\mu)$是一个**测度空间**(有时简称 X 是测度空间).

设$(X$, S$, \mu)$是测度空间. 若μ是 S 上的有限(全有限、σ—有限、全σ—有限)测度,就称$(X$, S$, \mu)$是**有限(全有限、σ—有限、全σ—有限)的测度空间**. 若μ是 S 上的完全测度,就称$(X$, S$, \mu)$是**完全的测度空间**.

3·8·3　测度引出的外测度

定义 1　设在一个环 R 上给定了测度μ. 若环 $\hat{\text{R}}$ 包含 R,环 $\hat{\text{R}}$ 上有一个测度 $\hat{\mu}$,当 $E \in$ R 时 $\hat{\mu}(E)=\mu(E)$,就称测度 $\hat{\mu}$ 是测度 μ 在环 $\hat{\text{R}}$ 上的一个**扩张**.

在讨论具体问题时,若已经在一个"较小"的环 R 上建立了测度,我们常常希望把这个测度扩张到包含 R 的更大的环上去,特别是扩张到包含 R 的 σ — 环上去. 例如,在 §3·8·2·2 我们建立了 R^N 中环 Q 上的测度 m,就 R^2 中来说,$m(E)$ 就是图形 $E \in$ Q 的通常意义下的面积. 但是仅对 $E \in$ Q 这种简单的图形定义了面积是不够的,由于实际应用的需要,我们还希望对更多的图形定义面积,而且要不丧失可列可加性等通常面积所具有的基本性质. 也就是说我们希望把环 Q 上的测度 m 扩张到更大的环上去,环 J 上的 Jordan 测度是这样的一个扩张. 但 J 不是 σ — 环. 能否把环 Q 上的测度 m 扩张到一个 σ — 环上?Lebesgue 测度的建立给出了肯定的答案. 本节及下节我们将在一般情况下来讨论环 R 上的测度 μ 的扩张问题.

3·8·3·1　环 R 引出的集类 H(R)

定义 2　设 R 是一个环. 若 E 是 R 中的可列个集的并的子集,就称 E 是环 R 引出的集. 环 R 引出的集的全体称为环 R 引出的集类,记作 H(R),即

$$\mathrm{H(R)} = \{E \mid \text{存在}\, E_i \in \mathrm{R}\,(i = 1,2,\cdots)\ \text{使}\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\}.$$

例 3·8·13　R^N 中环 Q 所引出的集类 H(Q) 恰是 R^N 的子集的全体.

命题 1　(i) R $\subset$ H(R).

(ii) 当 $E \in$ H(R) 时,E 的任何子集也属于 H(R).

(iii) H(R) 是一个 σ— 环.

证明　(i),(ii) 显然成立.

(iii) 由 (ii) 知 H(R) 对"差"运算封闭. 再证 H(R) 对"可列并"运算封闭:

设 $E_i \in$ H(R)$(i = 1,2,\cdots)$,则存在 $E_i^j \in$ R$(j = 1,2,\cdots)$ 使 $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j$,从而

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j,$$

故 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathsf{H}(\mathsf{R})$. ▌

3·8·3·2　环 R 上测度 μ 引出的外测度 μ^*

定义 3　设 μ 是环 R 上的测度. 对每个 $E \in \mathsf{H}(\mathsf{R})$,定义

$$\mu^*(E) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i) \,\middle|\, 诸\ E_i \in \mathsf{R},\ E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right\},$$

这个 H(R) 上的集函数 μ^* 称为**由环 R 上的测度 μ 所引出的外测度**(简称 μ 引出的外测度).

例 3·8·14　R^N 中环 Q 上的测度 m,其引出的外测度 m^* 恰是 Lebesgue 外测度. R^N 中环 Q 上的测度 m_α,其引出的外测度 m_α^* 恰是关于分布函数 $\alpha(x)$ 的 L－S 外测度.

例 3·8·15　设空间 X 是一个无限集. §3·8·2 例 2 已指出:X 的所有有限子集作成的集类 R 是一个环,R 上由下式所定义的集函数

$$\mu(E) = E\ 中元素的个数 \quad (当\ E \in \mathsf{R}\ 时)$$

是环 R 上的一个测度. 这时,H(R) 是 X 的一切有限及可列子集作成的 σ－环,因此 $\mathsf{H}(\mathsf{R}) = \mathsf{S}(\mathsf{R})$,由 μ 引出的外测度 μ^* 是这样的一个集函数:当 $E \in \mathsf{R}$ 时 $\mu^*(E) = \mu(E)$,当 $E \in \mathsf{H}(\mathsf{R})$ 而 $E \notin \mathsf{R}$ 时 $\mu^*(E) = \infty$. 容易看出,μ^* 实际是 σ— 环 H(R) 上的一个测度.

定理 1　由环 R 上的测度 μ 所引出的外测度 μ^* 有下列性质:

(i) 非负性:对任 $E \in \mathsf{H}(\mathsf{R})$,有 $\mu^*(E) \geqslant 0$;

另外,　$\mu^*(\varnothing) = 0$.

(ii) 单调性:若 $E_1, E_2 \in \mathsf{H}(\mathsf{R})$,$E_1 \subset E_2$,则

$$\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2).$$

(iii) 半可列可加性:若 $E_i \in \mathsf{H}(\mathsf{R})$ $(i = 1,2,\cdots)$,则

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i);$$

半有限可加性:若 $E_i \in \mathrm{H(R)}(i = 1,\cdots,n)$,则

$$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i).$$

性质(i),(ii)由 μ^* 的定义立即可得证. 性质(iii)的证法与 §2 定理 1(iii) 的证法相同.

定理 2 设 μ^* 是由环 R 上的测度 μ 所引出的外测度,则

(i) 当 $E \in \mathrm{R}$ 时,$\mu^*(E) = \mu(E)$;

(ii) 当 $E \in \mathrm{R}$ 时,对任意 $T \in \mathrm{H(R)}$ 恒有

$$\mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \backslash E) = \mu^* T. \quad (3 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 1)$$

证明 (i) 设 $E \in \mathrm{R}$,由 μ^* 的定义及 $\mu(\varnothing) = 0$ 知

$$\mu^*(E) \leqslant \mu(E).$$

再证相反的不等式. 设 $E_i \in \mathrm{R}$ $(i = 1,2,\cdots)$ 使

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

于是

$$E = E \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (E \cap E_i)$$

且 $E \cap E_i \in \mathrm{R}$. 由 μ 的单调性知

$$\mu(E \cap E_i) \leqslant \mu(E_i).$$

由 μ 的半可列可加性知

$$\mu(E) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E \cap E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

由此根据 μ^* 的定义即知

$$\mu(E) \leqslant \mu^*(E).$$

所以 $\mu(E) = \mu^*(E)$.

(ii) 由于$(T \cap E) \cap (T \backslash E) = T$,根据 μ^* 的半有限可加性知

$$\mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \backslash E) \geqslant \mu^*(T).$$

再证相反的不等式. 由 $\mu^*(T)$ 的定义知,对任 $\varepsilon > 0$,存在一列 $T_i \in \mathrm{R}$,使 $T \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ 且

$$\mu^*(T+\varepsilon \geqslant \sum_{i=1}^{\infty}\mu(T_i).$$

记 $E_i^1 = T_i \cap E, E_i^2 = T_i \backslash E$，由 μ 的有限可加性知

$$\mu(E_i^1)+\mu(E_i^2)=\mu(T_i).$$

由于

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^1 = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i\right) \cap E \supset T \cap E,$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^2 = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i\right) \backslash E \supset T \backslash E,$$

根据(i) 及 μ^* 的半可列可加性、单调性，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\mu(T_i) &= \sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i^1)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i^2)\\ &\geqslant \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^1\right)+\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^2\right)\\ &\geqslant \mu^*(T \cup E)+\mu^*(T\backslash E),\end{aligned}$$

从而

$$\mu^*(T)+\varepsilon \geqslant \mu^*(T \cap E)+\mu^*(T\backslash E).$$

令 $\varepsilon \to 0$，得

$$\mu^*(T) \geqslant \mu^*(T \cap E)+\mu^*(T\backslash E).$$

所以(3・8・3・1) 成立. ▌

3・8・4　测度的扩张

3・8・4・1　μ^* 可测集及其 μ^* 测度

在 §3・8・3我们由环R上的测度 μ 引出了定义在 σ－环H(R)上的外测度 μ^*，并且得知R $\subset$ H(R)，当 $E \in$ R时 $\mu^*(E)=\mu(E)$. μ^* 具有非负性且 $\mu^*(\varnothing)=0$，但 μ^* 未必具有可列可加性，因此 μ^* 未必是 σ－环 H(R) 上的测度. 然而，我们一定可以找到一个含于H(R) 而包含R 的 σ－环 R*，使 μ^* 限制在 R* 上时可列可加性成立，从而 μ^* 限制在 R* 上是一个测度. 下面我们来对此作详细

论述.

定义 1 设 μ 是环 R 上的测度，μ^* 是由 μ 所引出的外测度. 若 $E \in H(R)$ 且 E 满足 Caratheodory 条件：对任何 $T \in H(R)$ 恒有

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \setminus E), \quad (3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 1)$$

就称 E 是 **μ^* 可测集**. μ^* 可测集的全体所成的集类记作 R^*

由 §3·8·3 定理2知任何 $E \in R$ 都是 μ^* 可测集，即 $R \subset R^*$.

引理 1 μ^* 可测集的全体 R^* 是一个环.

证明 设 $A、B \in R^*$. 要证 $A \cup B \in R^*$，$A \setminus B \in R^*$，即要证对任何 $T \in H(R)$ 恒有

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap (A \cup B)) + \mu^*(T \setminus (A \cup B)), \quad (3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2)$$

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap (A \setminus B)) + \mu^*(T \setminus (A \setminus B)). \quad (3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 3)$$

为此，我们把 T 分解成两两无交的四个集的并(图 3·8·1)：

$$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4,$$

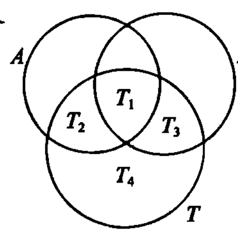

图 3·8·1

其中

$$T_1 = T \cap (A \cap B), \quad T_2 = T \cap (A \setminus B),$$
$$T_3 = T \cap (B \setminus A), \quad T_4 = T \setminus (A \cup B).$$

因为 A 是 μ^* 可测集，在(3·8·4·1)中令 $E = A$ 并且分别令

$T = T$，$T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$、

$T = T_1 \cup T_3 \cup T_4$

得

$$\mu^*(T) = \mu^*(T_1 \cup T_2) + \mu^*(T_3 \cup T_4), \quad (3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 4)$$

$$\mu^*(T_1 \cup T_2 \cup T_3) = \mu^*(T_1 \cup T_2) + \mu^*(T_3), \quad (3 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 5)$$

$$\mu^*(T_1 \cup T_3 \cup T_4) = \mu^*(T_1) + \mu^*(T_3 \cup T_4). \tag{3·8·4·6}$$

因为 B 是 μ^* 可测集，在(1)中令 $E = B$ 并且分别令

$$T = T_1 \cup T_2, \qquad T = T_3 \cup T_4$$

得

$$\mu^*(T_1 \cup T_2) = \mu^*(T_1) + \mu^*(T_2), \tag{3·8·4·7}$$

$$\mu^*(T_3 \cup T_4) = \mu^*(T_3) + \mu^*(T_4). \tag{3·8·4·8}$$

综合(3·8·4·4)、(3·8·4·8)(3·8·4·5)得

$$\mu^*(T) = \mu^*(T_1 \cup T_2 \cup T_3) + \mu^*(T_4),$$

这就是(3·8·4·2).

结合(3·8·4·4)(3·8·4·5)(3·8·4·6)得

$$\mu^*(T) = \mu^*(T_2) + \mu^*(T_1 \cup T_3 \cup T_4),$$

这就是(3·8·4·3). ▌

定理 1　(i) μ^* 可测集的全体 R^* 是一个 σ－环.

(ii) μ^* 限制在 R^* 上是一个测度.

证明　(i) 由引理 1 知 R^* 是一个环. 要证 R^* 是 σ－环，只需再证当 $E_n \in \mathsf{R}^*(n = 1,2,\cdots)$ 时有

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathsf{R}^*.$$

不妨设诸 E_n 两两无交. 显然 $E \in \mathsf{H}(\mathsf{R})$. 对任意 $T \in \mathsf{H}(\mathsf{R})$，由 μ^* 的半有限可加性知

$$\mu^*(T) \leqslant \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \backslash E). \tag{3·8·4·9}$$

再证相反的不等式. 因为 E_1 是 μ^* 可测集且 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$，把定义 1(3·8·4·1)式中的 T, E 分别取为 $T \cap (E_1 \cup E_2), E_1$ 得

$$\begin{aligned} &\mu^*(T \cap (E_1 \cup E_2)) \\ &= \mu^*(T \cap (E_1 \cup E_2) \cap E_1) + \mu^*(T \cap (E_1 \cup E_2) \backslash E_1) \\ &= \mu^*(T \cap E_1) + \mu^*(T \cap E_2). \end{aligned}$$

据此用归纳法即知对每个自然数 n 都有

$$\mu^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}E_i))=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap E_i).$$

由引理1知 $\bigcup_{i=1}^{n}E_i\in \mathrm{R}^*$，根据 R^* 的定义、μ^* 的单调性及上式，

$$\begin{aligned}\mu^*(T)&=\mu^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}E_i))+\mu^*(T\backslash(\bigcup_{i=1}^{n}E_i))\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mu^*(T\cap E_i)+\mu^*(T\backslash E).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，再根据 μ^* 的半可列可加性，

$$\begin{aligned}\mu^*(T)&\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(T\cap E_i)+\mu^*(T\backslash E)\\&\geqslant\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap E_i))+\mu^*(T\backslash E)\\&=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\backslash E).\end{aligned}\qquad(3\cdot8\cdot4\cdot10)$$

由(3·8·1·9)、(3·8·1·10)知

$$\mu^*(T)=\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\backslash E),$$

所以 $E\in\mathrm{R}^*$. 于是 R^* 是 σ－环.

(ii) 只需证 μ^* 限制在 R^* 上时可列可加性成立. (i) 的证明已指出：若 E 为 R^* 中可列个两两无交的集 $E_1,E_2,\cdots$ 之并，则对于任意 $T\in \mathrm{H(R)}$ 上面的(3·8·4·10)式成立，并且(3·8·4·10)式的前后两端相等. 因此

$$\mu^*(T)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(T\cap E_i)+\mu^*(T\backslash E).$$

在上式中用 E 代替 T 即得

$$\mu^*(E)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i).$$

所以 μ^* 是 σ－环 R^* 上的测度. ▌

因为 $\mathrm{R}\subset\mathrm{R}^*$ 且当 $E\in\mathrm{R}$ 时 $\mu^*(E)=\mu(E)$，所以 σ－环 R^* 上的测度 μ^* 是环 R 上的测度 μ 的一个扩张. 今后在不致发生混淆的情况下，R^* 上的测度 μ^* 有时也记作 μ.

我们把上述实现扩张的过程小结一下：设 R 是一个环，μ 是 R 上的一个测度．由环 R 可引出集类 H(R)，它是一个包含 R 的 σ—环．由测度 μ 可引出定义在 H(R) 上的外测度 μ^*，当 $E \in$ R 时 $\mu^*(E) = \mu(E)$．外测度 μ^* 具有测度的一部分性质，如非负性、$\mu^*(\varnothing) = 0$，但 μ^* 未必具有可列可加性．在 H(R) 中利用 Caratheodory 条件可分出一类 μ^* 可测集．μ^* 可测集的全体 R* 是包含 R 的 σ—环，把外测度 μ^* 限制在 R* 上时可列可加性成立，因而 μ^* 是 R* 上的测度．

我们还要指出：

定理 2 设 $\hat{\text{R}}$ 是一个环，并且满足

(i) R $\subset \hat{\text{R}} \subset$ H(R)，

(ii) μ^* 限制在 $\hat{\text{R}}$ 上是测度，

则 $\hat{\text{R}} \subset$ R*，即 R* 是满足(i)(ii) 的最大的环．

证明 记 μ^* 限制在 $\hat{\text{R}}$ 上所成的集函数为 $\hat{\mu}$，$\hat{\mu}$ 是环 $\hat{\text{R}}$ 上的测度，所以可按 §3·8·3 来定义 H($\hat{\text{R}}$) 及 $\hat{\mu}^*$．设 $E \in \hat{\text{R}}$，由 §3·8·3 定理 2，对任 $T \in$ H($\hat{\text{R}}$) 恒有

$$\hat{\mu}^*(T \cap E) + \hat{\mu}^*(T \backslash E) = \hat{\mu}^*(T). \quad (3·8·4·11)$$

我们还不难看出，H(R) = H($\hat{\text{R}}$) 且当 $E \in$ H(R) 时

$$\mu^*(E) = \hat{\mu}^*(E).$$

因此(11) 式说明对任 $T \in$ H(R) 恒有

$$\mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \backslash E) = \mu^*(T),$$

即 $E \in$ R*．于是 $\hat{\text{R}} \subset$ R*． ▌

3·8·4·2 R^N 中的 L 可测集及其 L 测度
R^N 中的 L—S 可测集及其 L—S 测度

§3·8·3 例 2 说到，R^N 中的环 Q 上的测度 m，m_a 所引出的外

测度 m^*, m_α^* 恰是L外测度及关于分布函数 $\alpha(x)$ 的L—S外测度.由 §3·4定理5及 §3·7相应的结论可知, m^* 可测集、m_α^* 可测集恰是L可测集及关于 $\alpha(x)$ 的L—S可测集.我们把 R^N 中 m^* 可测集的全体称为 R^N 中的**Lebesgue可测集类**,记作L(或 L^N);对于 R^N 上给定的分布函数 $\alpha(x)$,我们把 R^N 中 m_α^* 可测集的全体称为 R^N 中**关于 $\alpha(x)$ 的Lebesgue-Stieltjes可测集类**,记作 L_α(或 L_α^N).外测度 m^*, m_α^* 限制在L、L_α 上时恰是L测度及关于 $\alpha(x)$ 的L—S测度(这时 m^*, m_α^* 可改记为 m, m_α),它们分别是Q上测度 m, m_α 的扩张.

我们把 (R^N,L,m) 称为$(N$维$)$**Lebesgue测度空间**;把 $(R^N,\mathrm{L}_\alpha,m_\alpha)$ 称为**关于分布函数 $\alpha(x)$ 的$(N$维$)$Lebesgue-Stieltjes测度空间**.

3·8·4·3 R^* 上测度 μ^* 的完全性·R^* 与 S(R) 的关系

下面的讨论是 §3·8·4·1的继续.

引理2 设 μ 是环R上的测度.若 $E\in \mathrm{H(R)}$, $\mu^*(E)=0$,则 $E\in \mathrm{R}^*$.亦即所有外测度为0的集恰是所有 μ^* 零集.

证明 设 $E\in \mathrm{H(R)}$. $\mu^*(E)=0$.对任 $T\in \mathrm{H(R)}$,由 μ^* 的半有限可加性知

$$\mu^*(T)\leqslant\mu^*(T\cap E)+\mu^*(T\backslash E).\qquad(3\cdot 8\cdot 4\cdot 12)$$

由 μ^* 的非负性及单调性知

$$\mu^*(T\cap E)=0,\quad \mu^*(T)\geqslant\mu^*(T\cap E),$$

因此(3·8·4·12)式的左边不小于右边,从而其两边相等.所以 E 是 μ^* 可测集,从而 E 是 μ^* 零集. ▌

定理3 μ^* 是 R^* 上的完全测度.

证明 设 $E\in \mathrm{R}^*$, $\mu^*(E)=0$.若 $E_1\subset E$,则 $E_1\in \mathrm{H(R)}$,由 μ^* 的单调性及非负性知 $\mu^*(E_1)=0$,由引理2知 $E_1\in \mathrm{R}^*$,所以 μ^* 是 R^* 上的完全测度. ▌

因为 R^* 是包含R的 σ—环,所以 $\mathrm{R}^*\supset \mathrm{S(R)}$. μ^* 限制在S(R)

上当然也是测度，但一般不是完全测度. R^* 比 $\mathrm{S(R)}$ 究竟多了些什么?我们来讨论这个问题.

引理 3 设 $E\in\mathrm{R}^*$, $\mu^*(E)<\infty$，则存在 $G\in\mathrm{S(R)}$，使

$$G\supset E,\quad \mu^*(G\backslash E)=0.$$

证明 (1°) 对任意 $\varepsilon>0$，由 μ^* 的定义知存在一列 $E_i\in\mathrm{R}$ 使 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$ 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\leqslant\mu^*(E)+\varepsilon.$$

令 $G_\varepsilon=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，则 $G_\varepsilon\in\mathrm{S(R)}$，由 μ^* 的半可列可加性知

$$\mu^*(G_\varepsilon)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i)\leqslant\mu^*(E)+\varepsilon.$$

(2°) 取 $\varepsilon=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，由(1°) 知存在 $G_n\supset\mathrm{S(R)}$ 使

$$G_n\supset E\quad 且\quad \mu^*(G_n)\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}.$$

令 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$，则 $G\in\mathrm{S(R)}$，$G\supset E$，

$$\mu^*(E)\leqslant\mu^*(G)\leqslant\mu^*(G_n)\leqslant\mu^*(E)+\frac{1}{n}.$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\mu^*(E)=\mu^*(G),$$

又由 E、$G\in\mathrm{R}^*$ 知

$$\mu^*(G)=\mu^*(E)+\mu^*(G\backslash E),$$

注意到 $\mu^*(E)<\infty$ 便知 $\mu^*(G\backslash E)=0$. ▌

由引理 3 易知，一个 μ^* 零集一定是一个属于 $\mathrm{S(R)}$ 的 μ^* 零集的子集.

定理 4 若 R^* 上的测度 μ^* 是 σ — 有限的，则

(i) R^* 中的集 E 必可表为 $\mathrm{S(R)}$ 中的一个集 G 与一个 μ^* 零集 N 之差 $G\backslash N$;

(ii) R^* 中的集 E 必可表为 $\mathrm{S(R)}$ 中的一个集 F 与一个 μ^* 零集 N 之并 $F\cup N$.

证明 (i) 设 $E\in\mathrm{R}^*$. 由于 μ^* 是 R^* 上的 σ—有限测度，所以存在 $\{E_i\}_1^\infty\subset\mathrm{R}^*$ 使诸 $\mu^*(E_i)<\infty$ 且 $E\subset\bigcup_{i=1}^\infty E_i$. 不妨认为

$$E=\bigcup_{i=1}^\infty E_i$$

(否则用 $E_i\cap E$ 代替 E_i 即可). 由引理 3，对每个 E_i，存在 $G_i\in\mathrm{S(R)}$，$G_i\supset E_i$ 使

$$\mu^*(G_i\backslash E_i)=0.$$

令 $G=\bigcup_{i=1}^\infty G_i$，则 $G\in\mathrm{S(R)}$，$G\supset E$，且

$$G\backslash E=\left(\bigcup_{i=1}^\infty G_i\right)\backslash\left(\bigcup_{i=1}^\infty E_i\right)\subset\bigcup_{i=1}^\infty(G_i\backslash E_i),$$

所以

$$\mu^*(G\backslash E)\leqslant\sum_{i=1}^\infty\mu^*(G_i\backslash E_i)=0,$$

从而 $\mu^*(G\backslash E)=0$. 令 $N=G\backslash E$，则 N 是 μ^* 零集，而 $E=G\backslash N$.

(ii) 设 $E\in\mathrm{R}^*$. 由(i) 知 E 可表成

$$E=G\backslash N_0,$$

其中

$$G\in\mathrm{S(R)},N_0\in\mathrm{R}^*,\mu^*(N_0)=0.$$

由引理 3 知存在

$$\hat{N}\in\mathrm{S(R)},\quad \mu^*(\hat{N})=0,\text{使 }\hat{N}\supset N_0.$$

令 $F=G\backslash\hat{N}$，则 $F\in\mathrm{S(R)}$，$F\subset E$. 易知 $E\backslash F\subset\hat{N}$，故

$$\mu^*(E\backslash F)\leqslant\mu^*(\hat{N})=0.$$

令 $N=E\backslash F$，则 N 是 μ^* 零集，而 $E=F\cup N$. ▌

3·8·4·4 环 R 上 σ—有限测度 μ 的扩张

定理 5 若环 R 上的测度 μ 是 σ—有限的，则环 R^* 上的测度

μ^* 也是 σ — 有限的.

证明 设 $E \in \mathrm{R}^*$,则 $E \in \mathrm{H(R)}$,从而有一列 $E_i \in \mathrm{R}$ 使 $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. 因 R 上的测度 μ 是 σ — 有限的,故对每个 E_i 有 $\{E_i^j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathrm{R}$ 使诸 $\mu(E_i^j) < \infty$ 且 $E_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j$. 因此

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i^j, \quad 诸\ \mu^*(E_i^j) = \mu(E_i^j) < \infty.$$

所以 E 的 μ^* 测度是 σ—有限的. 由 E 是 R^* 中任意的集知环 R^* 上的测度 μ^* 是 σ — 有限的. ▌

定理 6 若环 R 上的测度 μ 是 σ — 有限的,μ_1,μ_2 是 μ 在 σ — 环 S(R) 上的两个扩张. 则在 S(R) 上 μ_1 与 μ_2 相同.

这个定理的证明可参见[8]《测度论》第三章 §13.

根据 §3·8·4 诸定理我们看到:当 μ 是环 R 上的 σ — 有限的测度时,μ 在 S(R) 上的扩张存在且唯一. 设此扩张为 $\hat{\mu}$,$\hat{\mu}$ 即 μ^* 在 S(R) 上的限制. 所以我们可以从 S(R) 及其上的 $\hat{\mu}$ 出发,按照下述方式作出 R^* 及其上的 μ^*:

$$\mathrm{R}^* = \{F \cup N \mid F \in \mathrm{S(R)},存在\ \hat{\mu}\ 零集\ \hat{N}\ 使\ N \subset \hat{N}\},$$
$$\mu^*(F \cup N) = \hat{\mu}(F)\ (当\ F、N\ 满足上面大括号内的条件时).$$

这也就是说,R^* 上的测度 μ^* 恰是 S(R) 上的测度 $\hat{\mu}$ 的完全化.

例 3·8·16 由 §3·8·4·3 可知,Lebesgue 可测集类 L 上的 Lebesgue 测度 m 是完全测度. 关于 L 与 Borel 集类 B = S(Q) 的关系,§3·8·4·3 的讨论与 §3·4·3 是一致的. §3·4·3 曾提到不是 Borel 集的 Lebesgue 可测集是存在的,因此 Lebesgue 测度 m 限制在 B = S(Q) 上不是完全测度. 由于环 Q 上的测度 m 是 σ— 有限的,由 §3·8·4·4 可知,L 上的 Lebesgue 测度 m 也是 σ— 有限的,并且 L 上的测度 m 在 S(R) 上的限制恰是 Q 上的测度 m 在 S(Q) 上的唯一扩张,而 L 上的测度 m 则是这一扩张的完全化. 把 §3·8·4·3 及 §3·8·4·4 的讨论应用于(R^N,L_a,m_a),情况与

(R^N, L, m) 类似.

3·8·5 乘积可测空间与乘积测度空间

3·8·5·1 乘积可测空间

在 §3·8·5·1,我们总假设(X,S)、(Y,T)是两个可测空间,并且把乘积空间 $X\times Y$ 中的集类

$$\{A\times B \mid A\in \mathrm{S}, B\in \mathrm{T}\}$$

记作 P(称 $A\times B(A\in \mathrm{S}, B\in \mathrm{T})$ 为 P 中的矩形),把集类

$$\left\{\bigcup_{i=1}^{n} E_i \,\middle|\, n\in \mathrm{N}, E_i\in \mathrm{P}(i=1,\cdots,n),\text{诸 } E_i \text{ 两两无交}\right\}$$

记作 Q,而把包含 P 的最小 σ-环 S(P) 记作 $\mathrm{S}\times\mathrm{T}$.

显然$(X\times Y, \mathrm{S}\times\mathrm{T})$是一个可测空间.

定义 1 可测空间$(X\times Y, \mathrm{S}\times\mathrm{T})$称为$(X,\mathrm{S})$与$(Y,\mathrm{T})$的**乘积可测空间**.

命题 1 在 $X\times Y$ 中,Q 恰是包含 P 的最小环 R(P).

证明 显然 $\mathrm{Q}\subset \mathrm{R(P)}$. 再证 $\mathrm{Q}\supset \mathrm{R(P)}$,而这只需证 Q 是一个环.

由以下二式可知,P 中任两个矩形的交仍属于 P,P 中任两个矩形的差属于 Q:

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2),$$

$$(A_1\times B_1)\backslash(A_2\times B_2)$$
$$=[(A_1\cap A_2)\times(B_1\backslash B_2)]\cup[(A_1\backslash A_2)\times B_1]\text{(图 3·8·2)}.$$

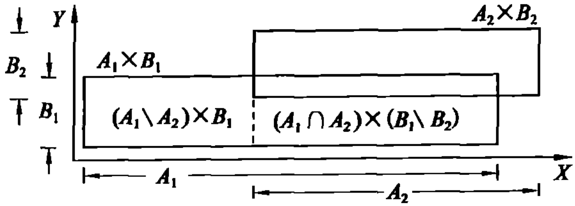

图 3·8·2

设 $E,F \in \mathsf{Q}$,则 E,F 可表为 P 中的有限个两两无交的矩形之并:

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i,\ F = \bigcup_{j=1}^{n} F_j.$$

这时

$$E \cap F = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n} (E_i \cap F_j),$$

诸 $E_i \cap F_j$ 是 P 中两两无交的矩形,故

$$E \cap F \in \mathsf{Q}.$$

所以 Q 对"有限交"运算封闭.

对上述的 E、F,经演算可知

$$E \backslash F = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcap_{j=1}^{n} (E_i \backslash F_j).$$

由已证得的结论知,$E_i \backslash E_j \in \mathsf{Q}$, $\bigcap\limits_{j=1}^{n} (E_i \backslash F_j) \in \mathsf{Q}$,而

$$\bigcap_{j=1}^{n} (E_i \backslash F_j),\quad i = 1,2,\cdots,m$$

两两无交,故 $E \backslash F$ 可表为 P 中的有限个两两无交的矩形之并,即

$$E \backslash F \in \mathsf{Q}.$$

由于 $E \cup F = (E \backslash F) \cup F$,$E \backslash F$ 与 F 无交,$E \backslash F \in \mathsf{Q}$,所以

$$E \cup F \in \mathsf{Q}.$$

总之 Q 是环,所以 $\mathsf{Q} = \mathsf{R}(\mathsf{P})$. ▌

根据命题 1 及 §3·8·1 命题 2 又知,在 $X \times Y$ 中

$$\mathsf{S}(\mathsf{Q}) = \mathsf{S}(\mathsf{P}) = \mathsf{S} \times \mathsf{T}.$$

3·8·5·2　乘积测度空间

在 §3·8·5·2,我们总假设 (X,S,μ),(Y,T,ν) 是两个 σ—有限的测度空间,$X \times Y$ 中集类 $\mathsf{P},\mathsf{Q} \subset \mathsf{S} \times \mathsf{T}$ 的规定仍如 §3·8·5·1. 对 $E \in \mathsf{Q}$,若 E 可表为 P 中的有限个两两无交的矩形 $E_1,\cdots,E_n$ 之并,就称 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是 E 的一个**初等分解**. 显然 $E \in \mathsf{Q}$ 的初等分解存在,但未必唯一.

命题 2 (i) 对 P 中的每个矩形 $A\times B(A\in \mathsf{S},B\in \mathsf{T})$,定义

$$\lambda^{\circ}(A\times B)=\mu(A)\times\nu(B),$$

则 λ° 是 P 上的一个集函数.

(ii) 对每个 $E\in \mathsf{Q}$,任取 E 的一个初等分解$\{E_1,\cdots,E_n\}$,令

$$\lambda(E)=\sum_{i=1}^{n}\lambda^{\circ}(E_i),$$

则 $\lambda(E)$ 不随 E 的初等分解的不同选取而改变,从而 λ 是环 Q 上的一个集函数,并且 λ 限制在 P 上与 λ° 相同.

(iii) 集函数 λ 是环 Q 上的一个测度,而且是环 Q 上唯一满足条件

$$\lambda(A\times B)=\mu(A)\times\nu(B)(\text{任 } A\in \mathsf{S},B\in \mathsf{T}) \tag{3·8·5·1}$$

的测度;λ 还是环 Q 上 σ—有限的测度.

这个命题的证明很繁琐,我们就略去了.

按照 §3·8·3 及 §3·8·4 所说的环上测度的扩张程序,我们把上述环 Q 上的测度 λ 进行扩张:在乘积空间 $X\times Y$ 中,设环 Q 上测度 λ 所引出的外测度为 λ^*,λ^* 可测集的全体为 Q^*,则 λ^* 是 σ—环 Q^* 上的完全测度,并且还是 σ—有限的测度. λ^* 在 S(Q) 上的限制则是 Q 上的测度 λ 在 S(Q) 上的唯一扩张,因而 S(Q) 上的测度 λ^* 是 S(Q) 上满足条件(1) 的唯一测度,它当然也是 σ—有限的测度.

定义 2 设(X,S,μ),(Y,T,ν)是两个 σ—有限的测度空间,我们把上述的 σ—环 Q^* 记作$\widehat{\mathsf{S}\times\mathsf{T}}$,把 Q^* 上的测度 λ^* 记作$\widehat{\mu\times\nu}$,称测度空间$(X\times Y,\widehat{\mathsf{S}\times\mathsf{T}},\widehat{\mu\times\nu})$ 为(X,S,μ) 与(Y,T,ν) 的**完全乘积测度空间**,而称$\widehat{\mu\times\nu}$ 为 μ 与 ν 的**完全乘积测度**. 我们把 λ^* 在 $\mathsf{S}(\mathsf{Q})=\mathsf{S}\times\mathsf{T}$ 上的限制记作 $\mu\times\nu$,称测度空间$(X\times Y,\mathsf{S}\times\mathsf{T},\mu\times$

ν) 为(X,S,μ) 与(Y,T,ν) 的**乘积测度空间**,而称 $\mu\times\nu$ 为 μ 与 ν 的**乘积测度**.

例 3・8・17　容易证明,Lebesgue 测度空间(R^p,L^p,m) 与(R^q,L^q,m) 的完全乘积测度空间恰为 (R^{p+q},L^{p+q},m); Lebesgue-Stieltjes 测度空间(R^p,L_α^p,m_α) 与(R^q,L_β^q,m_β) 的完全乘积测度空间恰为(R^{p+q},$\mathrm{L}_{\alpha\times\beta}^{p+q}$,$m_{\alpha\times\beta}$).

习　题　三

1. 把§3·2定义1(Lebesgue外测度的定义)中的“可列半开区间复盖”改成“可列开区间复盖”,所得定义与原定义等价.试证明之.

2. 根据§3·2定义1证明:可列个点组成的集,其外测度必为0.

3. 根据§3·2证明:若G为开集,$\{I_n\}_1^\infty$为G的任一半开区间分解,则$m^*G=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|$.

4. 把§3·2定义1中的“可列半开区间复盖”改成“由可列个两两无交的半开区间所组成的复盖”,所得定义与原定义等价.试利用第3题证明之.

5. 设E是R^1中的有界集,$m^*E>0$,则对每个小于m^*E的正数c,恒存在E的子集E_1使$m^*E_1=c$.

6. 求$\alpha-$Cantor集K_α的测度.

7. 设A、B是有界可测集,则$m(A\cup B)=mA+mB-m(A\cap B)$.

8. 设$A\subset[0,1]$,A_i为可测集$(i=1,2,\cdots,n)$.若$\sum_{i=1}^{n}mA_i>n-1$,　则$m\bigcap_{i=1}^{n}A_i>0$.

9. 设可测集$A_n\subset[0,1](n=1,2,\cdots)$.若1是$\{mA_n\}_1^\infty$的聚点,则存在$\{A_n\}_1^\infty$的子列$\{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty$使$m\bigcap_{k=1}^{\infty}A_{n_k}>0$.

10. 设$\{E_n\}_1^\infty$是一列可测集,k是给定的自然数.令$G=\{x\mid\{E_n\}_1^\infty$中至少有$k$个项含$x\}$,则$G$是可测集.

11. 设$\{A_n\}$是一列可测集.若$\lim_{N\to\infty}m\bigcup_{n=N}^{\infty}A_n=0$,则$m\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}A_n=0$.反过来对吗?

12. 设 $mE<\infty$，$\delta>0$，证明 E 可以表成两两无交的有限个测度小于 δ 的子集之并.

13. 下列命题是否正确？为什么？

(i) 若 A,B 都是可测集，$A\supset B$，则 $m(A\backslash B)=mA-mB$.

(ii) 若 G_1,G_2 都是开集，G_1 是 G_2 的真子集，则 $mG_1<mG_2$.

14. 对任意开集 G，是否 $m\overline{G}=mG$？是否 $m(\partial G)=0$？

15. 设 G 是开集，N 是零集，证明 $\overline{G}=(\overline{G\backslash N})$.

16. 设可测集 $E\subset(0,1)$. 若存在一个常数 $\alpha>0$，使对于每个开区间 $(a,b)\subset(0,1)$ 都有 $m(E\cap(a,b))\geqslant\alpha(b-a)$，则 $mE=1$.

17. 设 E 为有界可测集，问：(i) 是否对任意 $\varepsilon>0$ 恒存在闭集 $F\supset E$ 使 $mF\leqslant mE+\varepsilon$？

(ii) 是否对任意 $\varepsilon>0$ 恒存在开集 $G\subset E$ 使 $mG\geqslant mE-\varepsilon$？

18. 设 E 为一点集，证明当下列条件之一成立时 E 为可测集：

(i) 对任意 $\varepsilon>0$ 恒存在可测集 $A\supset E$ 使 $m^*(A\backslash E)\leqslant\varepsilon$；

(ii) 对任意 $\varepsilon>0$ 恒存在可测集 $B\subset E$ 使 $m^*(E\backslash B)\leqslant\varepsilon$；

(iii) 对任意 $\varepsilon>0$ 恒存在二可测集 A 与 B，使 $A\supset E\supset B$ 且 $m(A\backslash B)\leqslant\varepsilon$.

19. 证明：(i) 对任意点集 E 总存在 G_δ 型集 $G\supset E$ 使 $mG=m^*E$；

(ii) 对任意有界点集 E 总存在 F_σ 型集 $F\subset E$ 使 $mF=m^*E$.

20. 设 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 是两两无交的可测集，$E_i\subset S_i(i=1,\cdots,n)$，则 $m^*\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i=\sum\limits_{i=1}^{n}m^*E_i$. 若 $\{S_i\}$ 是一列两两无交的可测集，$E_i\subset S_i(i=1,2,\cdots)$，问是否 $m^*\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m^*E_i$？

21. 若 R^N 中 $E_n\uparrow E$，则 $m^*E_n\uparrow m^*E$.

22. 对于点集 E，若存在测度有限的可测集 $X\supset E$，使 $m^*E+m^*(X\backslash E)=mX$，则 E 是可测集.

23. 设 E 是有界点集，记 E 的边界点的全体为 ∂E. 证明 E 为

可测集的充要条件是

$$m^*(\partial E) = m^*(\partial E \cap E) + m^*(\partial E \setminus E).$$

24. 设由 R^1 中的一切可测集所组成的集为 L^1，又设由 R^1 中的一切点集所组成的集为 2^{R^1}，证明 L^1 与 2^{R^1} 对等.

25. 证明 R^1 中的正测度点集必包含一个不可测子集.

26. 设可测集 $E \subset R^1$，$mE > 0$，则

(i) 存在 $x,y \in E$，使 $\rho(x,y)$ 为无理数；

(ii) 存在 $x,y \in E$，使 $\rho(x,y)$ 为正有理数.

27. 证明 R^1 中的 Lebesgue 可测集经反射变换(即映 $x \in R^1$ 成 $-x$ 的变换)后仍为 Lebesgue 可测集，并且 Lebesgue 测度不变.

28. 设可测集 $A \subset [-1,1]$，$mA > 1$，证明存在 A 的可测子集 A_1，使 $mA_1 > 0$ 且 A_1 关于原点对称.

29. 设 T_h 是 R^1 的平移量为 h 的平移变换. 若 $E \subset R^1$，$mE > 0$，则存在 $\varepsilon > 0$，使当 $|h| < \varepsilon$ 时 $m(E \cap T_h(E)) > 0$.

30. 若 A 为 R^p 中的非空可测集，B 为 R^q 中的不可测集，问 $A \times B$ 是否 $R^p \times R^q$ 中的不可测集？

31. 作一个包含于$[0,1]$的可测集 E，使对于任何非空开区间 $\triangle \subset [0,1]$，都有

$$m(\triangle \cap E) > 0, \qquad m(\triangle \setminus E) > 0.$$

(答案可见于[17]P. 59)

32. 举出 R^1 上的一个分布函数 $\alpha(x)$ 及 R^1 中的一个点集 E，使 E 是 $\alpha-$可测集，但经过平移变换 $T_1(T_1(x) = x+1)$ 后所得到的 $T_1(E)$ 不是 $\alpha-$可测集.

33. 设 $\alpha_1(x)$，$\alpha_2(x)$ 是 R^1 上的两个分布函数，相应于每个半开区间$(a,b]$恒有

$$\alpha_1(b) - \alpha_1(a) \leqslant \alpha_2(b) - \alpha_2(a).$$

证明当 E 为 α_2-可测集时，E 必为 α_1-可测集. 问当 E 为 α_1-可测集时，E 是否为 α_2-可测集？

第四章　可测函数

我们要研究 Lebesgue 积分就必须来研究 Lebesgue 可测函数，因为只有 Lebesgue 可测函数才可能进行 Lebesgue 积分. Lebesgue 可测函数类是相当广泛的一个函数类，我们一般常见的函数(如连续函数、连续函数列的极限函数等)差不多都包含在它里面. 因此对这类函数的研究无论从理论上说还是从应用上说都是意义重大的.

§4·1　广义实函数及相关的集合

4·1·1　广义实函数

设 E 是一个非空集合(不一定是 R^N 中的点集). E 到 R^1 的映射 f 叫做 E 上的**实函数**；E 到 $R^1\cup\{+\infty,-\infty\}$ 的映射 f 叫做 E 上的**广义实函数**.

实变函数论中所涉及的函数主要是广义实函数. 我们约定：第四、五、六章中凡说函数均指广义实函数，而把"实函数"说成"处处有限的函数"或"有限函数".

"E 上的函数 f"还往往说成"E 上的函数 $f(x)$"($f(x)$ 的本来意义是 E 中的元 x 在 f 下的象). 设 f、g 都是 E 上的函数，a 是实数，我们规定：$f+g$，af，$|f|$ 分别指 E 上的函数 $f(x)+g(x)$，$af(x)$，$|f(x)|$，如此等等.

如果函数 $f_n(n=1,2,\cdots)$ 及 f 的定义域已被指明都是 E，这

时“$f_1(x) > f_2(x)(x \in E)$”(意即对每个 $x \in E$ 都有 $f_1(x) > f_2(x)$) 可简记为“$f_1(x) > f_2(x)$”或“$f_1 > f_2$”,类似地,“$f_n(x) \to f(x)(x \in E)$”可简记为“$f_n(x) \to f(x)$”或“$f_n \to f$”,“$f(x)$ 在 E 上有界”可简记为“$f(x)$ 有界”或“f 有界”,如此等等.

定义 1 对集合 E 上的函数 $f(x)$,令

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \text{ 使 } f(x) > 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 使 } f(x) \leqslant 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x), & \text{当 } x \text{ 使 } f(x) < 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 使 } f(x) \geqslant 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

函数 $f^+(x)$ 称为 $f(x)$ 的**正部**,而函数 $f^-(x)$ 称为 $f(x)$ 的**负部**.

$f^+(x)$ 与 $f^-(x)$ 都是非负函数,并且 $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. 以后常常把对函数 $f(x)$ 的研究化归为对非负函数 $f^+(x)$ 与 $f^-(x)$ 的研究.

关于 f^+, f^- 有如下常用的关系式:

(i) $|f| = f^+ + f^-$.

(ii) 当 f 是有限函数时, $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$ 且 $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

(iii) $f^+ \leqslant |f|$; $f^- \leqslant |f|$.

(iv) $(-f)^+ = f^-$; $(-f)^- = f^+$.

(v) 当 $f \geqslant 0$ 时 $f^+ = f$, $f^- = 0$; 当 $f \leqslant 0$ 时 $f^+ = 0$, $f^- = -f$.

4·1·2 函数定义域中的示性集

设 $f(x)$ 是集合 E 上的函数,a、b 是实数,我们记

$$E[f \geqslant a] = \{x \mid x \in E,\ f(x) \geqslant a\},$$

$$E[a < f \leqslant b] = \{x \mid x \in E,\ a < f(x) \leqslant b\},$$

等等,这些集都是函数 f 的定义域 E 的子集,它们刻划了函数 f 某方面的性质. 我们不妨把这种集称为函数定义域中的示性集. 今后对于函数的讨论,要经常进行这种集的演算,下面举出演算中常用

的几条关系式：

(i) $E[f \geqslant a] \cup [f < a] = E$.

(ii) 若 $a \geqslant b$，则 $E[f > a] \subset E[f > b]$.

(iii) $E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant a + \frac{1}{n}\right]$；

$$E[f \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right].$$

(iv) $E[f = +\infty] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E[f > n]$.

(v) $E[f > a] \cap E[f \leqslant b] = E[a < f \leqslant b]$.

(vi) 若 $f(x) \geqslant g(x)(x \in E)$，则 $E[f > a] \supset E[g > a]$.

(vii) 若 $f(x)$，$g(x)$ 为 E 上的函数，则

$$E[f > g] = E[f - g > 0]$$

(但 $E[f \geqslant g]$ 未必等于 $E[f - g \geqslant 0]$).

(viii) 若 $g(x) = \sup\limits_{n} f_n(x)(x \in E)$，则

$$E[g > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n > a];$$

若 $h(x) = \inf\limits_{n} f_n(x)(x \in E)$，则 $E[h < a] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E[f_n < a]$.

(ix) 设 $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ 是 E 上的一列函数，$f(x)$ 是 E 上的有限函数，则

$$E[f_n \nrightarrow f] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right],$$

$$E[f_n \to f] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| < \frac{1}{k}\right],$$

其中 $E[f_n \nrightarrow f]$ 是指 E 中使 $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ 不趋于 $f(x)$ 的元素 x 的全体，$E[f_n \to f]$ 是指 E 中使 $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ 趋于 $f(x)$ 的元素 x 的全体.

这里只证(iii) 的第一式及(ix) 的第一式，其余留给读者练习.

证明　证(iii) 的第一式：设 $x \in E[f > a]$，则 $f(x) > a$，从而存在自然数 n_0 使 $f(x) \geqslant a + \frac{1}{n_0}$，故

$$x \in E\left[f \geqslant a+\frac{1}{n_0}\right],\ x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant a+\frac{1}{n}\right].$$

另一方面,设 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant a+\frac{1}{n}\right]$,则存在自然数 n_0 使 $x \in E\left[f \geqslant a+\frac{1}{n_0}\right]$,从而 $f(x) \geqslant a+\frac{1}{n_0}>a$,故 $x \in E[f>a]$.

总之 $E[f>a]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant a+\frac{1}{n}\right]$.

证(ix) 的第一式:下面的符号"$\Leftrightarrow$"表示它前面的断语与它后面的断语等价.

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n-f| \geqslant \frac{1}{k}\right]$$

$\Leftrightarrow$ 存在正整数 k_0,使 $x_0 \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n-f| \geqslant \frac{1}{k_0}\right]$.

$\Leftrightarrow$ 存在 k_0,使对任意自然数 N,都有

$$x_0 \in \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n-f| \geqslant \frac{1}{k_0}\right].$$

$\Leftrightarrow$ 存在 k_0,使对任意 N,都有自然数 $n_N \geqslant N$,使

$$x_0 \in E\left[|f_{n_N}-f| \geqslant \frac{1}{k_0}\right].$$

$\Leftrightarrow$ 存在 k_0,使对任意 N,都有自然数 $n_N \geqslant N$,使

$$|f_{n_N}(x_0)-f(x_0)| \geqslant \frac{1}{k_0}.$$

$\Leftrightarrow$ 数列 $\{f_n(x_0)\}$ 不趋于 $f(x_0)$.

$\Leftrightarrow$ $x_0 \in E[f_n \nrightarrow f]$.

所以 $E[f_n \nrightarrow f]=\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n-f| \geqslant \frac{1}{k}\right]$. ▌

4·1·3 非负函数的下方图

定义 2 设 $f(x)$ 是集合 E 上的非负函数(函数值是非负实数

或 $+\infty$). $E\times R^1$ 中的集合

$$\{(x,z)\mid x\in E,0\leqslant z<f(x)\}$$

称为非负函数 $f(x)$ 的**下方图**,记作 $G(E,f)$.

为以后的讨论作准备,我们举出关于这种集的两个结论:

(i) 设 $E=\bigcup\limits_i E_i$, $f(x)$ 是 E 上的非负函数,则

$$G(E,f)=\bigcup_i G(E_i,f).$$

(ii) 设 $\{f_n(x)\}$ 是集 E 上的非负函数递增列, 即在 E 上

$$0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)\leqslant\cdots,$$

在 E 上

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

则 $\{G(E,f_n)\}$ 是渐张集列, $\lim\limits_{n\to\infty}G(E,f_n)=G(E,f)$.

证明 (i) 显然成立.

(ii) 显然 $\{G(E,f_n)\}$ 是渐张集列, 所以

$$\lim_{n\to\infty}G(E,f_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,f_n).$$

只需证

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,f_n)=G(E,f).$$

由 $G(E,f_n)\subset G(E,f)$ 知

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,f_n)\subset G(E,f).$$

另一方面,设 $(x_0,z_0)\in G(E,f)$,则

$$x_0\in E,0\leqslant z_0<f(x_0).$$

由 $f_n(x_0)\uparrow f(x_0)$ 知存在 n_0 使

$$0\leqslant z_0<f_{n_0}(x_0)\leqslant f(x_0),$$

故 $(x_0,z_0)\in G(E,f_{n_0})$. 所以

$$G(E,f)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,f_n).$$

于是

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G(E, f_n) = G(f, E). \blacksquare$$

4·1·4 集合相对于基本集的特征函数

定义 3 设 X 是基本集. 对于 X 的子集 E,作 X 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in E \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \in X \setminus E \text{ 时}, \end{cases}$$

称 $f(x)$ 为集合 E 相对于 X 的 **特征函数**, 记作 $\chi_{E\subset X}(x)$.

在讨论某类具体问题时,基本集是什么往往不说自明,这时 $\chi_{E\subset X}(x)$ 就简记成 χ_{E_i} 并简称为集合 E 的特征函数.

§4·2 Lebesgue 可测函数的定义

本节及以后的各章节,若无特别声明,说到的函数均指 R^N 中点集上的函数,并且凡说"可测集"、"测度" 均指"Lebesgue 可测集"、"Lebesgue 测度".

4·2·1 Lebesgue 可测函数的定义

定义 1 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数(函数值为实数或 $\pm\infty$). 若对任何实数 a,点集 $E[f>a]$ 恒为可测集,就称 $f(x)$ 是 E 上的 Lebesgue **可测函数**,简称 E 上的**可测函数**.

例 4·2·1 R^N 上的连续函数是可测函数.

例 4·2·2 区间$[a,b]$ 上的单调函数是可测函数.

例 4·2·3 对于 §3·5 中所说的不可测集 S,定义

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in S \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \in [0,1] \setminus S \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 不是$[0,1]$ 上的可测函数.

定理 1 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数,则以下四条是彼此等价的.

(i) 对任何实数 a,点集 $E[f>a]$ 恒可测;

(ii) 对任何实数 a,点集 $E[f \geqslant a]$ 恒可测;

(iii) 对任何实数 a,点集 $E[f \leqslant a]$ 恒可测;

(iv) 对任何实数 a,点集 $E[f < a]$ 恒可测.

证明 证(i) 与(ii) 等价:

$$E[f \geqslant a] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[f > a - \frac{1}{n}\right],$$

$$E[f > a] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[f \geqslant a + \frac{1}{n}\right].$$

根据可测集的运算性质便知(i) 与(ii) 等价.

证(i) 与(iii) 等价:

$$E[f \leqslant a] = E \backslash E[f > a],$$

$$E[f > a] = E \backslash E[f \leqslant a].$$

根据可测集的运算性质便知(i) 与(iii) 等价.

证(ii) 与(iv) 等价:类似于证(i) 与(iii) 等价便可证得. ▌

根据定理1,如果把定义1中的“$E[f > a]$”改为“$E[f \geqslant a]$”、“$E[f \leqslant a]$”,“$E[f < a]$”中的任何一个,所得定义将与原定义等价.

4·2·2　函数的可测性与正、负部的可测性之关系

定理2　E上的函数$f(x)$为可测函数的充要条件是它的正部$f^+(x)$、负部$f^-(x)$都为可测函数.

证明 充分性:设$f^+(x)$,$f^-(x)$在E上均可测.自然E为可测集.对任意$a \in R^1$,若$a \geqslant 0$,则由

$$E[f > a] = E[f^+ > a]$$

可知 $E[f > a]$ 可测;若 $a < 0$,则由

$$E[f > a] = E[f^- < -a]$$

可知 $E[f > a]$ 可测.所以 $f(x)$ 可测.

必要性:设 $f(x)$ 在 E 上可测.自然 E 为可测集.

先看 $f^+(x)$.对任意 $a \in R^1$,若 $a < 0$,则 $E[f^+ > a] = E$ 可

测;若 $a\geqslant 0$,则 $E[f^+>a]=E[f>a]$ 也可测. 所以 $f^+(x)$ 可测.

再看 $f^-(x)$. 对任意 $a\in R^1$,若 $a>0$,则

$$E[f^-<a]=E[f>-a]\ \text{可测};$$

若 $a\leqslant 0$,则 $E[f^-<a]=\varnothing$ 也可测. 所以 $f^-(x)$ 可测. ▌

§4·3 可测函数与简单函数

4·3·1 简单函数的定义及运算性质

定义 1 若 E 上的函数 $f(x)$ 的值域仅由有限个实数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 所组成,并且 $E[f=c_1],E[f=c_2],\cdots,E[f=c_n]$ 都是可测集,就称 $f(x)$ 是 E 上的**简单函数**.

简单函数显然是可测函数.

例 4·3·1 若区间$[a,b]$可划分成有限个两两无交的小区间,使$[a,b]$上的函数 $f(x)$ 在每个小区间上取常实数值,就称 $f(x)$ 为$[a,b]$上的**阶梯函数**. 阶梯函数显然是简单函数.

例 4·3·2 若 E,A 都是可测集,$E\supset A$,则 A 相对于 E 的特征函数 $\chi_{A\subset E}(x)$ 是 E 上的一个简单函数.

定义 1 还可以这样来叙述:若 E 上的函数 $f(x)$ 可表示成如下的形式:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot\chi_{E_i\subset E}(x),\qquad(4\cdot 3\cdot 1)$$

其中 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为两两无交的可测集且满足 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i=E$,$\chi_{E_i\subset E}(x)$ 是 E_i 相对于 E 的特征函数,$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 是实常数,就称 $f(x)$ 是 E 上的简单函数.

我们还称式(4·3·1)为简单函数 $f(x)$ 的一个**初等分解**(式(1)中的 $\chi_{E_i\subset E}(x)$ 通常简记为 $\chi_{E_i}(x)$),特别当 $c_1<c_2<\cdots<c_n$ 且诸 E_i 均非空集时称式(4·3·1)为 $f(x)$ 的**标准初等分解**.

显然，一个简单函数的初等分解不是唯一的，但标准初等分解不仅存在而且是唯一的.

命题 1　若 $f(x),g(x)$ 是 E 上的简单函数，则

$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（分母 $g(x)$ 在 E 上处处非 0）

也是 E 上的简单函数.

证明 设 $f(x),g(x)$ 有如下的初等分解：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot\chi_{E_i}(x),\qquad g(x)=\sum_{j=1}^{m}d_j\cdot\chi_{F_j}(x),$$

则

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_i\pm d_j)\cdot\chi_{E_i\cap F_j}(x),$$

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_i\quad d_j\cdot\chi_{E_i\cap F_j}(x),$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{c_i}{d_j}\cdot\chi_{E_i\cap F_j}(x),$$

$$E_i\cap F_j,\ i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m$$

是两两无交的可测集，并且

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}(E_i\cap F_j)=E.$$

由简单函数的定义知命题 1 成立. ▌

4·3·2　可测函数与简单函数的关系

在函数论中，对于较复杂的函数，我们往往借助较简单的函数去刻划它，去反映它的性质. 例如用多项式去逼近连续函数，用幂级数去表示解析函数等等. 对于可测函数，我们也这样做. 下面来讨论它与简单函数的关系.

定理 1　若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数，则 $f(x)$ 可表为递增的一列非负简单函数 $\{\varphi_n(x)\}_1^{\infty}$ 的极限函数，即必存在一列 E 上的简单函数 $\{\varphi_n(x)\}_1^{\infty}$ 使在 E 上

$$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = f(x).$$

证明 对每个自然数 n,作 E 上的函数 $\varphi_n(x)$ 如下(图 4·3·1):

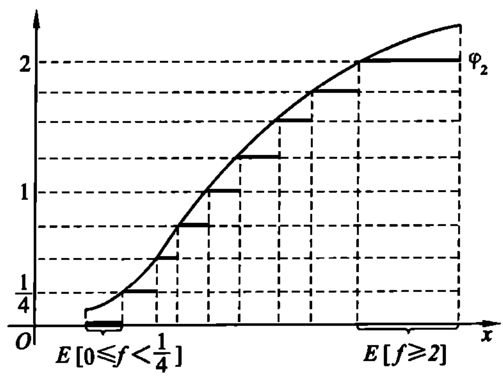

图 4·3·1

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{2^n}, & \text{当 } x \in E\left[\dfrac{k-1}{2^n} \leqslant f < \dfrac{k}{2^n}\right] \text{时}, \\ & (k = 1,2,\cdots,n2^n) \\ n, & \text{当 } x \in E[f \geqslant n] \text{ 时}, \end{cases}$$

因 $f(x)$ 可测,故

$$E\left[\frac{k-1}{2^n} \leqslant f < \frac{k}{2^n}\right] = E\left[f \geqslant \frac{k-1}{2^n}\right] \cap E\left[f < \frac{k}{2^n}\right]$$
$$(k = 1,2,\cdots,n2^n)$$

及 $E[f \geqslant n]$ 都是可测集. 所以 $\varphi_n(x)$ 是 E 上的简单函数.

由 $\varphi_n(x)$ 的定义不难看出

$$0 \leqslant \varphi_1(x) \leqslant \varphi_2(x) \leqslant \cdots$$

以下来证对每个点 $x_0 \in E$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x_0) = f(x_0)$.

若 $f(x_0)<\infty$，则有自然数 N 使 $f(x_0)<N$.

对任意 $n\in\{N,N+1,\cdots\}$ 有 $f(x_0)<n$，故存在

$$k\in\{1,\cdots,n2^n\}$$

使

$$\frac{k-1}{2^n}\leqslant f(x_0)<\frac{k}{2^n},$$

从而

$$\varphi_n(x_0)=\frac{k-1}{2^n},\quad |f(x_0)-\varphi_n(x_0)|<\frac{1}{2^n}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0).$$

若 $f(x_0)=\infty$，则对任意自然数 n 有 $f(x_0)\geqslant n$，从而 $\varphi_n(x_0)=n$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=\infty=f(x_0).$$

总之在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$. ▌

系 1　若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，则 $f(x)$ 可表为一列简单函数 $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ 的极限函数.

证明 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$，由 $f(x)$ 可测知 $f^+(x)$，$f^-(x)$ 都是 E 上的非负可测函数. 由定理 1 知存在 E 上的简单函数列 $\{\varphi_n^{(1)}(x)\}_1^\infty$，$\{\varphi_n^{(2)}(x)\}_1^\infty$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(1)}(x)=f^+(x),\quad \lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(2)}(x)=f^-(x).$$

令

$$\varphi_n(x)=\varphi_n^{(1)}(x)-\varphi_n^{(2)}(x),$$

则 $\varphi_n(x)$ 是 E 上的简单函数，并且

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(1)}(x)-\lim_{n\to\infty}\varphi_n^{(2)}(x)=f(x). \ ▌$$

对于可测函数的讨论，我们往往先考虑非负函数的情况，然后再过渡到一般函数. §4・3 中 4・3・2 就是这样做的.

4·3·3 非负函数的可测性与下方图的可测性之关系

引理1 若$E\subset R^N$,$f(x)$是E上的非负简单函数,则$f(x)$的下方图$G(E,f)$是R^{N+1}中的可测集.

证明 设$f(x)$的一个初等分解为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot\chi_{E_i}(x),$$

则

$$G(E,f)=\bigcup_{i=1}^{n}G(E_i,c_i\chi_{E_i})=\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\times[0,c_i)).$$

由E_i是R^N中可测集知$E_i\times[0,c_i)$是R^{N+1}中可测集,于是$G(E,f)$是R^{N+1}中可测集. ▍

定理2 若$E\subset R^N$,$f(x)$是E上的非负可测函数,则$f(x)$的下方图$G(E,f)$是R^{N+1}中的可测集.

证明 由定理1知存在E上的非负简单函数列$\{\varphi_n(x)\}$使$\varphi_n(x)\uparrow f(x)$. 从而

$$G(E,\varphi_n)\uparrow G(E,f).$$

由引理1知$G(E,\varphi_n)$是R^{N+1}中的可测集,故$G(E,f)$是R^{N+1}中的可测集. ▍

系2 可测函数的正、负部的下方图都是可测集.

我们指出,对可测集上的非负函数$f(x)$来说,其下方图可测不仅是$f(x)$可测的必要条件,而且也是充分条件(证明见 §5·4 中 5·4·2). 因此,可测集上的函数为可测函数的充要条件是其正、负部的下方图均为可测集.

§4·4 可测函数的某些性质

定理1 设$\{f_n(x)\}$是E上的可测函数列,则

(i) $\sup\limits_n f_n(x)$及$\inf\limits_n f_n(x)$都是E上的可测函数;

(ii) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ 及 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$ 都是 E 上的可测函数；

(iii) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 在 E 上处处成立时，$f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明　(i) 对任意 $a\in R^1$，

$$E[\sup_n f_n > a]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n > a],$$

$$E[\inf_n f_n < a]=\bigcup_{n=1}^{\infty} E[f_n < a]$$

均为可测集，故 (i) 成立.

(ii)
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=\inf_k \sup_{n\geqslant k} f_n(x),$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)=\sup_k \inf_{n\geqslant k} f_n(x).$$

由 (i) 便知 (ii) 成立.

(iii) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x)$，由 (ii) 知 $f(x)$ 可测. ▌

由定理 1 及 §4·3 系 1 立即可知，函数可测的充要条件是它可以表为一列简单函数的极限函数. 由此可见，我们可以利用简单函数完全刻划出可测函数.

定理 2　设 $f(x)$，$g(x)$ 是 E 上的可测函数，则

(i) $f(x)\cdot g(x)$ 是 E 上的可测函数；

(ii) 当 $f(x)\pm g(x)$ 在 E 上处处有意义时，$f(x)\pm g(x)$ 是 E 上的可测函数；

(iii) 当 $f(x)/g(x)$ 在 E 上处处有意义时，$f(x)/g(x)$ 是 E 上的可测函数；

(iv) $|f(x)|$ 是 E 上的可测函数.

证明　由 §4·3 系 1 知存在 E 上的简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，$\{\psi_n(x)\}$ 使

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x),\quad \lim_{n\to\infty}\psi_n(x)=g(x).\quad (4\cdot4\cdot1)$$

(i) 由式(4・4・1)知

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x)\cdot\psi_n(x)] = f(x)\cdot g(x).$$

$\varphi_n(x)\cdot\psi_n(x)$ 是简单函数,由定理 1 知 $f(x)\cdot g(x)$ 可测.

(ii) 设 $f(x)\pm g(x)$ 在 E 上处处有意义,由式(4・4・1)知

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x)\pm\psi_n(x)] = f(x)\pm g(x).$$

$\varphi_n(x)\pm\psi_n(x)$ 是简单函数,由定理 1 知 $f(x)\pm g(x)$ 可测.

(iii) 设 $f(x)/g(x)$ 在 E 上处处有意义,令

$$\hat{\psi}_n(x) = \psi_n(x) + \frac{1}{n}\left[\operatorname{sgn}\psi_n(x) + \frac{1}{2}\right],$$

则 $\hat{\psi}_n(x)$ 是 E 上处处非 0 的简单函数,由(4・4・1)知

$$\lim_{n\to\infty}\hat{\psi}_n(x) = g(x),$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x)/\hat{\psi}_n(x)] = f(x)/g(x).$$

$\varphi_n(x)/\hat{\psi}_n(x)$ 是简单函数,由定理 1 知 $f(x)/g(x)$ 可测.

(iv) 由 $f(x)$ 可测知 $f^+(x)$, $f^-(x)$ 均可测,而

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x),$$

由(ii)知 $|f(x)|$ 可测. ▌

定理 3 (i) 若 $f(x)$ 在 E 上可测,则 $f(x)$ 在 E 的任何可测子集 E_0 上也可测(当 $E_0\neq\varnothing$ 时).

(ii) 设 E 可表为有限个或可列个可测集 E_i 的并 $\bigcup\limits_i E_i$. 若 E 上的函数 $f(x)$ 在每个 E_i 上都可测,则 $f(x)$ 在 E 上可测.

证明 (i) 由 $E_0[f>a] = E[f>a]\cap E_0$ ($a\in R^1$) 便得证. ▌

(ii) 由 $E[f>a] = \bigcup\limits_i E_i[f>a]$ ($a\in R^1$) 便得证. ▌

定理 4 (i) 零集 E 上的任何函数 $f(x)$ 都是可测函数.

(ii) 设 $f(x)$, $g(x)$ 是 E 上的函数, $f(x)$ 在 E 上可测,若存在零集 $N\subset E$,使在 $E\setminus N$ 上 $g(x) = f(x)$,则 $g(x)$ 在 E 上可测.

证明　(i) 对任意 $a\in R^1$，有 $E[f>a]\subset E$，故 $E[f>a]$ 是零集，所以 $f(x)$ 在 E 上可测.

(ii) 由定理 3(i) 知 $f(x)$ 在 $E\setminus N$ 上可测，从而 $g(x)$ 在 $E\setminus N$ 上可测. 又由(i) 知 $g(x)$ 在 N 上可测(当 $N\neq\varnothing$ 时). 由定理 3(ii) 知 $g(x)$ 在 E 上可测. ▌

注 1　今后凡说到某函数限制在其定义域的某子集上有某性质，均指当此子集非空时有此性质，而不再象上面那样特别作出声明.

定理 4 告诉我们：在一个零集上任意改变函数的值，不影响函数的可测性. 今后当有需要时，我们将随时这样做.

注 2　当讨论可测函数方面的问题时，若 N 是 E 的零测度子集，$f(x)$ 是 $E\setminus N$ 上的可测函数，即使 $f(x)$ 在 N 上无定义，我们往往仍说 $f(x)$ 是 E 上的可测函数. 对于讨论函数的可测性及进行相关的测度计算来说，我们这种做法不会造成混乱，却可以带来某些方便.

定义 1　设 E 是一个点集，$P(x)$ 是与 E 中的点 x 有关的一个命题. 若 E 中使 $P(x)$ 不成立的点 x 的全体是一个零集，就称命题 $P(x)$ 在 E 上**几乎处处成立**，记作：$P(x)$，a. e. 于 E(当 E 不说自明时可简记作 $P(x)$ a. e.).

例 4·4·1　设 $f(x)$，$g(x)$ 都是 E 上的函数. 若 $E[f\neq g]$ 是零集，就称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 E 上**几乎处处相等**，

记作：　$f(x)=g(x)$，a. e. 于 E，

或记作：在 E 上　　$f(x)\doteq g(x)$

有时简记作　　$f(x\doteq g(x)$　　或 $f\doteq g$.

例 4·4·2　设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是 E 上的函数. 若 $E[f_n \not\to f]$ 是零集，就称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上**几乎处处趋于函数** $f(x)$，

记作：

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\text{,a. e. 于 } E\text{,}$$

或记作：

$$\text{在 } E \text{ 上 } f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$$

有时简记作

$$f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x) \quad \text{或 } f_n \xrightarrow{\cdot} f).$$

当 $m(E[f_n \not\to f] \cup E[|f| = \infty]) = 0$ 时又称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上**几乎处处收敛于函数** $f(x)$.

例 4·4·3 设 $f(x)$ 是 E 上的函数. 若 $E[|f| = \infty]$ 是零集，就称 $f(x)$ 在 E 上**几乎处处有限**，记作：$|f(x)| < \infty$，a. e. 于 E，或记作：在 E 上 $|f(x)| \dot{<} \infty$(有时简记作 $|f(x)| \dot{<} \infty$ 或 $|f| \dot{<} \infty$).

由定理 4 及其后面的注 2 可知，若把定理 1 及定理 2 中的"处处"字样改为"几乎处处"，仍然成立.

§4·5 Egoroff 定理

本节我们来讨论可测函数列的几乎处处收敛与一致收敛的关系. 首先给出一个关于几乎处处收敛的引理.

引理 1 设 $mE < \infty$，$f_n(x)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是 E 上的可测函数，并且 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限，则 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$ 的充要条件是：

$$\lim_{N\to\infty} m \bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}] = 0, \quad k = 1,2,\cdots \tag{4·5·1}$$

证明 第一步先看 $f(x)$ 在 E 上处处有限的情况. 这时由 §4·1 中 4·1·2 中的(ix) 知

$$E[f_n \nrightarrow f] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right]. \tag{4·5·2}$$

由于 $|f_n(x) - f(x)|$ 是 E 上的可测函数，所以(4·5·2)式中所涉及的集都是可测集，并且由 $mE < \infty$ 知它们的测度都是有限的.

$f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$ 即 $mE[f_n \nrightarrow f] = 0$. 由(4·5·2)知 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$ 等价于

$$m \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}] = 0, \quad k = 1, 2, \cdots$$

由测度的上连续性知

$$m \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}] = \lim_{N\to\infty} m \bigcup_{n=N}^{\infty} E[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}].$$

所以 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$ 等价于(1).

第二步再看 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限的情况. 这时 $E_0 = E[|f| = \infty]$ 是零集. 令 $E_1 = E \setminus E_0$, $mE_1 = mE < \infty$. 限制在 E_1 上看，诸 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 均可测且 $f(x)$ 处处有限. 由第一步知，在 E_1 上 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$ 等价于

$$\lim_{N\to\infty} m \bigcup_{n=N}^{\infty} E_1\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k}\right] = 0, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{4·5·3}$$

显然(4·5·3)等价于(4·5·1)，而"在 E_1 上 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$"等价于"在 E 上 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$". 所以引理 1 成立. ▌

注　若把引理 1 中的条件"$mE < \infty$"去掉，(4·5·1) 仍是 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$ 的充分条件，但不再是必要条件.

所谓在 E 上函数列 $\{f_n(x)\}$ **一致收敛于函数** $f(x)$，是指：对任意 $\varepsilon > 0$，总存在自然数 N，使当 $n \geqslant N$ 时 E 的每个点 x 都满

足 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

我们来看一个例子.

设 $f_n(x)=x^n$, $f(x)\equiv 0$. $f_n(x)$ 在$[0,1]$上几乎处处收敛 $f(x)$, 但在$[0,1]$上不一致收敛于 $f(x)$. 不过,对任何给定的小正数 δ,我们总可以从$[0,1]$中去掉一个测度小于 δ 的点集(例如区间 $(1-\frac{\delta}{2},1]$),使在余下的点集上 $f_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. 对于一般情况,我们有下面的定理:

定理 1 (Egoroff 定理) 设 $mE<\infty$,

(i) $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 E 上的可测函数,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, a. e. 于 E,

(iii) $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限,

则对于任意 $\delta>0$,恒存在 E 的可测子集 e,使 $me<\delta$ 且在 $E\backslash e$ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

证明 第一步构造集 e:

由条件(i),(ii) 知 $f(x)$ 在 E 上可测. 注意到条件(iii),不失一般性,不妨设 $f(x)$ 在 E 上处处有限. 由引理 1 知

$$\lim_{N\to\infty}m\bigcup_{n=N}^{\infty}E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]=0,\quad k=1,2,\cdots$$

因此,对每个正整数 k,存在自然数 N_k,使

$$m\bigcup_{n=N_k}^{\infty}E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]<\frac{\delta}{2^k}.$$

记

$$e_k=\bigcup_{n=N_k}^{\infty}E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right],$$

令 $e=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}e_k$.

第二步验证 e 符合要求:

显然 e 是 E 的可测子集,并且

$$me \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} me_k < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta}{2^k} = \delta.$$

任给 $\varepsilon > 0$，存在正整数 k_0，使 $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$. 设 $x_0 \in E \setminus e$，则

$$x_0 \in E \setminus e_{k_0} = E \setminus \bigcup_{n=N_{k_0}}^{\infty} E\left[|f_n - f| \geqslant \frac{1}{k_0}\right]$$

$$= \bigcap_{n=N_{k_0}}^{\infty} E\left[|f_n - f| < \frac{1}{k_0}\right],$$

故当 $n \geqslant N_{k_0}$ 时

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{1}{k_0} < \varepsilon.$$

上式中 x_0 是 $E \setminus e$ 中任意的点而 N_{k_0} 与 x_0 无关，所以在 $E \setminus e$ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$. ▌

注 1　定理 1 中的条件"$mE < \infty$"不能去掉.

例如，$f_n(x) = \frac{x}{n}$ 在 R^1 上处处收敛于 0，但从 R^1 中挖去任何测度有限的可测子集 e，都不能使在 $R^1 \setminus e$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 0.

注 2　定理 1 的结论不能改成"则存在 E 的零测度子集 e，使在 $E \setminus e$ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$".

例如，$f_n(x) = x^n$ 在 $[0,1]$ 上几乎处处收敛于 0，但从 $[0,1]$ 中挖去任何零测度子集 e，都不能使在 $E \setminus e$ 上 $f_n(x)$ 一致收敛于 0.

从数学分析中我们已经知道，一致收敛这个条件是一个很优越的条件，它可以保证逐项取极限、逐项积分、逐项微分等许多运算的进行. 根据 Egoroff 定理，当可测函数列几乎处处收敛但不一致收敛时，我们可以"部分地"把它化为一致收敛，从而便可利用一致收敛来讨论问题. Egoroff 定理的实用意义正在于此.

§4·6　可测函数列的依测度收敛

本节我们引进可测函数列的一个新的收敛概念，它在逐项积

分等问题的讨论中有着重要的作用.

定义1 设$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$及$f(x)$都是E上几乎处处有限的可测函数.若对任意$\varepsilon>0$,恒有

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]=0,$$

就称在E上$\{f_n(x)\}$**依测度收敛**于$f(x)$,记作:

$$在\ E\ 上\ f_n(x)\Rightarrow f(x)$$

有时简记作

$$f_n(x)\Rightarrow f(x)\qquad 或\qquad f_n\Rightarrow f.$$

例4·6·1 设$E=[0,1]$,

$$f_n(x)=x^n(1-x)^n(n=1,2,\cdots),\ f(x)\equiv 0,$$

则在E上$f_n(x)\Rightarrow f(x)$.

下面我们来讨论依测度收敛与几乎处处收敛之间的关系.

定理1 (**Lebesgue定理**) 设$mE<\infty$, $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$及$f(x)$都是E上几乎处处有限的可测函数,若

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\text{a. e. 于 }E,$$

则在E上$f_n(x)\Rightarrow f(x)$.

证明 由§4·5引理1知,对任意正整数k,恒有

$$\lim_{N\to\infty}m\bigcup_{n=N}^{\infty}E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right]=0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}]=0.$$

对任意$\varepsilon>0$,可取正整数k使$\frac{1}{k}<\varepsilon$,这时

$$E[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]\subset E\left[|f_n-f|\geqslant\frac{1}{k}\right],$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}mE[|f_n-f|\geqslant\varepsilon]=0.$$

即在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$. ▌

注　定理 1 中的条件“$mE < \infty$”不能去掉，

例如在 R^1 上 $f_n(x) = \frac{1}{n}x$ 处处收敛于 0，但 $f_n(x) \Rightarrow 0$ 不成立.

下面的例子说明依测度收敛的函数列未必几乎处处收敛.

例 4·6·2　对每个自然数 n，把 $(0,1]$ 划分成 n 个半开区间

$$I_i^n = (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}], i = 1,2,\cdots,n.$$

以 $(0,1]$ 为基本集，作 I_i^n 的特征函数 $\chi_{I_i^n}(x)$ $(i = 1,2,\cdots,n)$. 取 $n = 1,2,\cdots$ 把所有得到的函数排列如下：

$$\underbrace{\chi_{I_1^1}}, \underbrace{\chi_{I_1^2}, \chi_{I_2^2}}, \cdots, \underbrace{\chi_{I_1^n}, \chi_{I_2^n}, \cdots, \chi_{I_n^n}}, \cdots \qquad (4·6·1)$$

在 $(0,1]$ 上函数列 (4·6·1) 依测度收敛于 $f(x) \equiv 0$.

这是因为对任意 $\varepsilon > 0$，$E[|\chi_{I_i^n}(x) - 0| \geqslant \varepsilon]$ 或为空集或为 I^{n_i}，而 $mI_i^n = \frac{1}{n} \to 0$.

函数列 (4·6·1) 在 $(0,1]$ 上处处不收敛.

这是因为对任 $x_0 \in (0,1]$ 相应于每个 n 必有 i_n 使 $x_0 \in I_{i_n}^n$，而 $i \neq i_n$ 时 $x_0 \in\!\!\!\!/\ I_i^n$. 从而 $i = i_n$ 时 $\chi_{I_i^n}(x_0) = 1$，$i \neq i_n$ 时 $\chi_{I_i^n}(x_0) = 0$. 函数列 (4·6·1) 中有无穷多个项在 x_0 点的值为 1 且有无穷多个项在 x_0 点的值为 0，所以函数列 (4·6·1) 在 x_0 点不收敛.

虽然依测度收敛未必几乎处处收敛，但是我们有如下的定理：

定理 2　**(Riesz 定理)** 若在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，则 $\{f_n(x)\}_1^\infty$ 必存在子列 $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty$，使

$$\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) = f(x), \text{a. e. 于 } E.$$

证明　第一步选出子列 $\{f_{n_i}\}$：

由在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$ 知：$mE < \infty$，诸 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 都是

E 上几乎处处有限的可测函数,对任意 $\varepsilon > 0$ 恒有

$$\lim_{n\to\infty} mE[|f_n - f| \geqslant \varepsilon] = 0.$$

所以对任意正数 ε、δ,总存在自然数 N,使 $n \geqslant N$ 时

$$mE[|f_n - f| \geqslant \varepsilon] < \delta.$$

于是,对于 $\varepsilon = \frac{1}{i}$ 及 $\delta = \frac{1}{2^i}(i = 1,2,\cdots)$,可选出自然数 n_i,使

$$mE\left[|f_{n_i} - f| \geqslant \frac{1}{i}\right] < \frac{1}{2^i},$$

并且还可使 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. 在 $\{f_n(x)\}_1^\infty$ 中取与 $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ 相应的子列 $\{f_{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty$.

第二步验证　$f_{n_i} \xrightarrow{\cdot} f$:

根据 §4·5 引理 1 及其后面的注,只需证对每个正整数 k 有

$$\lim_{N\to\infty} m \bigcup_{i=N}^{\infty} E\left[|f_{n_i} - f| \geqslant \frac{1}{k}\right] = 0. \qquad (4\cdot6\cdot2)$$

当 $i \geqslant k$ 时

$$E\left[|f_{n_i} - f| \geqslant \frac{1}{k}\right] \subset E\left[|f_{n_i} - f| \geqslant \frac{1}{i}\right],$$

从而当 $N \geqslant k$ 时

$$m \bigcup_{i=N}^{\infty} E\left[|f_{n_i} - f| \geqslant \frac{1}{k}\right] \leqslant \sum_{i=N}^{\infty} mE\left[|f_{n_i} - f| \geqslant \frac{1}{k}\right]$$

$$\leqslant \sum_{i=N}^{\infty} mE\left[|f_{n_i} - f| \geqslant \frac{1}{i}\right] < \sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{N-1}}.$$

可见对每个正整数 k 上面的(4·6·2)式成立. ▌

从定理 1 及定理 2 很容易得到一个在函数的定义域测度有限的情况下用几乎处处收敛来完全刻划依测度收敛的定理:

定理 3　设 $mE < \infty$,$f_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是 E 上几乎处处有限的可测函数,则 $f_n \Rightarrow f$ 的充要条件是:对 $\{f_n\}$ 的任何子列 $\{f_{n_k}\}$,都可以从中选出子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 几乎处处收敛于 f.

证明　必要性：设 $f_n \Rightarrow f$，显然 $\{f_n\}$ 的任何子列 $\{f_{n_k}\}$ 也依测度收敛于 f，由定理 2 知 $\{f_{n_k}\}$ 必有子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 几乎处处收敛于 f.

充分性：假若 $f_n \Rightarrow f$ 不成立，则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 使

$$\{mE[|f_n - f| \geqslant \varepsilon_0]\}_{n=1}^{\infty}$$

不趋于 0，因而存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 及 $\delta_0 > 0$ 使

$$mE[|f_{nk} - f| \geqslant \varepsilon_0] \geqslant \delta_0 > 0, \quad k = 1,2,\cdots$$

显然 $\{f_{nk}\}$ 的任何子列 $\{f_{nk_i}\}$ 都不可能依测度收敛于 f，根据定理 1 知 $\{f_{nk}\}$ 的每个子列 $\{f_{nk_i}\}$ 更不可能几乎处处收敛于 f. 充分性得证. ▌

依测度收敛还有如下的一些性质：

命题 1　设下述各函数的定义域均为 E.

(i) 若 $f_n \Rightarrow f$，$f \doteq g$，则 $f_n \Rightarrow g$.

(ii) 若 $f_n \Rightarrow f$，$f_n \Rightarrow g$，则 $f \doteq g$.

(iii) 若 $f_n \Rightarrow f$，则 $|f_n| \Rightarrow |f|$.

(iv) 设 $mE < \infty$，若 $f_n \Rightarrow f$，$g_n \Rightarrow g$，则

$$f_n \pm g_n \Rightarrow f \pm g,$$

$$f_n \cdot g_n \Rightarrow f \cdot g,$$

$$f_n / g_n \Rightarrow f/g \text{（诸分母在 } E \text{ 上几乎处处非 0 时）}.$$

证明　(i)(iii) 的证明留给读者作习题.

(ii) 由 $f_n \Rightarrow f$ 知存在子列 $\{f_{n_k}\}$ 使 $f_{nk} \xrightarrow{\cdot} f$. 由 $f_n \Rightarrow g$ 知 $f_{n_k} \Rightarrow g$，从而存在子列 $\{f_{n_{k_i}}\}$ 使 $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{\cdot} g$. 但 $f_{n_{k_i}} \xrightarrow{\cdot} f$（这由前述的 $f_{n_k} \xrightarrow{\cdot} f$ 可知），故 $g \doteq f$.

(iv) 仅证 $f_n \cdot g_n \Rightarrow f \cdot g$，其他类似可证.

任取$\{f_n \cdot g_n\}$的子列$\{f_{n_i} \cdot g_{n_i}\}$,不妨把$\{f_{n_i} \cdot g_{n_i}\}$记作$\{f_m \cdot g_m\}$. 由$f_m \Rightarrow f$知存在子列$\{f_{m_k}\}$使$f_{m_k} \xrightarrow{\cdot} f$. 由$g_m \Rightarrow g$知$g_{m_k} \Rightarrow g$,从而存在子列$\{g_{m_{k_i}}\}$使$g_{m_{k_i}} \xrightarrow{\cdot} g$. 但$f_{m_{k_i}} \xrightarrow{\cdot} f$(这由前述的$f_{m_k} \xrightarrow{\cdot} f$可知),故$f_{m_{k_i}} \cdot g_{m_{k_i}} \xrightarrow{\cdot} f \cdot g$. 由定理3即知$f_n \cdot g_n \Rightarrow f \cdot g$. ▌

§4·7 可测函数与连续函数

4·7·1 任意点集上的连续函数

数学分析中所说的连续函数都是区域上的连续函数,现在我们来推广这个概念.

定义1 设$f(x)$是点集E上的函数,x_0是E中的点. 若对任意$\varepsilon > 0$,总存在x_0的邻域$U(x_0,\delta)$,使当$x \in E \cap U(x_0,\delta)$时

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

就称$f(x)$**在点x_0连续**. 若$f(x)$在E的每个点连续,就称$f(x)$是**E上的连续函数**.

注 当E是$f(x)$的定义域D_f的子集时,我们若说$f(x)$是E上的连续函数,那是指$f(x)$限制在E上所成的函数$f(x)|_E$是E上的连续函数,而不是指$f(x)$作为D_f上的函数在属于E的每个点上连续.

例4·7·1 设$f(x)$是E上的函数. 若x_0是E的孤立点,且$f(x_0)$是有限数,则$f(x)$在点x_0连续. 若x_0是E中一点,$f(x_0)$是无限数,则$f(x)$在点x_0不连续.

例4·7·2 设E是任意点集,$f(x)$是E上取常实数值c,则$f(x)$是E上的连续函数.

例4·7·3 设$I = [0,1]$,I_r为$[0,1]$中有理数的全体.

Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in I_r \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\in I\setminus I_r \text{ 时},\end{cases}$$

在 I 的每一点都不连续，但函数 $D(x)|_{I_r}$ 是 I_r 上的连续函数，也就是说 $D(x)$ 是 I_r 上的连续函数.

命题 1　设 $f(x)$ 是 E 上的函数，$f(x)$ 在点 $x_0\in E$ 连续的充要条件是：$f(x_0)$ 为有限数且对于 E 中任何收敛于 x_0 的点列 $\{x_n\}$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

这个命题的证法与数学分析中相应命题一样.

命题 2　若 $f(x)$ 是 E 上的连续函数，则 $f(x)$ 是 E 的任意子集 E_0 上的连续函数.

证明　由定义 1 立即可知. ▌

命题 3　若 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是 E 上的连续函数，$\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 是 E 上的连续函数.

这个命题的证法与数学分析中相应命题一样.

定理 1　若 $f(x)$ 是可测集 E 上的连续函数，则 $f(x)$ 是 E 上处处有限的可测函数.

证明　$f(x)$ 是 E 上的连续函数，自然在 E 上处处有限. 下证对任意 $a\in R^1$，$E[f>a]$ 是可测集：设 $\alpha\in E[f>a]$，则 $f(\alpha)>a$. 由 $f(x)$ 在点 α 连续知，存在与 α 相关的正数 δ_α，使当

$$x\in E\cap U(\alpha,\delta_\alpha)\text{ 时}\quad f(x)>a,$$

从而

$$E\cap U(\alpha,\delta_\alpha)\subset E[f>a].$$

于是

$$\bigcup_{\alpha\in E[f>a]}(E\cap U(\alpha,\delta_\alpha))\subset E[f>a].$$

显然上式右边的点集也包含于左边的点集，所以

$$E[f>a]=\bigcup_{a\in E[f>a]}(E\cap U(a,\delta_a))$$
$$=E\cap(\bigcup_{a\in E[f>a]}U(a,\delta_a)).$$

E 可测而 $\bigcup_{a\in E[f>a]}U(a,\delta_a)$ 是开集,故 $E[f>a]$ 可测. 所以 $f(x)$ 是 E 上处处有限的可测函数. ▌

4·7·2 Lusin 定理

我们已经知道,可测函数可以用简单函数来完全刻划. §4·7·2 及 §4·7·3 来研究可测函数与连续函数的关系.

引理1 设 F 是有限个两两无交的非空闭集 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 之并,$f(x)$ 是 F 上的函数,若 $f(x)$ 限制在每个闭集 F_i 上都是连续函数,则 $f(x)$ 是 F 上的连续函数.

证明 设 $x_0\in F$,则有唯一的 $i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使 $x_0\in F_{i_0}$. 当 $i\neq i_0$ 时 $\rho(x_0,F_i)>0$,所以存在 $d>0$,使

$$\text{当 } i\neq i_0 \text{ 时}\quad \rho(x_0,F_i)\geqslant d,$$

从而

$$F\cap U(x_0,d)=F_{i_0}\cap U(x_0,d).$$

由 $f(x)$ 是 F_{i_0} 上的连续函数知,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使

$$\text{当 } x\in F_{i_0}\cap U(x_0,\delta) \text{ 时}\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

我们特别取这样的 δ 小于 d,则

$$\text{当 } x\in F\cap U(x_0,\delta) \text{ 时}\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)$ 作为 F 上的函数在 x_0 点连续. 由于 x_0 是 F 中的任意点,所以 $f(x)$ 是 F 上的连续函数. ▌

定理2 (Lusin 定理) 设 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数,则对任意 $\delta>0$,恒存在闭集 $F^\delta\subset E$,使:

(i) $m(E\setminus F^\delta)<\delta$,

(ii) $f(x)$ 是 F^δ 上的连续函数.

证明 第一步先看 $f(x)$ 是简单函数的情况:

设 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是两两无交的非空可测集,$\bigcup_{i=1}^{n}E_i=E$,当 x

$\in E_i$ 时

$$f(x) = c_i \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

对于每个 E_i，由 §3·4 定理 4 知，存在非空闭集 $F_i \subset E_i$，使

$$m(E_i \setminus F_i) < \frac{\delta}{n}.$$

令 $F^\delta = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$，由于 $f(x)$ 限制在每个闭集 F_i 上是连续函数，根据引理 1 知 $f(x)$ 是 F^δ 上的连续函数.

F^δ 是闭集，$F^\delta \subset E$，$E \setminus F^\delta = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \setminus F_i)$，故

$$m(E \setminus F^\delta) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(E \setminus F_i) < \delta.$$

第二步. 设 $mE < \infty$，$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数.

由 §4·3 系 1 知，存在 E 上的简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，使在 E 上

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x).$$

由 Egoroff 定理知，存在 $E^\delta \subset E$，使

$$m(E \setminus E^\delta) < \frac{\delta}{2},$$

且在 E^δ 上 $\{\varphi_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

诸 $\varphi_n(x)$ 限制在 E^δ 上仍是简单函数. 对每个 $\varphi_n(x)$，由第一步知存在闭集 $F_n \subset E^\delta$，使

$$m(E^\delta \setminus F_n) < \frac{\delta}{2^{n+1}},$$

且 $\varphi_n(x)$ 是 F_n 上的连续函数. 令 $F^\delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$，诸 $\varphi_n(x)$ 限制在 F^δ 上均为连续函数. $F^\delta \subset E^\delta$，故在 F^δ 上 $\{\varphi_n(x)\}$ 也一致收敛于 $f(x)$，由命题 3 知 $f(x)$ 是 F^δ 上的连续函数.

由 F_n 是闭集知 F^δ 是闭集，$F^\delta \subset E$，

$$\begin{aligned} E \setminus F^\delta &= (E \setminus E^\delta) \cup (E^\delta \setminus F^\delta) \\ &= (E \setminus E^\delta) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E^\delta \setminus F_n) \right), \end{aligned}$$

故

$$m(E\setminus F^{\delta})\leqslant m(E\setminus E^{\delta})+\sum_{n=1}^{\infty}m(E^{\delta}\setminus F_{n})$$

$$<\frac{\delta}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^{n+1}}=\delta.$$

第三步. 设 $mE=\infty$, $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数.

设 $\{L_i\}$ 是 R^N 的起点为 θ 边长为 1 的半开区间分解，令

$$E_i=E\cap L_i(i=1,2,\cdots),$$

则诸 E_i 是两两无交的有界可测集，$E=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$. 对每个 E_i，由第二步知存在闭集 $F_i\subset E_i$，使

$$m(E_i\setminus F_i)<\frac{\delta}{2^i},$$

且 $f(x)$ 是 F_i 上的连续函数. 令 $F^{\delta}=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i$.

设 $x_0\in F^{\delta}$，易知 x_0 的邻域 $U(x_0,1)$ 只能与 $\{F_i\}_1^{\infty}$ 中的有限个闭集相交. 类似于引理 1 不难证明，$f(x)$ 作为 F^{δ} 上的函数在 x_0 点连续. 所以 $f(x)$ 是 F^{δ} 上的连续函数.

设 $x_0\in(F^{\delta})'$，由于 $U(x_0,1)$ 仅与 $\{F_i\}_1^{\infty}$ 中的有限个闭集相交，不难得知 $x_0\in F^{\delta}$. 所以 F^{δ} 是闭集. 由于

$$F^{\delta}\subset E,\quad E\setminus F^{\delta}=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\setminus F_i),$$

故

$$m(E\setminus F^{\delta})\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i\setminus F_i)<\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^i}=\delta. \blacksquare$$

上述证明的方法值得特别注意. 对可测函数进行讨论，先考虑简单函数再过渡到一般函数，先考虑函数的定义域测度有限的情况再过渡到测度无限的情况，这是在许多场合下都行之有效的办法.

注　定理 2 的结论不能改成“则存在 E 的零测度子集 e，使

$f(x)$ 是 $E\setminus e$ 上的连续函数". 例如，若 $f(x)$ 是 $\frac{1}{2}$－Cantor 集 $K_{\frac{1}{2}}$ 相对于[0,1]的特征函数，不难证明对于[0,1]的任何零测度子集 e，$f(x)$ 在 $[0,1]\setminus e$ 上都不是连续函数.

命题 4 （Lusin 定理的逆定理）设 $f(x)$ 是点集 E 上的函数. 若对任意 $\delta>0$，恒存在闭集 $F^\delta\subset E$，使

(i) $m^*(E\setminus F^\delta)<\delta$，

(ii) $f(x)$ 是 F^δ 上的连续函数，

则 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数.

证明　取 $\delta=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$. 由假设知存在闭集 $F_n\subset E$，使 $m^*(E\setminus F_n)<\frac{1}{n}$ 且 $f(x)$ 是 F_n 上的连续函数.

由定理 1 知 $f(x)$ 是 F_n 上处处有限的可测函数，从而 $f(x)$ 是 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 上处处有限的可测函数.

因 $m^*(E\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n)\leqslant m^*(E\setminus F_n)<\frac{1}{n}$，故 $E\setminus\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 是零集. $f(x)$ 是此零集上的可测函数. 所以 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. ∎

Lusin 定理及其逆定理给出了函数是几乎处处有限的可测函数的一个充要条件. 这样，我们就用连续函数完全刻划了（几乎处处有限的）可测函数，显示了可测函数的构造.

* **例 4·7·4**　试以命题 4 的条件作为几乎处处有限的可测函数的定义，来证明 E 上两个几乎处处有限的可测函数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 之和仍是 E 上几乎处处有限的可测函数.

证明　任给 $\delta>0$，对每个 $f_i(x)(i=1,2)$，由新定义知存在闭集 $F_i\subset E$，使 $m^*(E\setminus F_i)<\frac{\delta}{2}$ 且 $f_i(x)$ 限制在 F_i 上连续. 于是 $f_1(x)+f_2(x)$ 限制在闭集 $F_1\cap F_2$ 上连续，且

$$m^*[E\setminus(F_1\cap F_2)] = m^*[(E\setminus F_1)\cup(E\setminus F_2)]$$
$$\leqslant m^*(E\setminus F_1) + m^*(E\setminus F_2) < \delta.$$

由新定义知 $f_1(x)+f_2(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数. ▌

4·7·3 Lusin 定理的另一形式

引理 2 设 F 是 R^N 中的非空闭集，$f(x)$ 是 F 上的连续函数，则存在整个 R^N 上的连续函数 $g(x)$ 使得 $g(x)=f(x),\ \forall x\in F$.

在证明引理 2 之前先证下列结论：

若 $f(x)$ 是闭集 F 上的连续函数，并且在 F 上满足 $|f(x)|\leqslant M$（M 为一常数），则存在整个 R^N 上的连续函数 $g(x)$ 使在 F 上 $g(x)=f(x)$，并且在 R^N 上 $|g(x)|\leqslant M$.

证明 把 F 分成三个点集：

$$A=\left\{x\in F:\frac{M}{3}\leqslant f(x)\leqslant M\right\},$$
$$B=\left\{x\in F:-M\leqslant f(x)\leqslant -\frac{M}{3}\right\},$$
$$C=\left\{x\in F:-\frac{M}{3}< f(x)<\frac{M}{3}\right\},$$

并作函数

$$g_1(x)=\left(\frac{M}{3}\right)\frac{\rho(x,B)-\rho(x,A)}{\rho(x,B)+\rho(x,A)},\quad x\in R^N$$

因为 A 与 B 是互不相交的闭集，所以 $g_1(x)$ 处处有定义且在 R^n 上处处连续. 此外还有

$$|g_1(x)|\leqslant\frac{M}{3},\quad x\in R^N,$$

$$|f(x)-g_1(x)|\leqslant\frac{2M}{3},\quad x\in F.$$

再在 F 上来考察 $f(x)-g_1(x)$（相当于 $f(x)$），并用类似的方法作 R^N 上的连续函数 $g_2(x)$，此时 $f(x)-g_1(x)$ 的界是 $\frac{2M}{3}$，故 $g_2(x)$ 应满足

$$|g_2(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{2M}{3}, \quad x \in R^N,$$

$$|[f(x) - g_1(x)] - g_2(x)| \leqslant \frac{2}{3} \cdot \frac{2M}{3}, \quad x \in F.$$

继续这一过程，可得在 R^n 上的连续函数列，使得

$$|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M, \quad x \in R^N (k = 1,2,\cdots),$$

$$f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{k} M, \quad x \in F\ (k = 1,2,\cdots).$$

$$|g_k(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} M, \quad x \in R^N (k = 1,2,\cdots), \tag{4·7·1}$$

$$\left| f(x) - \sum_{i-1}^{k} g_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{k} M, \quad x \in F\ (k = 1,2,\cdots). \tag{4·7·2}$$

(4·7·1) 式表明 $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = g(x)$ 是一致收敛的，若记为其和函数为 $g(x)$，则 $g(x)$ 是 R^n 上的连续函数.

(4·7·2) 式表明 $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f(x), x \in F$.

最后，$\forall x \in R^N$，得到

$$|g(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| \leqslant \frac{M}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right)$$

$$\leqslant \frac{M}{3} \cdot \frac{1}{1 - 2/3} = M.$$

引理2 在 $f(x)$ 无界时的证明，可研究函数 $\arctan f(x)$. ▌

定理 3 （Lusin 定理的另一形式）设 E 是 R^N 中的可测集，$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\delta > 0$，恒存在闭集 $F^\delta \subset E$ 及整个 R^N 上的连续函数 $g_\delta(x)$，使：

(i) $m(E \backslash F^\delta) < \delta$，

(ii) 在 F^{δ} 上 $g_{\delta}(x) = f(x)$.

证明 由定理 2 知,存在闭集 $F^{\delta} \subset E$,使

$$m(E\backslash F) < \delta$$

且 $f(x)$ 限制在 F^{δ} 上是连续函数.由引理 2 知,存在 R^{N} 上的连续函数 $g_{\delta}(x)$,使在 F^{δ} 上 $g_{\delta}(x) = f(x)$. ▌

注 若定理 3 中 $f(x)$ 在 E 上还满足 $|f(x)| \leqslant M$(M 是一个常数),还可使所述的 $g_{\delta}(x)$ 在 R^{N} 上满足 $|g_{\delta}(x)| \leqslant M$.这由引理 2 后的注立即可知.

Lusin 定理及其另一形式深刻地揭露了可测函数与连续函数的关系,这不仅在理论上是重要的,而且在应用上也是重要的.因为通过它,我们常常能把有关一般可测函数的问题化成只是有关连续函数的问题,从而得到简化.

4·7·4 附 录

Weierstrass 多项式逼近定理 设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,则对任意 $\varepsilon > 0$,恒存在多项式 $p(x)$,使在 $[a,b]$ 上一致地有 $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$.

这个定理的证明可见于许多数学分析教科书,或参见[1]《实变函数论》第四章 §5.

习 题 四

1. 设 f,g,h 是 E 上的函数，$\{a_n\}_1^\infty \subset R^1$，$a \in R^1$. 证明

(i) 若 $a_n \uparrow a$，则 $E[f \geqslant a_n] \downarrow E[f \geqslant a]$.

(ii) 若 $a_n \downarrow a$，则 $E[f > a_n] \uparrow E[f > a]$.

(iii) $E[f \geqslant 0] = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E[n-1 \leqslant f < n]\right) \cup E[f = +\infty]$.

(iv) $E[f > g] = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E[f > r_n] \cap E[g < r_n])$，

这里 $r_1, r_2, r_3, \cdots$ 是所有的有理数.

(v)
$$E[|f-g| \geqslant a] \subset E\left[|f-h| \geqslant \frac{a}{2}\right] \cup E\left[|h-g| \geqslant \frac{a}{2}\right].$$

2. 设 $\{f_n\}_1^\infty$ 是 E 上的函数列，$a \in R^1$. 证明

(i) $E[f_n \to \infty] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E[f_n > k]$.

(ii) $E[f_n \not\to \infty] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E[f_n \leqslant k]$.

(iii) 若在 E 上 $f_n(x) \to f(x)$，则

$$E[f \geqslant a] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} E\left[f_n > a - \frac{1}{k}\right].$$

3. 若在 E 上 $f_n(x) \downarrow f(x)$ 且 $f(x) \geqslant 0$，问 $G(E, f_n) \downarrow G(E, f)$ 是否成立？

4. 设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的可测函数，$c \in \{\infty, -\infty\}$. 证明：

(i) $E[f < c]$，$E[f = c]$ 都是可测集；

(ii) $E[f > g]$，$E[f = g]$ 都是可测集.

5. 设 E 是可测集，则 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是：对每个有理数 r，点集 $E[f > r]$ 均可测.

6. 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，A 是 R^1 中的开集，证明 $E[f \in$

$A] = \{x \mid x \in E, f(x) \in A\}$ 是可测集,问当 A 是 R^1 中的闭集时如何?

7. 若 $|f(x)|$ 在 E 上可测,问 $f(x)$ 是否在 E 上可测?若 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数,对任何 $c \in R^1 \cup \{\infty, -\infty\}$ 点集 $E[f = c]$ 恒可测,问 $f(x)$ 是否在 E 上可测?

8. 证明可测集 $E(E \subset R^1)$ 上的单调函数是可测函数.

9. 若 $f(x)$ 是 E 上的有界可测函数,则存在一列简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

10. 设 $f(x)$ 是 E 上的非负函数,$\{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$ 是正有理数的全体,证明 $G(E,f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E[f > r_n] \times [0, r_n))$. 利用这个结论来证明非负可测函数的下方图是可测集.

11. 若 $f(x), g(x)$ 在 E 上可测,则 $f(x) + g(x)$ 在点集 $\{x \mid x \in E, f(x) + g(x)$ 在 x 点有意义$\}$ 上可测.

12. 若 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列,则 E 中使 $\{f_n(x)\}$ 趋于有限数的点 x 之全体是一个可测集.

13. 若 $f(y)$ 是 R^1 上的连续函数,$g(x)$ 是 E 上处处有限的可测函数,则 $f(g(x))$ 是 E 上的可测函数.

14. 若 $f(x)$ 是 $E_1 \subset R^p$ 上的可测函数,$g(y)$ 是 $E_2 \subset R^q$ 上的可测函数,则 $f(x) \cdot g(y)$ 是 $E_1 \times E_2 \subset R^{p+q}$ 上的可测函数.

15. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可微,则 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

16. 设 $f(x,t)$ 是 $[a,b] \times R^1$ 上的二元函数,对任何固定的 $x_0 \in [a,b]$,$f(x_0, t)$ 作为 t 的函数在 R^1 上连续,对任何固定的 $t_0 \in R^1$,$f(x, t_0)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上可测. 又设 $\varphi(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限可测函数. 证明一元函数 $f(x, \varphi(x))$ 在 $[a,b]$ 上可测.

17. 设 $mE < \infty$,$f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数,则对任意 $\delta > 0$,恒存在 E 的可测子集 e,使 $me < \delta$ 且 $f(x)$ 在 $E \setminus e$ 上有界.

18. 把上题中的"$me < \delta$"改为"$me = 0$"是否还成立?把上题中的条件"$mE < \infty$"去掉如何?

19. 证明 Egoroff 定理的逆命题:设 $f_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 是 E 上的可测函数,$f(x)$ 是 E 上的函数,若对任意 $\delta > 0$,恒存在 E 的可测子集 e 使 $me < \delta$ 且在 $E\backslash e$ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$,a. e. 于 E,并且 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数.

20. 设 $mE < \infty$,$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的有限可测函数列.若 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于有限函数 $f(x)$,则对任意 $\delta > 0$,恒存在可测集 $E^\delta \subset E$,使 $m(E\backslash E^\delta) < \delta$ 且在 E^δ 上 $\{f_n(x)\}$ 一致有界.

21. 设 $mE < \infty$,$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列.若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \doteq +\infty$,a. e. 于 E,则对任意 $\delta > 0$,恒存在 E 的可测子集 e,使 $me < \delta$ 且在 $E\backslash e$ 上 $\{f_n(x)\}$ **一致趋于** $+\infty$(即对任意实数 M,总存在 $N \in \mathbf{N}$,使当 $n \geqslant N$ 时在 $E\backslash e$ 上处处有 $f_n(x) > M$).

22. 若在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$,$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)(n = 1,2,\cdots)$,则在 E 上 $f_n(x) \xrightarrow{\bullet} f(x)$.

23. 设 $mE < \infty$,$f_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是 E 上几乎处处有限的可测函数,则在 E 上 $f_n(x) \xrightarrow{\bullet} f(x)$ 的充要条件是:在 E 上 $\sup\limits_{n\geqslant k} |f_n(x) - f(x)| \Rightarrow 0(k \to \infty)$.

24. 设 $mE < \infty$,在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$,$g(y)$ 是 R^1 上的连续函数,则在 E 上 $g(f_n(x)) \Rightarrow g(f(x))$.

25. 设 $mE = \infty$,在 E 上 $f_n \Rightarrow f$,$g_n \Rightarrow g$.证明在 E 上 $f_n \pm g_n \Rightarrow f \pm g$.举例说明在 E 上未必 $f_n \cdot g_n \Rightarrow f \cdot g$.

26. 设 $\{f_k^{(n)} \mid n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{N}\}$ 是一族 E 上的可测函数.若对每个固定的 n 当 $k \to \infty$ 时 $f_k^{(n)} \Rightarrow f^{(n)}$,而当 $n \to \infty$ 时 $f^{(n)} \Rightarrow f$,则 $\{f_k^{(n)}\}$

中必存在一列函数$\{f_{k_i}^{(n_i)}\}_{i=1}^{\infty}$依测度收敛于$f$.

27. 设$\{f_n(x)\}$是一列E上几乎处处有限的可测函数，则$\{f_n(x)\}$在E上依测度收敛于某个函数的充要条件是：对任意二正数ε及δ，总存在自然数N，使当$n\geqslant N, k\geqslant N$时$mE[|f_k-f_n|\geqslant\varepsilon]<\delta$.（答案可见于[17]p. 79）

28. 设点集$E\subset R^N$，$f(x)$是E上的有限函数，则$f(x)$为E上连续函数的充要条件是：对R^1中任何闭集F，点集$E[f\in F]$均可表为R^N中的闭集与E的交.

29. 任意点集E上的连续函数都可以扩张成为整个空间R^N上的连续函数吗？

30. 试作R^1上的一个有限可测函数，使它与R^1上的任何连续函数都不能几乎处处相等.

31. (Fréchet 定理) 设$E\subset R^N$是可测集，$f(x)$是E上几乎处处有限的函数，则$f(x)$为E上可测函数的充要条件是：存在一列R^N上的连续函数$\{f_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，a. e. 于$E$.

32. 若$f(x)$是区间$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数，则存在$[a,b]$上的阶梯函数列$\{\varphi_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$，a. e. 于$[a,b]$.

33. 若$f(x)$是区间$[a,b]$上几乎处处有限的可测函数，则存在一列多项式$\{p_n(x)\}$，使$\lim\limits_{n\to\infty}p_n(x)=f(x)$，a. e. 于$[a,b]$.

34. 证明存在着一个以多项式为项的级数$p_1(x)+p_2(x)+p_3(x)+\cdots$具有下述的性质：对$[a,b]$上的任何一个几乎处处有限的可测函数$f(x)$，都可以在此级数中插入括号分段求和，使所得的新级数在$[a,b]$上几乎处处收敛于$f(x)$.

35. 设$f(x)$是R^1上的有限可测函数. 若对任何$x_1,x_1\in R^1$都有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2),$$

则存在常数c使在R^1上$f(x)=cx$.（提示：利用第三章习题第 29 题）

第五章　可测函数的积分

Riemann 积分在古典物理中的重要作用是大家都知道的，譬如要表示连续物质分布中或连续运动过程中某物理量的“积累”，就要用到Riemann积分.但是在近代物理中，譬如在量子力学中要表示微观粒子物理量的平均值并进行严密的数学论证，Riemann积分就不够用了. Riemann 积分只能对连续函数或不连续点“不太多”的函数来进行，这不能适应近代物理的需要.我们还知道，数学分析中关于Riemann积分的一些重要结果如极限号与积分号的交换、积分号与积分号的交换等都要求很强的保证条件.这些条件在应用中往往不具备或者虽然具备但验证起来非常麻烦，这就使得数学演算不能方便的进行，从这方面说也有必要对旧积分进行改革.

本章在 Lebesgue 测度基础上所建立的 Lebesgue 积分，在表达物理量的关系和进行数学演算的方便性上，比 Riemann 积分要好.特别是，Lebesgue 测度及积分的建立有着重大的理论意义. Lebesgue 测度及积分理论的深刻性可以从许多问题中明显的看出来.例如 Riemann 可积函数的构造问题、单调函数的可微性问题，如果没有 Lebesgue 测度的概念便很难讲清楚；又例如通过积分由导函数求原函数问题(§6·3)、连续函数空间按 L^p 距离的完备化空间问题(§7·2、§7·5)，都说明了引入 Lebesgue 积分的必要性.

在 §5·1～§5·5 中，讨论 Lebesgue 可测函数的 Lebesgue 积分，§5·6将简单介绍 L－S 可测函数的 Lebesgue－Stieltjes 积

分以及抽象可测函数的积分.

为了说话方便，我们约定：今后凡说“积分”、“可积”，当无特别声明时指的是“Lebesgue 积分”、“Lebesgue 可积”.

§5·1 Lebesgue 积分的定义及初等性质

本节将分三步来建立 Lebesgue 积分的概念；先建立非负简单函数的积分，再建立一般非负可测函数的积分，然后建立一般可测函数的积分.

5·1·1 非负简单函数的积分

定义 1 设 $\varphi(x)$ 是 E 上的非负简单函数，则它可以表示成如下的形式

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{e_i}(x), \tag{5·1·1}$$

其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是两两无交的非空可测集且 $\bigcup_{i=1}^{n} e_i = E$，$\chi_{e_i}(x)$ 是 e_i 相对于 E 的特征函数，$c_1, c_2, \cdots, c_n$ 是实数且 $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$(亦即(5·5·1)是 $\varphi(x)$ 的标准初等分解). 我们称和数 $\sum_{i=1}^{n} c_i m e_i$ 为 $\varphi(x)$ 在 E 上的**积分**，记作 $\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x$(有时也记作 $\int_E \varphi(x)\mathrm{d}m$ 或 $\int_E \varphi \mathrm{d}x$). 当此积分为有限数时，称 $\varphi(x)$ 在 E 上**可积**.

命题 1 若 $\varphi(x)$ 是 E 上的非负简单函数，则

$$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x = mG(E, \varphi).$$

证明 设 $\varphi(x)$ 的标准初等分解为

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{e_i}(x). \tag{5·1·2}$$

由 §4·1 中 4·1·3(i) 知

$$G(E,\varphi)=\bigcup_{i=1}^{n} G(e_i,c_i\chi_{e_i})=\bigcup_{i=1}^{n}(e_i\times[0,c_i)).$$

诸 $e_i\times[0,c_i)$ 是两两无交的可测集，故

$$mG(E,\varphi)=\sum_{i=1}^{n} m(e_i\times[0,c_i))=\sum_{i=1}^{n} c_i me_i. \tag{5·1·3}$$

由定义 1 知命题 1 成立. ▌

命题 1 说明了非负简单函数积分的几何意义.

注意命题 1 的证明，(5·1·3) 式的得到并未用到初等分解(5·1·2) 的标准性，由此及命题 1 立即得到

命题 2　若 $\varphi(x)$ 是 E 上的非负简单函数，则对于 $\varphi(x)$ 的任一初等分解

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{e_i}(x)$$

都有

$$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n} c_i me_i.$$

非负简单函数的积分有如下性质.

命题 3　设 $\varphi(x),\psi(x)$ 为 E 上的非负简单函数，这时，

(i) 若在 E 上 $\varphi(x)\leqslant\psi(x)$，则 $\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_E\psi(x)\mathrm{d}x$；

(ii) $\int_E[\varphi(x)+\psi(x)]\mathrm{d}x=\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_E\psi(x)\mathrm{d}x$；

(iii) 若实数 $c\geqslant 0$，则 $\int_E c\varphi(x)\mathrm{d}x=c\int_E\varphi(x)\mathrm{d}x$.

证明 (i) 由 $G(E,\varphi)\subset G(E,\psi)$ 及命题 1 立即得证.

(ii) 设 $\varphi(x),\psi(x)$ 有如下的初等分解

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{E_i}(x),\psi(x)=\sum_{j=1}^{m} d_j\chi_{F_j}(x),$$

则

$$\varphi(x)+\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_i+d_j)\chi_{E_i\cap F_j}(x),$$

$$\int_E(\varphi+\psi)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(c_i+d_j)m(E_i\cap F_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_i m(E_i\cap F_j)+\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}d_j\, m(E_i\cap F_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_i mE_i+\sum_{j=1}^{m}d_j mF_j=\int_E\varphi\mathrm{d}x+\int_E\psi\mathrm{d}x.$$

(iii) 由积分的定义立即得证. ▌

5·1·2 非负可测函数的积分

定义 2 设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数,我们定义 $f(x)$ 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sup\left\{\int_E\varphi\mathrm{d}x\,\middle|\,\begin{array}{l}\varphi\text{ 为简单函数,}\\ \text{在 }E\text{ 上满足 }0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)\end{array}\right\}$$

当此积分为有限数时,称 $f(x)$ 在 E 上可积.

显然当 $f(x)$ 是非负简单函数时此定义 2 与前面的定义 1 相一致.

定理 1 若 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=mG(E,f).$$

证明 由 §4·3 定理 2 知 $G(E,f)$ 可测. 若 $\varphi(x)$ 是 E 上的简单函数且满足 $0\leqslant\varphi(x)\leqslant f(x)$,则

$$\int_E\varphi\mathrm{d}x=mG(E,\varphi),\quad G(E,\varphi)\subset G(E,f),$$

从而

$$\int_E\varphi\mathrm{d}x\leqslant mG(E,f).$$

再由定义 2 即知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant mG(E,f).$$

再证相反的不等式. 由 §4·3 定理 1 知存在一列 E 上的非负简单函数 $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$. 从而

$$G(E,\varphi_n) \uparrow G(E,f), \quad mG(E,\varphi_n) \uparrow mG(E,f).$$

因此

$$\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x \uparrow mG(E,f). \tag{5·1·4}$$

再由定义 2 即知

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \geqslant mG(E,f).$$

这就证明了定理 1. ▌

定理 1 说明了非负可测函数积分的几何意义.

由定理 1 及其证明中的(5·1·4) 式立即可得

定理 2　设 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数. 若 E 上的一列非负简单函数 $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$，则

$$\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x \uparrow \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

注　对于 E 上的非负可测函数 $f(x)$，按照 §4·3 定理 1 证明中所述的方法，可以具体构造出一列 E 上的非负简单函数 $\{\varphi_n(x)\}$ 使 $\varphi_n(x) \uparrow f(x)$. 这个函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 由 $f(x)$ 完全决定，如果我们直接把 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E \varphi_n(x)\mathrm{d}x$ 定义为 $f(x)$ 在 E 上的积分，显然与定义 2 是等价的.

非负可测函数的积分有如下性质.

定理 3　设 $f(x), g(x)$ 是 E 上的非负可测函数.

(i) 若 $mE=0$，则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$；

(ii) 若在 E 上 $f(x) \leqslant g(x)$,则$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x$;

(iii) 若 E 为有限个或可列个两两无交的可测集 E_i 之并 $\bigcup\limits_i E_i$,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_i \int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x;$$

(iv)$\int_E [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$;

(v) 若实数 $c \geqslant 0$,则$\int_E cf(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

证明 (i),(ii) 由积分的定义立即得证.

(iii) 由 $E=\bigcup\limits_i E_i$ 知$G(E,f)=\bigcup\limits_i G(E_i,f)$,由诸 E_i 两两无交知诸 $G(E_i,f)$ 两两无交. $f(x)$ 在 E_i 上可测,故 $G(E_i,f)$ 是可测集. 所以

$$mG(E,f) = \sum_i mG(E_i,f).$$

由定理 1 即知(iii) 成立.

(iv) 存在 E 上的二非负简单函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 与 $\{\psi_n(x)\}$,使

$$\varphi_n(x) \uparrow f(x) \text{ 且 } \psi_n(x) \uparrow g(x),$$

从而

$$[\varphi_n(x)+\psi_n(x)] \uparrow [f(x)+g(x)].$$

由定理 2 及命题 3 (ii) 知

$$\begin{aligned}\int_E (f+g)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_E (\varphi_n+\psi_n)\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_E \varphi_n\mathrm{d}x + \int_E \psi_n\mathrm{d}x\right) = \int_E f\mathrm{d}x + \int_E g\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

(v) 类似于(iv) 可证. ▌

系 1 (i) 若非负函数 $f(x)$ 在 E 上可积,则 $f(x)$ 在 E 的任何可测子集 E_0 上也可积.

(ii) 设 E 为二无交可测集 E_1,E_2 之并,若 E 上的非负函数 $f(x)$ 分别在 E_1,E_2 上可积,则 $f(x)$ 在 E 上可积.

证明　由定理3(iii)立即可知. ▌

5·1·3　一般可测函数的积分

定义3　设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，若非负可测函数 $f^+(x)$,$f^-(x)$ 在 E 上的积分不同时为 $+\infty$,就称 $f(x)$ 在 E 上**有积分**并定义 $f(x)$ 在 E 上的**积分**为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \quad (5\cdot1\cdot5)$$

(它是有限数或 $\pm\infty$). 当积分(5·1·5)为有限数时(即当 $f^+(x)$,$f^-(x)$ 均在 E 上可积时),称 $f(x)$ 在 E 上**可积**.

显然当 $f(x)$ 是非负可测函数时此定义3与前面的定义2相一致.

命题4　设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,若 $f(x)$ 在 E 上有积分,则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = mG(E,f^+) - mG(E,f^-).$$

证明　由定理1及(5·1·5)式立即可知. ▌

命题4说明了可测函数积分的几何意义.

命题5　设 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数,作 R^N 上的函数

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in E \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x \in R^N \setminus E \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 E 上有积分的充要条件是 $\hat{f}(x)$ 在 R^N 上有积分,并且当 $f(x)$,$\hat{f}(x)$ 有积分时

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_{R^N} \hat{f}(x)\mathrm{d}x.$$

证明　易知 $G(E,f^+) = G(R^N,\hat{f}^+)$,$G(E,f^-) = G(R^N,\hat{f}^-)$. 若 $f(x)$,$\hat{f}(x)$ 二者之一有积分,则此二函数均可测,这时由定理1知

$$\int_E f^+(x)\mathrm{d}x = mG(E,f^+)$$
$$= mG(R^N,\hat{f}^+) = \int_{R^N}\hat{f}^+(x)\mathrm{d}x,$$
$$\int_E f^-(x)\mathrm{d}x = mG(E,f^-)$$
$$= mG(R^N,\hat{f}^-) = \int_{R^N}\hat{f}^-(x)\mathrm{d}x.$$

所以命题 5 的结论成立. ▌

命题 5 使我们可以把函数在任一可测集上积分的问题归结为函数在整个 R^N 上积分的问题.

5·1·4 积分的初等性质

定理 4 若 $f(x)$,$g(x)$ 在 E 上可积,$f(x)\leqslant g(x)$,则
$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_E g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 显然 $f^+(x)\leqslant g^+(x)$,$f^-(x)\geqslant g^-(x)$,由定理 3(ii)知
$$\int_E f^+\mathrm{d}x \leqslant \int_E g^+\mathrm{d}x,\quad \int_E f^-\mathrm{d}x \geqslant \int_E g^-\mathrm{d}x.$$

由定义 3 知定理 4 成立. ▌

注 把定理 4 中的条件"可积"改为"有积分",仍然成立. 下面的诸定理哪些可作这样的改动,请读者加以考虑.

定理 5 (i) 设 $f(x)$ 在 E 上可测,则 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $|f(x)|$ 在 E 上可积.

(ii) 若 $f(x)$ 在 E 上可积,则
$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 (i) 若 f 在 E 上可积,则 f^+、f^- 均在 E 上可积,而 $|f| = f^+ + f^-$,由定理 3 知
$$\int_E |f|\mathrm{d}x = \int_E (f^+ + f^-)\mathrm{d}x = \int_E f^+\mathrm{d}x + \int_E f^-\mathrm{d}x < \infty,$$

故 $|f|$ 在 E 上可积.

若 $|f|$ 在 E 上可积，由 $f^+\leqslant |f|, f^-\leqslant |f|$ 及定理 3(ii) 知 f^+, f^- 均在 E 上可积，故 f 在 E 上的可积.

(ii) $$\left|\int_E f\mathrm{d}x\right| = \left|\int_E f^+\,\mathrm{d}x - \int_E f^-\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E f^+\,\mathrm{d}x + \int_E f^-\,\mathrm{d}x = \int_E (f^+ + f^-)\mathrm{d}x = \int_E |f|\,\mathrm{d}x.$$ ▌

定理 6　(i) 设 E 为二无交可测集 E_1, E_2 之并，若 E 上的函数 $f(x)$ 分别在 E_1, E_2 上可积，则 $f(x)$ 在 E 上可积.

(ii) 若 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)$ 在 E 的任何可测子集 E_0 上也可积.

(iii) 设 E 为有限个或可列个两两无交的可测集 E_i 之并 $\bigcup\limits_i E_i$，若 $f(x)$ 在 E 上可积，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_i \int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x. \qquad (5\cdot1\cdot6)$$

证明　(i) 由题设知 $f^+(x)$ 分别在 E_1, E_2 上可积，由系 1(ii) 知 $f^+(x)$ 在 E 上可积，同理 $f^-(x)$ 在 E 上可积. 所以 $f(x)$ 在 E 上可积.

(ii) 根据系 1，类似于(i) 可证.

(iii) 由定理 3 知

$$\int_{\bigcup\limits_i E_i} f^+\,\mathrm{d}x = \sum_i \int_{E_i} f^+\,\mathrm{d}x, \qquad (5\cdot1\cdot7)$$

$$\int_{\bigcup\limits_i E_i} f^-\,\mathrm{d}x = \sum_i \int_{E_i} f^-\,\mathrm{d}x. \qquad (5\cdot1\cdot8)$$

以上二式的左边为有限数，故右边的诸项也为有限数. 把(5·1·7) 式的两边分别减去(5·1·8) 式的两边便得到(5·1·6) 式. ▌

定理 7　(i) 若 $mE=0$，则 E 上的任何函数 $f(x)$ 都可积，并且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(ii) 若 $f(x)$ 在 E 上可积,$g(x)$ 与 $f(x)$ 在 E 上几乎处处相等,则 $g(x)$ 在 E 上也可积,并且

$$\int_E g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 (i) 由 $mE = 0$ 知 $f(x)$ 在 E 上可测,由定理 3 知 $\int_E f^+ \mathrm{d}x$ 与 $\int_E f^- \mathrm{d}x$ 均为 0,故 $f(x)$ 在 E 上可积,且 $\int_E f\mathrm{d}x = 0$.

(ii) 令 $E_1 = E[f \neq g]$,则 $mE_1 = 0$. 由定理 6 知 f 在 $E\backslash E_1$ 上可积,从而 g 在 $E\backslash E_1$ 上可积. 又由(i) 知 g 在 E_1 上可积. 根据定理 6,g 在 E 上可积,并且

$$\begin{aligned}\int_E g\mathrm{d}x &= \int_{E\backslash E_1} g\mathrm{d}x + \int_{E_1} g\mathrm{d}x = \int_{E\backslash E_1} g\mathrm{d}x \\ &= \int_{E\backslash E_1} f\mathrm{d}x = \int_{E\backslash E_1} f\mathrm{d}x + \int_{E_1} f\mathrm{d}x = \int_E f\mathrm{d}x. \blacksquare\end{aligned}$$

不难证明,把定理 7(ii) 中的“可积”换成“有积分”仍然成立. 我们看到,在一个零集上任意改变函数的值,既不影响函数的可积性也不影响函数的积分值. 今后当有需要时,我们将随时这样做.

注 当讨论函数积分方面的问题时,若 N 是 E 的零测度子集,函数 $f(x)$ 在 $E\backslash N$ 上有积分(或可积),即使 $f(x)$ 在 N 上无定义,我们往往仍说函数 $f(x)$ 在 E 上有积分(或可积),我们规定 $f(x)$ 在 E 上的积分值就是 $f(x)$ 在 $E\backslash N$ 上的积分值. 对于讨论函数的积分来说,我们这种做法不会造成混乱,却可以带来某些方便.

定理 8 若 $f(x)$ 在 E 上可积,则 $f(x)$ 在 E 上几乎处处取有限值.

证明 记

$$E_1 = E[f = +\infty], E_2 = E[f = -\infty].$$

假设 $mE_1 > 0$,显然对于每个自然数 n 在 E_1 上恒有 $f^+(x) \geqslant n$,根据定理 3,

$$\int_E f^+\,dx = \int_{E\setminus E_1} f^+\,dx + \int_{E_1} f^+\,dx$$
$$\geqslant \int_{E_1} f^+\,dx \geqslant \int_{E_1} n\,dx = n\cdot mE_1,$$

从而$\int_E f^+\,dx=+\infty$. 这与 f 在 E 上可积矛盾. 可见 $mE_1=0$. 同理可证 $mE_2=0$. 于是 $f(x)$ 在 E 上几乎处处有限. ▌

定理 9　若 $f(x),g(x)$ 都在 E 上可积,则 $f(x)+g(x)$ 在 E 上可积,并且

$$\int_E [f(x)+g(x)]\,dx = \int_E f(x)\,dx + \int_E g(x)\,dx. \tag{5·1·9}$$

证明　$f(x),g(x)$ 在 E 上可积,由定理 8 知 $f(x),g(x)$ 在 E 上几乎处处有限,故 $f(x)+g(x)$ 在 E 上几乎处处有意义. 根据定理 7 及后面的说明,我们不妨设 $f(x),g(x)$ 在 E 上处处有限.

显然

$$(f+g)^+\leqslant f^+ + g^+,\ (f+g)^-\leqslant f^- + g^-,$$

而 f^+, g^+, f^-, g^- 可积,由定理 3 便知$(f+g)^+$ 及$(f+g)^-$ 可积,从而 $f+g$ 可积.

由于

$$(f+g)^+-(f+g)^- = f+g = f^+-f^-+g^+-g^-,$$

所以　$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$

由定理 3 知

$$\int_E (f+g)^+\,dx + \int_E f^-\,dx + \int_E g^-\,dx$$
$$= \int_E (f+g)^-\,dx + \int_E f^+\,dx + \int_E g^+\,dx,$$

通过移项便可得到(5·1·9) 式. ▌

定理 10　若 $f(x)$ 在 E 上可积,c 是一实数,则 $cf(x)$ 在 E 上可积,并且

$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x. \qquad (5\cdot 1\cdot 10)$$

证明 (1°) 设 $c \geqslant 0$,由定理 3 知

$$\int_E cf^+ \mathrm{d}x = c\int_E f^+ \mathrm{d}x, \qquad (5\cdot 1\cdot 11)$$

$$\int_E cf^- \mathrm{d}x = c\int_E f^- \mathrm{d}x . \qquad (5\cdot 1\cdot 12)$$

显然$(cf)^+ = cf^+$,$(cf)^- = cf^-$,由 f^+、f^- 可积知$(cf)^+$,$(cf)^-$ 可积,故 cf 可积.(5・1・11),(5・1・12) 二式两边分别相减便得(5・1・10) 式.

(2°) 设 $c = -1$,这时 $cf = -f$,$(-f)^+ = f^-$,$(-f)^- = f^+$. 由可积及积分的定义立即知定理 10 成立.

(3°) 设 $c < 0$,这时 $cf = (-1)\cdot |c| \cdot f$. 由(1°) 与(2°) 即知定理 10 成立. ▌

定理 9 与定理 10 所述的可积函数的性质合起来称为“可积函数积分的线性性质”.

定理 11 设 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,若

$$\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = 0, \qquad (5\cdot 1\cdot 13)$$

则 $f(x) = 0$,a. e. 于 E.

证明 假设定理 11 的结论不成立,则 $mE[|f| \neq 0] > 0$. 由于

$$E[|f| \neq 0] = E[|f| > 0] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[|f| \geqslant \frac{1}{n}\right],$$

故存在自然数 n_0 使 $mE\left[|f| \geqslant \frac{1}{n_0}\right] > 0$,根据定理 3,

$$\int_E |f|\mathrm{d}x \geqslant \int_{E\left[|f| \geqslant \frac{1}{n_0}\right]} |f|\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \int_{E\left[|f| \geqslant \frac{1}{n_0}\right]} \frac{1}{n_0}\mathrm{d}x = \frac{1}{n_0} mE\left[|f| \geqslant \frac{1}{n_0}\right] > 0 .$$

这与(5・1・13) 矛盾,所以 $f(x) = 0$,a. e. 于 E. ▌

定理12　若 $f(x)$ 在 E 上可积，则对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $me<\delta(e\subset E)$ 时恒有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

证明　$|f(x)|$ 在 E 上可积. 由定义 2 知存在非负简单函数 $\varphi(x)$，使

$$\text{在 } E \text{ 上}\quad \varphi(x)\leqslant|f(x)|\quad \text{并且}\quad \int_E\varphi\mathrm{d}x>\int_E|f|\mathrm{d}x-\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此

$$\int_E(|f|-\varphi)\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}.$$

显然存在正实数 M 使在 E 上 $\varphi(x)\leqslant M$，令 $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$，

则当 $me<\delta(e\subset E)$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_e f\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_e|f|\mathrm{d}x=\int_e(|f|-\varphi)\mathrm{d}x+\int_e\varphi\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_E(|f|-\varphi)\mathrm{d}x+\int_e M\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+Mme\\&<\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\ \blacksquare\end{aligned}$$

定理 12 通常简述为：若 $f(x)$ 是 E 上的可积函数，则 $f(x)$ 的**积分具有绝对连续性**.

§5·2　Lebesgue 积分与 Riemann 积分的关系

为了书写方便，我们把“Riemann 积分”、“Riemann 可积”简写作“R 积分”、“R 可积”，而把“Lebesgue 积分”、“Lebesgue 可积”简写作“L 积分”、“L 可积”.

5·2·1　L 积分与 R 积分的关系

定理 1　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上 R 可积，则 $f(x)$ 在

$[a,b]$ 上也 L 可积，并且 R 积分值 $(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 L 积分值 $(\mathrm{L})\int_{[a,b]} f(x)\mathrm{d}x$ 相等.

证明 记$[a,b]$为E. 由$f(x)$在E上R可积知，存在实数M_1，M_2 使在 E 上 $M_1 \leqslant f(x) \leqslant M_2$.

相应于每个自然数 n，把$[a,b]$ 分成 2^n 等分，得到划分

$$D_n: a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_{2^n}^{(n)} = b.$$

显然划分 D^{n+1} 的诸分点包含划分 D_n 的诸分点，划分 D_n 的步长(即相邻两分点间的距离)$\lambda_n = \dfrac{b-a}{2^n}$，当 $n \to \infty$ 时，$\lambda_n \to 0$.

(1°) 相应于 D_n，作 E 上的简单函数

$$\underline{f}_n(x) = \begin{cases} f(a), & \text{当 } x = a \text{ 时}, \\ m_k^{(n)}, & \text{当 } x \in (x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}] \text{ 时}, \quad k = 1,2,\cdots,2^n, \end{cases} \tag{5·2·1}$$

其中 $m_k^{(n)}$ 为 $f(x)$ 在小区间$[x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$上的下确界.

函数 $\underline{f}_n(x)$ 在 E 上的 L 积分为

$$\begin{aligned}(\mathrm{L})\int_E \underline{f}_n(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{2^n} m_k^{(n)} \cdot m(x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}] \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} m_k^{(n)}(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}).\end{aligned} \tag{5·2·2}$$

(5·2·2) 的后端恰是 $f(x)$ 关于划分 D_n 的 Darboux 下和 s_n. 由 $f(x)$ 在 E 上 R 可积知

$$s_n \uparrow (\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{5·2·3}$$

再看(5·2·2) 的前端. 由于 $M_1 \leqslant \underline{f}_1(x) \leqslant \underline{f}_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x)$，故存在 E 上的函数 $\underline{f}(x)$ 使 $\underline{f}_n(x) \uparrow \underline{f}(x)$. 显然 $\underline{f}(x)$ 是有界可测函数且 $\underline{f}(x) \leqslant f(x)$，非负简单函数列

$$[\underline{f}_n(x)-M_1]\uparrow[\underline{f}(x)-M_1].$$

由 §5·1 定理 2 知

$$(\mathrm{L})\int_E[\underline{f}_n(x)-M_1]\mathrm{d}x\uparrow(\mathrm{L})\int_E[\underline{f}(x)-M_1]\mathrm{d}x.$$

再由积分的线性性质知

$$(\mathrm{L})\int_E\underline{f}_n(x)\mathrm{d}x\uparrow(\mathrm{L})\int_E\underline{f}(x)\mathrm{d}x. \qquad (5\cdot2\cdot4)$$

(2°) 相应于 D_n，作 E 上的简单函数

$$\bar{f}_n(x)=\begin{cases}f(a), & \text{当 } x=a \text{ 时},\\ M_k^{(n)}, & \text{当 } x\in(x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}] \text{ 时}, \quad k=1,2,\cdots,2^n,\end{cases}$$
$$(5\cdot2\cdot5)$$

其中 $M_k^{(n)}$ 为 $f(x)$ 在$[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$上的上确界.

函数 $\bar{f}_n(x)$ 有 E 上的 L 积分为

$$(\mathrm{L})\int_E\bar{f}_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{2^n}M_k^{(n)}(x_k^{(n)}-x_{k-1}^{(n)}). \qquad (5\cdot2\cdot6)$$

(5·2·6) 的后端恰是 $f(x)$ 关于划分 D_n 的 Darboux 上和 S_n，由 $f(x)$ 在 E 上 R 可积知

$$S_n\downarrow(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \qquad (5\cdot2\cdot7)$$

再看(5·2·6) 的前端. 由于 $M_2\geqslant\bar{f}_1(x)\geqslant\bar{f}_2(x)\geqslant\cdots\geqslant f(x)$，故存在 E 上的函数 $\bar{f}(x)$ 使 $\bar{f}_n(x)\downarrow\bar{f}(x)$. 显然 $\bar{f}(x)$ 是有界可测函数且 $f(x)\leqslant\bar{f}(x)$，非负简单函数列

$$[M_2-\bar{f}_n(x)]\uparrow[M_2-\bar{f}(x)].$$

由 §5·1 定理 2 及积分的线性性质知

$$(\mathrm{L})\int_E\bar{f}_n(x)\mathrm{d}x\downarrow(\mathrm{L})\int_E\bar{f}(x)\mathrm{d}x. \qquad (5\cdot2\cdot8)$$

由(1°)与(2°)知 $\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant\bar{f}(x)$，并且 $\underline{f}(x)$ 与 $\bar{f}(x)$ 在

E 上的 L 积分都等于(R)$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,所以

$$(\mathrm{L})\int_E[\overline{f}(x)-\underline{f}(x)]\mathrm{d}x=0.$$

由于$[\overline{f}(x)-\underline{f}(x)]$在 E 上非负可测,根据 §5·1 定理 11 知

$$\underline{f}(x)=\overline{f}(x),\text{a. e. 于 } E, \tag{5·2·9}$$

从而

$$\underline{f}(x)=f(x)=\overline{f}(x),\text{a. e. 于 } E.$$

所以 $f(x)$ 在 E 上 L 可积,并且

$$(\mathrm{L})\int_E f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_E\underline{f}(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_E\overline{f}(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \blacksquare$$

读者不妨设 $0=M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,然后从下方图的 Jordan, Lebesgue 可测性以及 Jordan,Lebesgue 测度的观点来看上面的证明,以便加深理解.

注 $f(x)$ 在$[a,b]$上的 Lebesgue 积分$\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}x$有时也记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

定理 1 说的是一元函数的情况,对于多元函数,类似的定理也是成立的.

例 5·2·1 $[0,1]$上的 Dirichlet 函数是非负简单函数,当然 L 可积,但它不是 R 可积的.

例 5·2·1 说明即使是定义在闭区间上的有界 L 可积函数也未必 R 可积,可见 L 积分确实是推广了 R 积分.

*5·2·2 R 可积函数的构造

上面定理 1 的证明中,除了(5·2·3),(5·2·7) 两式及(5·2·8) 式后面的几步外,其余的论断仅基于 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界的条件.下面的讨论将引用这些论断.

设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有界函数，作$[a,b]$上的函数

$$m(x)=\sup_{\delta>0}\inf_{t\in(x-\delta,x+\delta)}f(t),$$

$$M(x)=\inf_{\delta>0}\sup_{t\in(x-\delta,x+\delta)}f(t),$$

$m(x)$ 与 $M(x)$ 分别称为 $f(x)$ 的 **Baire 下函数与 Baire 上函数**. 由数学分析中极限的知识可以证明下面的两个结论：

(i) $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是

$$m(x_0)=M(x_0).$$

(ii) 设 $\underline{f}_n(x),\overline{f}_n(x)$ 是定理 1 证明中(5·1·1),(5·2·5)两式所定义的函数，若 $x_0\in[a,b]$，$x_0\neq x_k^{(n)}(k=0,1,\cdots,2^n;n=1,2,3,\cdots)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\underline{f}_n(x_0)=m(x_0),\qquad \lim_{n\to\infty}\overline{f}_n(x_0)=M(x_0).$$

从而 $m(x),M(x)$ 分别与定理 1 证明中导出的有界可测函数 $\underline{f}(x),\overline{f}(x)$ 在$[a,b]$上几乎处处相等(结论(i),(ii) 的详细证明过程可参见[1]《实变函数论》第五章 §4).

定理 2　设 $f(x)$ 是 $E=[a,b]$ 上的有界函数，则 $f(x)$ 在 E 上 R 可积的充要条件是：$f(x)$ 的不连续点的全体是一个测度为零的点集.

证明　必要性：设 $f(x)$ 在 E 上 R 可积，由定理 1 的证明知 $\underline{f}(x)=\overline{f}(x)$, a. e. 于 E(即(5·2·9)式). 由此，根据上面的结论(ii) 知 $m(x)=M(x)$, a. e. 于 E. 再根据结论(i) 即知 $f(x)$ 的不连续点全体为一零集.

充分性：设 $f(x)$ 的不连续点全体为一零集，根据(i) 知 $m(x)=M(x)$, a. e. 于 E. 再根据(ii) 知 $\underline{f}(x)=\overline{f}(x)$ a. e. 于 E，从而

$$(\mathrm{L})\int_E\underline{f}(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_E\overline{f}(x)\mathrm{d}x.$$

设 D_n 为定理 1 证明中所述的划分，$f(x)$ 相应于划分 D_n 的

Darboux下和与上和分别为s_n与S_n. 由定理1证明中的(5·2·2),(5·2·4),(5·2·6),(5·2·8)四式知

$$s_n \uparrow (L)\int_E \underline{f}(x)\mathrm{d}x,\ S_n \downarrow (L)\int_E \overline{f}(x)\mathrm{d}x.$$

于是$S_n - s_n \to 0$. 因此$f(x)$在E上R可积. ▌

定理2显明地揭示了Riemann可积函数的构造. 定理2的得到从一个方面反映了Lebesgue测度及积分理论的深刻性.

5·2·3 Lebesgue积分与广义Riemann积分的关系

数学分析中的无穷积分及瑕积分统称广义Riemann积分(简称广义R积分).

首先讨论无穷积分与L积分的关系.

命题1 设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的非负有限函数,当$t\in(0,+\infty)$时$f(x)$在$[0,t]$上R可积,则广义R积分(广义R)$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$有确定的值$a$($a$为有限数或$+\infty$),并且

$$(L)\int_{[0,+\infty)} f(x)\mathrm{d}x = a.$$

证明 显然$\lim\limits_{t\to+\infty}(R)\int_0^t f(x)\mathrm{d}x$存在,记其值为$a$,即

$$(广义\ R)\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = a.$$

对每个自然数n,$f(x)$在$[0,n]$上R可积,由定理1知$f(x)$在$[0,n]$上可测,从而$f(x)$在$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[0,n]=[0,+\infty)$上可测. 根据§5·1定理3,

$$(L)\int_{[0,+\infty)} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty}(L)\int_{[i-1,i)} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to\infty}(L)\int_{[0,n]} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}(R)\int_0^n f(x)\mathrm{d}x = a.\ ▌$$

命题2 设$f(x)$是$[0,+\infty)$上的有限函数,当$t\in(0,+\infty)$

时 $f(x)$ 在$[0,t]$上 R 可积，并且(广义 R)$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 为有限数 a，则(广义 R)$\int_0^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 有确定的值 b，并且

(i) 当 b 为有限数时

$$(\mathrm{L})\int_{[0,+\infty)} f(x)\mathrm{d}x = a;$$

(ii) 当 $b=+\infty$ 时 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上没有 L 积分.

证明　当 $t\in(0,+\infty)$ 时 $f(x)$ 在$[0,t]$上 R 可积，故 $|f(x)|$ 在$[0,t]$上 R 可积，从而 $f^{\pm}(x)=\frac{1}{2}[|f(x)|\pm f(x)]$ 在$[0,t]$上 R 可积. 由命题 1 知(广义 R)$\int_0^{+\infty} |f(x)|\mathrm{d}x$ 有确定的值 b，并且

$$\begin{aligned}
(\mathrm{L})\int_{[0,+\infty)} f^{\pm}(x)\mathrm{d}x &= (\text{广义 R})\int_0^{+\infty} f^{\pm}(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to+\infty}(\mathrm{R})\int_0^t \frac{1}{2}[|f(x)|\pm f(x)]\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left[(\mathrm{R})\int_0^t \frac{1}{2}|f(x)|\mathrm{d}x \pm (\mathrm{R})\int_0^t \frac{1}{2}f(x)\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{2}(b\pm a).
\end{aligned}$$

(i) 当 b 为有限数时 $f^{+}(x)$，$f^{-}(x)$ 在$[0,+\infty)$上的 L 积分均为有限数，所以

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{L})\int_{[0,+\infty)} f(x)\mathrm{d}x \\
&= (\mathrm{L})\int_{[0,+\infty)} f^{+}(x)\mathrm{d}x - (\mathrm{L})\int_{[0,+\infty)} f^{-}(x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}(b+a) - \frac{1}{2}(b-a) = a.
\end{aligned}$$

(ii) 当 $b=+\infty$ 时 $f^{+}(x)$，$f^{-}(x)$ 在$[0,+\infty)$上的 L 积分均为 $+\infty$，所以 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上没有 L 积分. ▌

瑕积分与 L 积分的关系与上述无穷积分的情况类似.

当广义 R 积分有确定的值时未必有相应的 L 积分，所以 L 积分虽然是 R 积分的推广，却不是广义 R 积分的推广.

§5·3 逐项积分定理

本节主要讨论积分号与极限号交换的问题. 我们将看到这个问题在 Lebesgue 积分范围内能够得到比在 Riemann 积分范围内远为完美的解决.

5·3·1 非负可测函数列的逐项积分定理

定理 1 **(Levi 逐项积分定理)** 设$\{f_n(x)\}$是 E 上的非负可测函数列，在 E 上满足

$$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x) \leqslant \cdots$$

则

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由于$\{f_n(x)\}$是递增的，所以存在 E 上的函数 $f(x)$ 使

$$f_n(x) \uparrow f(x) \quad (x \in E).$$

进而知 $f(x)$ 是非负可测函数，并且

$$G(E,f_n) \uparrow G(E,f).$$

诸 $G(E,f_n)$ 及 $G(E,f)$ 都是可测集，由测度的下连续性知

$$mG(E,f_n) \uparrow mG(E,f).$$

由积分的几何意义知

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \uparrow \int_E f(x)\mathrm{d}x. \blacksquare$$

Levi 定理的成立，实质上是 Lebesgue 可测集的全体对“可列并”运算的封闭性及 Lebesgue 测度的下连续性的反映. Jordan 测度也有下连续性，但是 Jordan 可测集的全体对“可列并”运算不封

闭. 下面的例 5・3・1 说明, 对 Riemann 积分来说, 与 Levi 定理相应的提法不成立.

例 5・3・1　设 $E=[0,1]$, E 中有理数的全体为 $\{r_1,r_2,r_3,\cdots\}$. 作 E 上的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in\{r_1,r_2,\cdots,r_n\} \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x\in E\setminus\{r_1,r_2,\cdots,r_n\} \text{ 时},\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots$$

显然 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的非负 R 可积函数列, 且在 E 上满足

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant f_3(x)\leqslant\cdots$$

但是 $\{f_n(x)\}$ 的极限函数(即 Dirichlet 函数) 在 E 上不是 R 可积的, 因此对于 $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ 来说极限号不能与积分号交换.

所有关于 L 积分的定理, 如果再进一步假设其所涉被积函数均 R 可积, 这时定理中的 L 积分又可看成 R 积分, 于是关于 L 积分的定理便还原为关于 R 积分的定理. 例如 Levi 定理可还原为: 若 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的非负 R 可积函数列, 在 $[a,b]$ 上 $f_n(x)\uparrow f(x)$ 且 $f(x)$ R 可积, 则

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(\mathrm{R})\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

读者不妨对 §5・3 的诸定理都考虑一下如此的还原. 这样就会得到普通数学分析教科书中未必有的许多关于 R 积分的逐项积分定理.

定理 2　**(Lebesgue 逐项积分定理)** 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 则

$$\int_E\Big(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\Big)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明　相应于每个自然数 k, 令

$$g_k(x)=\sum_{n=1}^{k}f_n(x),$$

则诸 $g_k(x)$ 在 E 上非负可测, 并且满足

$$g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant g_3(x) \leqslant \cdots$$

由定理 1,

$$\int_E \lim_{k\to\infty} g_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x.$$

而 $\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)$ 即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$,

$$\int_E g_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{k}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_E \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\Big)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

定理3 (Fatou引理) 设 $\{f_n(x)\}$ 是E上的非负可测函数列,则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证明 相应于每个自然数 n,令

$$g_n(x) = \inf_{k\geqslant n} f_k(x),$$

则

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x),$$

并且诸 $g_n(x)$ 在 E 上非负可测,满足

$$g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant g_3(x) \leqslant \cdots, g_n(x) \leqslant f_n(x).$$

由定理 1,

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x.$$

$$= \varliminf_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x. \ \blacksquare$$

下面的例5·3·2说明,定理3结论中的"$\leqslant$"号不能改为"$=$"号.

例 5·3·2 设 $E = (0,1)$, $f_n(x) = nx^{n-1} (n = 1,2,\cdots)$.

$f_n(x)$ 是 E 上的非负可测函数，

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = (\mathrm{R})\int_0^1 nx^{n-1}\mathrm{d}x = 1.$$

对任何 $x \in (0,1)$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nx^{n-1} = 0$. 因此

$$\int_E \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\mathrm{d}x = 0 < 1 = \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

5・3・2　可积函数列的逐项积分定理

定理 4　**(Vitali 逐项积分定理)** 设 $mE < \infty$，

(a) $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可积函数列，

(b) $f_n(x), n = 1,2,\cdots$ 的积分具有等度的绝对连续性，即对任意 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使当 $me < \delta(e \subset E)$ 时对于每个自然数 n 恒有

$$\left|\int_e f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

(c) 在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，

则 $f(x)$ 在 E 上可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　第一步证 $\displaystyle\int_E |f_m - f_n|\mathrm{d}x \to 0(m,n\to\infty)$.

任给 $\varepsilon > 0$，取 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2(mE+2)}$，由条件($b$) 知存在 $\delta_1 > 0$，使当 $me < \delta_1(e \subset E)$ 时恒有

$$\left|\int_e f_n\mathrm{d}x\right| < \varepsilon_1 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

记　$$E_n = E[\,|f_n - f| \geqslant \varepsilon_1],$$

由条件(c) 知存在自然数 N，使当 $n \geqslant N$ 时 $mE_n < \dfrac{\delta_1}{2}$.

记　$$E_{mn} = E[\,|f_m - f_n| \geqslant 2\varepsilon_1],$$

易知　$E_{mn} \subset E_m \cup E_n$，从而当 $m \geqslant N, n \geqslant N$ 时

$$mE_{mn} \leqslant mE_m + mE_n < \delta_1.$$

于是,当 $m \geqslant N, n \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}
\int_E |f_m - f_n| \mathrm{d}x &= \int_{E \setminus E_{mn}} |f_m - f_n| \mathrm{d}x + \int_{E_{mn}} |f_m - f_n| \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\varepsilon_1 \cdot m(E \setminus E_{mn}) + \int_{E_{mn}} |f_m| \mathrm{d}x + \int_{E_{mn}} |f_n| \mathrm{d}x \\
&\leqslant 2\varepsilon_1 mE + \left[\int_{E_{mn}[f_m \geqslant 0]} f_m \mathrm{d}x + \int_{E_{mn}[f_m < 0]} (-f_m) \mathrm{d}x\right] \\
&\quad + \left[\int_{E_{mn}[f_n \geqslant 0]} f_n \mathrm{d}x + \int_{E_{mn}[f_n < 0]} (-f_n) \mathrm{d}x\right] \\
&\leqslant 2\varepsilon_1 mE + (\varepsilon_1 + \varepsilon_1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_1) = 2\varepsilon_1 (mE + 2) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

第二步证 $\int_E |f_m - f| \mathrm{d}x \to 0 \ (m \to \infty)$.

由 Riesz 定理知 $\{f_n\}$ 存在子列 $\{f_{n_i}\}$ 使

$$\lim_{i \to \infty} f_{n_i}(x) = f(x), \qquad \text{a. e. 于 } E,$$

从而

$$\lim_{i \to \infty} |f_m(x) - f_{n_i}(x)| = |f_m(x) - f(x)|, \text{a. e. 于 } E.$$

对给定的 $\varepsilon > 0$,由第一步知存在自然数 N,使当 $m \geqslant N, n_i \geqslant N$ 时有 $\int_E |f_m - f_{n_i}| \mathrm{d}x < \varepsilon$. 于是,当 $m \geqslant N$ 时,根据 Fatou 引理,

$$\begin{aligned}
\int_E |f_m - f| \mathrm{d}x &= \int_E \lim_{i \to \infty} |f_m - f_{n_i}| \mathrm{d}x \\
&\leqslant \varliminf_{i \to \infty} \int_E |f_m - f_{n_i}| \mathrm{d}x \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

第三步.

$$\int_E |f| \mathrm{d}x \leqslant \int_E |f_m - f| \mathrm{d}x + \int_E |f_m| \mathrm{d}x.$$

由第二步及 $|f_m|$ 在 E 上可积知当 m 充分大时上式左边为有限数,所以 f 在 E 上可积.

$$\left|\int_E f_m \mathrm{d}x - \int_E f \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_E |f_m - f| \mathrm{d}x.$$

由第二步知当 $m \to \infty$ 时上式左端趋于 0，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n \mathrm{d}x = \int_E f \mathrm{d}x. \blacksquare$$

系 1 把定理 4 中的条件"在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$"改为"在 E 上 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$ 且 $|f(x)| \dot{<} \infty$"，仍然成立.

注 1 系 1 作为 L 积分的命题，其中的条件"$|f(x)| \dot{<} \infty$"可以去掉(其证明留作习题). §5·6 将推广系 1 成 L－S 积分的命题，推广后的命题中，条件"$|f(x)| \dot{<} \infty$"不能去掉(见 §5·6).

注 2 定理 4 及系 1 若去掉其中的条件"$mE < \infty$"便不再成立. 这从下面的例子即可看出：$E = [0, +\infty)$，在 E 上 $f(x) \equiv 0$，

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{当 } x \in [0,n] \text{ 时}, \\ 0, & \text{当} \in (n, +\infty) \text{ 时}, \end{cases} \qquad n = 1,2,\cdots$$

定理 5 (**Lebesgue 控制收敛定理**) 设 $mE < \infty$，

(a) $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，

(b) 存在 E 上的非负可积函数 $F(x)$，使

$$|f_n(x)| \leqslant F(x) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

(c) 在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$，

则 $f(x)$ 在 E 上可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由条件(b)，诸 $|f_n(x)|$ 可积，故诸 $f_n(x)$ 可积. 对 E 的任何可测子集 e，

$$\left|\int_e f_n \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_e |f_n| \mathrm{d}x \leqslant \int_e F \mathrm{d}x.$$

由 $F(x)$ 的积分具有绝对连续性知 $f_n(x)$，$n = 1,2,\cdots$ 的积分具有

等度的绝对连续性. 由 Vitali 定理知定理 5 成立. ▌

系 2 把定理 5 中的条件"在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$"改为"在 E 上 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$",仍然成立.

证明 在 E 上 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ 且 $f_n(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$, 故 $|f(x)| \leqslant F(x)$, a. e. 于 E. 在 E 上 $F(x)$ 几乎处处有限. 故诸 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 几乎处处有限. 由 §4·6 的 Lebesgue 定理知在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$. 由定理 5 即知系 2 成立. ▌

定理 5′ (Lebesgue 控制收敛定理) 把定理 5 中的条件"$mE < \infty$"去掉,仍然成立.

证明 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$,故诸 $f_n(x)$ 可积. $f_n(x) \Rightarrow f(x)$,由 Riesz 定理知存在子列 $f_{n_i}(x) \xrightarrow{\cdot} f(x)$,故 $|f(x)| \leqslant F(x)$a. e. , 所以 $f(x)$ 可积.

E 可表为可列个两两无交的测度有限的可测集 A_i 之并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. 记 $E_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$,由 §5·1 定理 6 知

$$\int_E F(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\infty}\int_{A_i} F(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_{E_k} F(x)\mathrm{d}x.$$

任给 $\varepsilon > 0$,由上式知存在自然数 k_0 使

$$\int_{E\setminus E_{k_0}} F(x)\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$ 及 $|f(x)| \leqslant F(x)$a. e. 知

$$\left|\int_{E\setminus E_{k_0}} f_n(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\int_{E\setminus E_{k_0}} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

$mE_{k_0} < \infty$,诸函数限制在 E_{k_0} 上满足定理 5 的条件,所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_{k_0}} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{E_{k_0}} f(x)\mathrm{d}x,$$

从而存在自然数 N,使当 $n \geqslant N$ 时

$$\left|\int_{E_{k_0}} f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{E_{k_0}} f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $n\geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}&\left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)\mathrm{d}x\right|\\=&\left|\int_{E_{k_0}} f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{E_{k_0}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{E\setminus E_{k_0}} f_n(x)\mathrm{d}x\right.\\&\left.-\int_{E\setminus E_{k_0}} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{E_{k_0}} f_n(x)\mathrm{d}x-\int_{E_{k_0}} f(x)\mathrm{d}x\right|\\&+\left|\int_{E\setminus E_{k_0}} f_n(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{E\setminus E_{k_0}} f(x)\mathrm{d}x\right|\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.\ \blacksquare$$

从定理 5′ 的证明及系 2 不难看出

系 2′　把系 2 中的条件“$mE<\infty$”去掉，仍然成立.

定理 6　(Lebesgue 有界收敛定理)　设 $mE<\infty$，若 $\{f_n(x)\}$ 是在 E 上一致有界的可测函数列，并且在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$，则 $f(x)$ 在 E 上可积，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　存在 $M\in R^1$ 使在 E 上 $|f_n(x)|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$. 在 E 上令 $F(x)\equiv M$，由 $mE<\infty$ 知 $F(x)$ 在 E 上可积. 由定理 5 知定理 6 成立. $\blacksquare$

系 3　把定理 6 中的条件“在 E 上 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$”改为“在 E 上 $f_n(x)\xrightarrow{\cdot} f(x)$”，仍然成立.

注　定理 6 及系 3 若去掉其中的条件“$mE<\infty$”便不再成立. 这从系 1 后面注 2 中的例子即可看出.

例 5·3·3 设 E 是可测集，函数 $f(x,t)$ 的定义域为 $\{(x,t)\mid x\in E,t\in[\alpha,\beta]\}$，若对任何固定的 $t\in[\alpha,\beta]$，$f(x,t)$ 作为 x 的函数在 E 上可积，对任何固定的 $x\in E$，$f(x,t)$ 作为 t 的函数在 $[\alpha,\beta]$ 上可微，并且存在 E 上的可积函数 $F(x)$ 使在 $E\times[\alpha,\beta]$ 上

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\right|\leqslant F(x),$$

则在 $[\alpha,\beta]$ 上

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_E f(x,t)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x.$$

证明 对固定的 $t\in[\alpha,\beta]$，任取数列 $\{h_n\}$ 使 $h_n\to 0,h_n\neq 0$，$t+h_n\in[\alpha,\beta]$(这是可以做到的). 由假设知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}=f_t'(x,t)\ (x\in E).$$

由微分中值定理知

$$\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}=f_t'(x,t+\theta_n h_n),$$

其中 θ_n(与 x 相关) 满足 $0<\theta_n<1$. 由于

$$|f_t'(x,t+\theta_n h_n)|\leqslant F(x)\ (x\in E),$$

由 Lebesgue 控制收敛定理的系知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\mathrm{d}x=\int_E f_t'(x,t)\mathrm{d}x.$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_E f(x,t)\mathrm{d}x=\int_E\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x.\ \blacksquare$$

§5·4 Fubini 定理

5·4·1 乘积空间中集合的截面

定义 1 设 $X\times Y$ 是乘积空间，E 是 $X\times Y$ 的一个子集. 相应于 $x_0\in X$，作 Y 的子集

$$\{y \mid y \in Y, (x_0, y) \in E\},$$

此子集称为 E 在 x_0 **处的截面**或 E **的** x_0 **－截面**，记作 E_{x_0}. 相应于 $y_0 \in Y$，X 的子集 $\{x \mid x \in X, (x, y_0) \in E\}$ 称为 E **在** y_0 **处的截面**或 E **的** y_0 **－截面**，记作 E^{y_0}.

设 $A, B, A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 $X \times Y$ 的子集. 若 $x \in X$，则

(i) 当 $A \subset B$ 时，$A_x \subset B_x$；

(ii) $(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)_x = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$；$(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n)_x = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (A_n)_x$；

(iii) $(A \backslash B)_x = A_x \backslash B_x$；

(iv) 当 $A_n \uparrow A$ 时，$(A_n)_x \uparrow A_x$；当 $A_n \downarrow A$ 时，$(A_n)_x \downarrow A_x$. 若 $y \in Y$，把上面的 x－截面换成 y－截面仍然成立.

5·4·2　R^p，R^q 与 R^{p+q} 中可测集间的关系

我们在 §3·6 已证明：若 A, B 分别为 R^p，R^q 中的可测集，则 $A \times B$ 为 $R^p \times R^q$ 中的可测集，并且 $m(A \times B) = mA \times mB$. 现在来看：如果 E 为 $R^p \times R^q$ 中的可测集，E 在 $x \in R^p$ 处的截面 E_x 是否可测集？如果是可测集，E 与 E_x 的测度间有何关系？

定理 1　若 E 是 $R^p \times R^q$ 中的可测集，则

(i) 对几乎所有 $x \in R^p$，E_x 是 R^q 中可测集；

(ii) 在 R^p 上几乎处处有定义的函数 $f(x) = mE_x$ 是非负可测函数；

(iii) 下面的关系式成立

$$mE = \int_{R^p} mE_x \mathrm{d}x.$$

证明　(1°) 设 E 为半开区间.

这时有分别含于 R^p，R^q 的半开区间 I^p，I^q 使 $E = I^q \times I^q$. 当 $x \in I^p$ 时 $E_x = I^q$，$mE_x = mI^q$；当 $x \in R^p \backslash I^p$ 时 $E_x = \varnothing$，$mE_x = 0$. 所以定理的结论 (*i*)，(*ii*) 成立，由积分的定义，

$$\int_{R^p} mE_x \mathrm{d}x = \int_{I^p} mE_x \mathrm{d}x = mI^p \times mI^q = mE.$$

(2°) 设 E 为有界开集.

这时 E 可表为可列个两两无交的半开区间 I_n 之并：$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. 当 $x \in R^p$ 时 $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty}(I_n)_x$，由(1°)知诸$(I_n)_x$是可测集，故 E_x 是可测集并且

$$mE_x = \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)_x,$$

由(1°)知诸 $m(I_n)_x$ 是R^p 上的非负可测函数，故 $f(x) = mE_x$ 是 R^p 上的非负可测函数，根据 Lebesgue 逐项积分定理，

$$\int_{R^p} mE_x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^p} m(I_n)_x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} mI_n = mE.$$

由 $mE < \infty$ 还知 $f(x) = mE_x$ 是R^p 上的可积函数.

(3°) 设 E 为有界G_δ 型集.

这时 E 可表为一个渐缩有界开集列$\{G_n\}$ 的极限:$G_n \downarrow E$. 当 $x \in R^p$ 时$(G_n)_x \downarrow E_x$，由(2°)知诸$(G_n)_x$ 是可测集，故 E_x 是可测集并且

$$m(G_n)_x \downarrow mE_x \geqslant 0,$$

由(2°)知诸$m(G_n)_x$是R^p 上的可积函数，故 $f(x) = mE_x$ 是R^p 上的可积函数，根据 Lebesgue 控制收敛定理的系，

$$\int_{R^p} mE_x \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{R^p} m(G_n)_x \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} mG_n = mE.$$

(4°) 设 E 为有界 F_σ 型集.

这时存在开区间 $I \supset E$，令 $G = I\setminus E$，则 G 是包含于 I 的有界 G_δ 型集，$E = I\setminus G$. 当 $x \in R^p$ 时 $E_x = I_x\setminus G_x$，由(2°)，(3°)知 I_x，G_x 都是可测集，故 E_x 是可测集并且

$$mE_x = mI_x - mG_x,$$

由(2°)，(3°)知 mI_x，mG_x 都是R^p 上的可积函数，故 $f(x) = mE_x$ 是R^p 上的可积函数，由可积函数积分的线性性质，

$$\int_{R^p} mE_x \mathrm{d}x = \int_{R^p} mI_x \mathrm{d}x - \int_{R^p} mG_x \mathrm{d}x = mI - mG = mE.$$

(5°) 设 E 为有界可测集.

这时存在 $R^p \times R^q$ 中的有界 G_δ 型集 G 及有界 F_σ 型集 F 使

$$G \supset E \supset F, \quad mG = mE = mF.$$

当 $x \in R^p$ 时

$$G_x \supset E_x \supset F_x, \quad mG_x \geqslant m^* E_x \geqslant m_* E_x \geqslant mF_x.$$

由(3°),(4°) 知 mG_x, mF_x 都是 R^p 上的可积函数,故

$$\int_{R^p} (mG_x - mF_x) \mathrm{d}x = \int_{R^p} mG_x \mathrm{d}x - \int_{R^p} mF_x \mathrm{d}x$$
$$= mG - mF = 0.$$

于是非负函数 $mG_x - mF_x$ 在 R^p 上几乎处处等于 0,从而对几乎所有 $x \in R^p$ 有 $mG_x = m^* E_x = m_* E_x = mF_x$,因此对几乎所有 $x \in R^p$ 截面 E_x 是可测集并且

$$mE_x = mG_x,$$

由(3°) 知 mG_x 是 R^p 上的可积函数,故 $f(x) = mE_x$ 是 R^p 上几乎处处有定义的可积函数(在有定义的点上函数值显然是非负的),并且

$$\int_{R^p} mE_x \mathrm{d}x = \int_{R^p} mG_x \mathrm{d}x = mG = mE.$$

(6°) 设 E 为任意可测集.

这时 E 可表为可列个两两无交的有界可测集 E_n 之并:

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. 当 $x \in R^p$ 时 $E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x$,由(5°) 知对几乎所有 $x \in R^p$,截面 $(E_n)_x$ 是可测集,故对几乎所有 $x \in R^p$,截面 E_x 是可测集并且

$$mE_x = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)_x,$$

由(5°) 知诸 $m(E_n)_x$ 是 R^p 上几乎处处有定义的非负可积函数,故

$f(x)=mE_x$ 是 R^p 上几乎处处有定义的非负可测函数，根据 Lebesgue 逐项积分定理，

$$\int_{R^p} mE_x \mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{R^p} m(E_n)_x \mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} mE_n=mE. \blacksquare$$

注 把定理 1 中的"$R^p\times R^q$"改为 $R^q\times R^p$"，并且把"E_x"改为"E^x"(其他均不改变)，仍然成立.

系 1 (i) 设 E 为 R^N 中的可测集，$f(x)$ 是 E 上的非负函数，若 $f(x)$ 的下方图 $G(E,f)$ 是 R^{N+1} 中的可测集，则 $f(x)$ 是 E 上的非负可测函数.

(ii) 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数，若 $f(x)$ 的正、负部的下方图 $G(E,f^+)$，$G(E,f^-)$ 都是可测集，则 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

证明 (i) 第一步证对几乎所有 $a\in[0,+\infty)$，$E[f>a]$ 可测：因为 $G(E,f)$ 是 $R^N\times R^1$ 中可测集，由定理 1 及后面的注知，对几乎所有 $a\in[0,+\infty)$，$G(E,f)$ 在 a 处的截面 $[G(E,f)]^a$ 是 R^N 中的可测集. 由于

$$\begin{aligned}[G(E,f)]^a&=\{x\mid x\in R^N,(x,a)\in G(E,f)\}\\&=\{x\mid x\in E,\ 0\leqslant a<f(x)\}\\&=E[f>a],\end{aligned}$$

第一步得证.

第二步证对所有 $a\in[0,+\infty)$，$E[f>a]$ 可测：由第一步知，存在零集 $N\subset[0,+\infty)$，使对所有 $b\in[0,+\infty)\setminus N$，$E[f>b]$ 可测. 对任意 $a\in N$，必可取点列 $\{b_n\}\subset[0,+\infty)\setminus N$ 使 $b_n\downarrow a$(事实上，对每个 $n\in\mathbf{N}$，$(a,a+\frac{1}{n})$ 中总有不属于 N 的点，取其一作为 b_n 且注意做到 $b_n\downarrow$ 即可). 此时 $E[f>b_n]\uparrow E[f>a]$，由 $E[f>b_n]$ 可测知 $E[f>a]$ 可测. 第二步得证.

第三步. 对所有 $a\in(-\infty,0)$，$E[f>a]=E$，E 可测. 总之对任 $a\in R^1$，$E[f>a]$ 可测. 所以 $f(x)$ 在 E 上可测.

(ii) 由 (i) 立即得证. ▌

5・4・3 Fubini 定理

在数学分析中,对于 Riemann 积分我们讨论过重积分与累次积分的关系. 若 $f(x,y)$ 在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上连续,则

$$(\mathrm{R})\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{R})\int_a^b \mathrm{d}x\left((\mathrm{R})\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right).$$

在 §5・4 中 5・4・3 我们来对 Lebesgue 积分建立相应的定理.

设 $f(P)=f(x,y)$ 是 $R^{p+q}=R^p\times R^q$ 上的函数(这样说意味着 $x\in R^p, y\in R^q$). 对固定的 $x_0\in R^p$, $f(x_0,y)$ 是 R^q 上关于自变元 y 的函数,此函数称为 $f(x,y)$ 的 x_0 — **函数截面**,记作 $f_{x_0}(y)$. 类似地,对固定的 $y_0\in R^q$, R^p 上的函数 $f(x,y_0)$ 称为 $f(x,y)$ 的 y_0 — **函数截面**,记作 $f^{y_0}(x)$.

设 $f(x,y)$ 是 $R^p\times R^q$ 上的非负函数,则 $f(x,y)$ 的下方图 $G=G(R^p\times R^q,f)$ 是 $R^p\times R^q\times R^1$ 中的点集. 对任意 $x_0\in R^p$, G 的 x_0 — 截面 G_{x_0} 是 $R^q\times R^1$ 中的点集,

$$\begin{aligned}G_{x_0}&=\{(y,z)\,|\,(x_0,y,z)\in G(R^p\times R^q,f)\}\\&=\{(y,z)\,|\,y\in R^q,0\leqslant z<f_{x_0}(y)\},\end{aligned}$$

所以 G_{x_0} 恰是 R^q 上的函数 $f_{x_0}(y)$ 的下方图. 也就是说,非负函数 $f(x,y)$ 的下方图的 x_0 — 截面恰是其 x_0 — 函数截面的下方图.

定理 2　设 $f(x,y)=f(P)$ 是 $R^q\times R^q=R^{p+q}$ 上的非负可测函数,则

(i) 对几乎所有 $x\in R^p$, $f_x(y)=f(x,y)$ 是 R^q 上的非负可测函数;

(ii) 在 R^p 上几乎处处有定义的函数

$$g(x)=\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$

是非负可测函数;

(iii) 下面的关系式成立

$$\int_{R^{p+q}} f(P)\mathrm{d}P = \int_{R^p} \mathrm{d}x \int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证明 $f(P)$ 在 R^{p+q} 上非负可测,故下方图 G 是 R^{p+q+1} 中的可测集.

(i) 由定理 1 知对几乎所有 $x \in R^p$,截面 G_x 是 R^{q+1} 中可测集,而 G_x 是 $f_x(y)$ 的下方图,于是由系 1(i) 知,对几乎所有 $x \in R^p$,$f_x(y)$ 是 R^q 上的非负可测函数,

$$\int_{R^q} f_x(y)\mathrm{d}y = mG_x. \qquad (5 \cdot 4 \cdot 1)$$

(ii) 由定理 1 知 mG_x 是 R^p 上几乎处处有定义的非负可测函数,从而由(5・4・1)知

$$g(x) = \int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$

是 R^p 上几乎处处有定义的非负可测函数.

(iii) 由定理 1 知

$$mG = \int_{R^p} mG_x \mathrm{d}x,$$

从而由 $f(P)$ 的积分的几何意义及(5・4・1)知

$$\int_{R^{p+q}} f(P)\mathrm{d}P = \int_{R^p} \mathrm{d}x \int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y. \ ▌$$

系 2 若 $f(x,y)$ 是 $R^p \times R^q$ 上的非负可测函数,则

$$\int_{R^p} \mathrm{d}x \int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{R^q} \mathrm{d}y \int_{R^p} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

定理 3 (**Fubini 定理**) 设 $f(x,y) = f(P)$ 是 $R^p \times R^q = R^{p+q}$ 上的可积函数,则

(i) 对几乎所有 $x \in R^p$,$f_x(y) = f(x,y)$ 是 R^q 上的可积函数;

(ii) 在 R^p 上几乎处处有定义的函数

$$g(x) = \int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$

是可积函数；

(iii) 下面的关系式成立

$$\int_{R^{p+q}} f(P)\mathrm{d}P=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

证明　第一步先看 $f(x,y)$ 是 $R^p\times R^q$ 上非负可积函数的情况.

由于 $f(x,y)$ 在 $R^p\times R^q$ 上非负可测，根据定理 2，

$$\int_{R^{p+q}} f(P)\mathrm{d}P=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y. \qquad (5\cdot4\cdot2)$$

由于$(5\cdot4\cdot2)$式左边为有限数，所以

$$g(x)=\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y$$

是 R^p 上几乎处处有定义的可积函数.

由 §5·1 定理 8 知对几乎所有 $x\in R^p$，$g(x)$ 为有限数，而 $g(x)$ 为有限数时 $f_x(y)=f(x,y)$ 是 R^q 上的可积函数.

第二步再看 $f(x,y)$ 是 $R^p\times R^q$ 上一般可积函数的情况.

这时 $f^+(P)=f^+(x,y)$，$f^-(P)=f^-(x,y)$ 是非负可积函数. 由第一步，对于 $f^+(x,y)$，$f^-(x,y)$ 来说定理 3 的结论 (i)，(ii)，(iii) 均成立. 由此可知

(i) 对几乎所有 $x\in R^p$，

$$f_x(y)=f(x,y)=f^+(x,y)-f^-(x,y)$$

是 R^q 上的可积函数；

(ii) $g(x)=\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{R^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y-\int_{R^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y$ 是 R^p 上几乎处处有定义的可积函数；

(iii) 根据可积函数积分的线性性质，

$$\begin{aligned}\int_{R^{p+q}} f(P)\mathrm{d}P&=\int_{R^{p+q}} f^+(P)\mathrm{d}P-\int_{R^{p+q}} f^-(P)\mathrm{d}P\\&=\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y-\int_{R^p}\mathrm{d}x\int_{R^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \int_{R^q} dx \int_{R^p} f(x,y) dy. \ \blacksquare$$

系 3　若 $f(x,y)$ 是 $R^p \times R^q$ 上的可积函数,则

$$\int_{R^p} dx \int_{R^q} f(x,y) dy = \int_{R^q} dy \int_{R^p} f(x,y) dx. \tag{5·4·3}$$

注意,当 $f(x,y)$ 是 $R^p \times R^q$ 上的可测函数时,仅知(5·4·3)式两边的累次积分都有意义不能保证(5·4·3)式成立.

例 5·4·1　设 $E = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{当}(x,y) \in E \text{ 时}, \\ 0, & \text{当}(x,y) \in R^2 \backslash E \text{ 时}. \end{cases}$$

经计算可知

$$\int_{R^1} dx \int_{R^1} f(x,y) dy = \frac{\pi}{4},$$

$$\int_{R^1} dy \int_{R^1} f(x,y) dx = -\frac{\pi}{4}.$$

§5·5　p 幂可积函数

p 幂可积函数是一类很重要的函数.本节仅讨论它的某些方面,其他方面的讨论留到 §7·2 及 §11·1 进行.

本节始终假设 p 是一个给定的不小于 1 的实数.

5·5·1　p 幂可积函数

定义 1　若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数,并且 $|f(x)|^p$ 在 E 上可积,就称 $f(x)$ 是 E 上的 **p 幂可积函数**.

显然 E 上的 p 幂可积函数在 E 上几乎处处取有限值.

命题 1　若 $f(x)$ 是 E 上的 p 幂可积函数,则当 $mE < \infty$ 时 $f(x)$ 是 E 上的可积函数.

证明　当 $x \in E[|f| \geqslant 1]$ 时 $|f(x)| \leqslant |f(x)|^p$，由 $|f(x)|^p$ 在 $E[|f| \geqslant 1]$ 上可积知 $f(x)$ 在 $E[|f| \geqslant 1]$ 可积. $mE[|f| < 1] < \infty$，$f(x)$ 在 $E[|f| < 1]$ 上有界可测，故在其上可积. 所以 $f(x)$ 在 E 上可积. ▌

引理 1　设 $x, y \in R^1$，则

$$|x+y|^p \leqslant 2^p(|x|^p + |y|^p).$$

证明

$$\begin{aligned}|x+y|^p &\leqslant (2\max\{|x|,|y|\})^p \\ &= 2^p \max\{|x|^p,|y|^p\} \leqslant 2^p(|x|^p + |y|^p).\end{aligned}$$ ▌

命题 2　若 $f(x), g(x)$ 是 E 上的 p 幂可积函数，$a, b \in R^1$，则 $af(x) + bg(x)$ 也是 E 上的 p 幂可积函数.

证明　$af(x) + bg(x)$ 是在 E 上几乎处处有定义的可测函数，$|af(x)+bg(x)|^p \leqslant 2^p(|a|^p|f(x)|^p + |b|^p|g(x)|^p)$，a. e. 于 E，所以命题 2 成立. ▌

5·5·2　p 幂平均收敛

定义 2　设 $f_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是 E 上的 p 幂可积函数. 若

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0,$$

就称在 E 上 $\{f_n(x)\}$ **p 幂平均收敛于** $f(x)$.

我们来看 p 幂平均收敛与依测度收敛的关系.

定理 1　若在 E 上 $\{f_n(x)\}$ p 幂平均收敛于 $f(x)$，则在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

证明　对任意 $\varepsilon > 0$，

$$\begin{aligned}\int_E |f_n - f|^p \mathrm{d}x &\geqslant \int_{E[|f_n - f| \geqslant \varepsilon]} |f_n - f|^p \mathrm{d}x \\ &\geqslant \varepsilon^p mE[|f_n - f| \geqslant \varepsilon].\end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时上式前端趋于 0，故 $mE[|f_n - f| \geqslant \varepsilon] \to 0$. 所以在 E

上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$. ▌

下面的例 1 说明定理 1 的逆命题不成立.

例 5·5·1 设 $E=(0,1]$

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2, & \text{当 } x\in\left(0,\dfrac{1}{n}\right) \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x\in\left[\dfrac{1}{n},1\right] \text{时}, \end{cases} \qquad (n=1,2,\cdots),$$

$f(x)\equiv 0$. 显然 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上处处收敛于 $f(x)$，因而 $f_n(x)\Rightarrow f(x)$. 诸 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 是 E 上的 p 幂可积函数,但当 $n\to\infty$ 时

$$\int_E |f_n-f|^p\,\mathrm{d}x = n^{2p-1}\to\infty.$$

上面的例 5·5·1 及下面的例 5·5·2 说明 p 幂平均收敛与几乎处处收敛这两个概念是互不包含的.

例 5·5·2 设 $E=(0,1]$, $\{f_n(x)\}$ 是 §4·6 例 4·6·2 中所作的函数列(4·6·1), $f(x)\equiv 0$. 显然诸 $f_n(x)$ 及 $f(x)$ 是 E 上的 p 幂可积函数,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n-f|^p\,\mathrm{d}x = 0,$$

但 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上处处不收敛.

下面我们来讨论在 p 幂可积函数类中以特殊函数“p 幂平均逼近”一般函数的问题.

引理 2 若 $f(x)$ 是 E 上的 p 幂可积函数,则存在一列 E 上的有界可测函数 $\{f_n(x)\}$,使在 E 上 $\{f_n(x)\}$ p 幂平均收敛于 $f(x)$.

证明 相应于每个自然数 n,作函数

$$f_n(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } x\in E[\,|f|<n\,] \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x\in E[\,|f|\geqslant n\,] \text{ 时}. \end{cases}$$

显然对每个 $x\in E[\,|f|<\infty\,]$, $f_n(x)\to f(x)$ $(n\to\infty)$.

又 $mE[\,|f|=\infty\,]=0$, 故 $f_n(x)-f(x)\to 0$ a.e. 于 E,

从而 $$|f_n(x)-f(x)|^p \to 0 \quad \text{a.e. 于 } E.$$

显然 $$|f_n(x)-f(x)|^p \leqslant |f(x)|^p,$$

由 Lebesgue 控制收敛定理的系即知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n-f|^p \mathrm{d}x = 0. \blacksquare$$

定理 2　若 $f(x)$ 是 E 上的 p 幂可积函数，则存在一列 R^N 上的连续函数 $\{g_n(x)\}$，使在 E 上 $\{g_n(x)\}$ p 幂平均收敛于 $f(x)$.

证明　我们只需证：对任意 $\varepsilon > 0$，恒存在 R^N 上的连续函数 $g(x)$，使

$$\int_E |f-g|^p \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

由引理 1 知存在 E 上的有界可测函数 $\hat{f}(x)$ 使

$$\int_E |f-\hat{f}|^p \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}.$$

自然可取一正实数 M 使在 E 上 $|\hat{f}(x)| \leqslant M$.

由 §4·7 定理 3 及其后面的注知，存在 R^N 上的连续函数 $g(x)$ 及 E 的可测子集 E_1 使

(i) $m(E\setminus E_1) < \dfrac{\varepsilon}{2^{2p+1}M^p}$,

(ii) 在 E_1 上 $g(x) = \hat{f}(x)$,

(iii) 在 R^N 上 $|g(x)| \leqslant M$.

于是

$$\int_E |\hat{f}-g|^p \mathrm{d}x = \int_{E\setminus E_1} |\hat{f}-g|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_{E\setminus E_1} (2M)^p \mathrm{d}x$$
$$= (2M)^p \cdot m(E\setminus E_1) < \frac{\varepsilon}{2^{p+1}}.$$

由于在 E 上几乎处处有

$$|f(x)-g(x)|^p \leqslant 2^p(|f(x)-\hat{f}(x)|^p + |\hat{f}(x)-g(x)|^p),$$

所以

$$\int_E |f-g|^p \mathrm{d}x \leqslant 2^p\left(\int_E |f-\hat{f}|^p \mathrm{d}x+\int_E |\hat{f}-g|^p \mathrm{d}x\right)$$
$$<2^p\left(\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}+\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}\right)=\varepsilon. \blacksquare$$

定理 3 若 $f(x)$ 是闭区间$[a,b]$上的 p 幂可积函数,则存在一列多项式$\{p_n(x)\}$,使在$[a,b]$上$\{p_n(x)\}$ p 幂平均收敛于 $f(x)$.

根据定理 2 及 Weierstrass 多项式逼近定理不难证明定理 3(留作习题).

＊§5·6 Lebesgue－Stieltjes 积分·抽象可测函数的积分

5·6·1 L－S 可测函数及 L－S 积分

§4·7已经建立了R^N中关于分布函数$\alpha(x)$的L－S可测集(即α－可测集)以及L－S测度m_α的概念.这里§5·6中5·6·1的讨论建筑在§4·7的基础之上.

定义 1 设 $f(x)$ 是α－可测集 E 上的函数.若对于任何实数 a,点集 $E[f>a]$ 都是α－可测集,就称 $f(x)$ 是 E 上**关于$\alpha(x)$的 L－S 可测函数**,简称 E 上的**α－可测函数**.

把§4·3定义1中的"可测"改为"α－可测",便得到E上**α－简单函数**的定义.

第四章中其他定义以及所有定理、命题、系都可以推广到α－可测函数上来.一般只需把原表述(包括证明)中的"m^*","m","可测"改成"m_α^*","m_α""α－可测"就可以了,需要特别注意的是:§4·3中4·3·3的几个结论,还要把原表述(包括证明)中"下方图是R^{N+1}中L可测集"的提法改成"下方图是$R^N\times R^1$中关于分布函数$\alpha(x)\cdot z((x,z)\in R^N\times R^1)$的L－S可测集".

定义 2　设 $\varphi(x)$ 是 E 上的非负 α－简单函数，$\varphi(x)$ 的标准初等分解为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot\chi_{e_i}(x),$$

我们把和数 $\sum_{i=1}^{n}c_i m_\alpha e_i$ 称为 $\varphi(x)$ 在 E 上关于 $\alpha(x)$ 的 **L－S 的积分**，简称 $\varphi(x)$ 在 E 上的 **α－积分**，记作 $\int_E\varphi(x)\mathrm{d}\alpha(x)$（或 $\int_E\varphi\mathrm{d}\alpha$）. 当此积分为有限数时，称 $\varphi(x)$ 在 E 上关于 $\alpha(x)$ **L－S 可积**，简称 $\varphi(x)$ 在 E 上 **α－可积**.

把 §5·1 定义 2 及定义 3 中的"可测"、"积分"、"可积"改成"α－可测"、"α－积分"、"α－可积"，并把积分记号中的 $\mathrm{d}x$ 改成 $\mathrm{d}\alpha(x)$，便得到（非负、一般）α－可测函数 $f(x)$ 在 E 上关于 $\alpha(x)$ 的 **L－S 积分**以及**关于 $\alpha(x)$ L－S 可积**的定义.

本章 §5·1、§5·3 所述的积分诸性质都可以推广到关于 $\alpha(x)$ 的 L－S 积分上来. 一般只需把原表述（包括证明）中的符号和术语（"m"、"积分"等）加上"α"的标记（改为"m_α"，"α－积分"等）即可，需要特别注意的是：凡涉及下方图的测度之处，要把"下方图（作为 R^{N+1} 中的 L 可测集）的 L 测度"的提法改为"下方图（作为 $R^N\times R^1$ 中关于 $(\alpha\times\beta)(x,z)\equiv\alpha(x)\cdot z$ 的 L－S 可测集）的 $\alpha\times\beta$－测度".

相应于 §5·4 的定理，这里有下面的两个定理.

定理 1　设 $\alpha(x)$，$\beta(y)$ 分别是 R^p，R^q 上的分布函数，记 $R^p\times R^q$ 上的函数 $\alpha(x)\cdot\beta(y)$ 为 $(\alpha\times\beta)(x,y)$. 若 E 是 $R^p\times R^q$ 中的 $\alpha\times\beta$－可测集，则

$$m_{\alpha\times\beta}E=\int_{R^p}m_\beta E_x\,\mathrm{d}\alpha(x).$$

定理 2　设 $\alpha(x)$、$\beta(y)$ 分别是 R^p、R^q 上的分布函数，记 $R^p\times R^q$ 上的函数 $\alpha(x)\cdot\beta(y)$ 为 $(\alpha\times\beta)(x,y)$. 若 $f(x,y)$ 是 $R^p\times R^q$ 上的非负 $\alpha\times\beta$－

可测函数(或 $R^p \times R^q$ 上的 $\alpha\times\beta-$可积函数),则

$$\int_{R^p\times R^q} f(x,y)\mathrm{d}(\alpha\times\beta)(x,y) = \int_{R^p}\mathrm{d}\alpha\ (x)\int_{R^q} f(x,y)\mathrm{d}\beta(y).$$

此二定理的证明与 §5·4 相应的定理类似.

5·6·2 抽象可测函数及其积分

这里 §5·6·2 的讨论建筑在 §4·8 抽象测度理论的基础之上.

定义 3 设 (X,S) 是可测空间,$E\in\mathrm{S}$,$f(x)$ 是 E 上的函数. 若对于任何实数 a,集合 $E[f>a]$ 都是 (X,S) 中的可测集(即 $E[f>a]\in\mathrm{S}$),就称 $f(x)$ 是 **E 上关于 S 的可测函数**.

把 §4·3 定义 1 的表述在可测空间 (X,S) 的意义下来解释(即把可测集解释为属于 S 的集),便得到 **E 上关于 S 的简单函数**的定义.

§4·2、§4·3 的诸定理、命题、系以及 §4·4 的定理 1,2,3 都可以推广到上述关于 S 的可测函数上来. 一般只需把原表述(包括证明)在 (X,S) 的意义下来解释就可以了,需要特别注意的是: §4·3 中 4·3·3 的几个结论,还要把原表述(包括证明)中“下方图是 R^{N+1} 中 L 可测集”的提法改成“下方图是乘积可测空间 $(X\times R^1,\mathrm{S}\times\mathrm{L})$ 中的可测集(其中 L 是 R^1 中的 Lebesgue 可测集类)”.

设 (X,S) 是可测空间,μ 是 S 上的一个完全测度. 此时,§4·4 定理 4、§4·5 Egoroff 定理以及 §4·6 依测度收敛的定义和结论都可以推广到关于 S 的可测函数上来. 这只需把原表述(包括证明)中的 m 改成 μ,并在 (X,S,μ) 的意义下来解释即可.

定义 4 设 (X,S,μ) 是测度空间,$E\in\mathrm{S}$,$\varphi(x)$ 是 E 上关于 S 的非负简单函数,$\varphi(x)$ 的标准初等分解为

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\cdot\chi_{e_i}(x),$$

我们把和数 $\sum_{i=1}^{n} c_i\mu(e_i)$ 称为 $\varphi(x)$ 在 E 上**关于测度 μ 的积分**,记作

$\int_E \varphi(x)\mathrm{d}\mu$（或$\int_E \varphi\mathrm{d}\mu$）. 当此积分为有限数时，称 $\varphi(x)$ 在 E 上关于**测度 μ 可积**.

把 §5·1 定义 2 及定义 3 的表述在测度空间(X,S,μ)的意义下来解释（积分记号中的 $\mathrm{d}x$ 改为 $\mathrm{d}\,\mu$），便得到关于 S 的（非负、一般）可测函数 $f(x)$ 在 E 上**关于测度 μ 的积分**以及**关于测度 μ 可积**的定义.

设(X,S,μ)是全 σ—有限的完全测度空间. 此时，§5·1、§5·3 所述的积分诸性质都可以推广到上述(X,S,μ)意义下的积分上来，一般只需把原表述（包括证明）中的 $\mathrm{d}x$ 改为 $\mathrm{d}\mu$ 并在(X,S,μ)的意义下来解释即可，需要特别注意的是：凡涉及下方图的测度之处，要把“下方图（作为 R^{N+1} 中的 L 可测集）的 L 测度”的提法改成“下方图（作为乘积测度空间$(X\times R^1,\mathsf{S}\times\mathsf{L},\mu\times m)$中的可测集）的 $\mu\times m$ 测度”.

相应于 §5·4 的定理，这里有下面的两个定理.

定理 3　设(X,S,μ)，(Y,T,ν)是两个全 σ—有限的完全测度空间，它们的完全乘积测度空间为$(X\times Y,\widehat{\mathsf{S}\times\mathsf{T}},\widehat{\mu\times\nu})$. 若 $E\in\widehat{\mathsf{S}\times\mathsf{T}}$，则

$$\widehat{\mu\times\nu}(E)=\int_X \nu(E_x)\mathrm{d}\mu.$$

这个定理的证明很繁琐，我们就略去了.

定理 4　设(X,S,μ)、(Y,T,ν)及$(X\times Y,\widehat{\mathsf{S}\times\mathsf{T}},\widehat{\mu\times\nu})$的意义如定理 3. 若 $f(x,y)$ 是 $X\times Y$ 上关于$\widehat{\mathsf{S}\times\mathsf{T}}$的非负可测函数（或 $X\times Y$ 上关于$\widehat{\mu\times\nu}$的可积函数），则

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\mathrm{d}(\widehat{\mu\times\nu})=\int_X \mathrm{d}\mu\int_Y f(x,y)\mathrm{d}\nu.$$

这个定理的证明类似于 §5·4 定理 2（定理 3）.

习 题 五

1. 若 $mE<\infty$，$f(x)$ 是 E 上的有界可测函数,则 $f(x)$ 在 E 上可积.

2. 设 $mE<\infty$，$f(x)$ 是 E 上的可测函数,且在 E 上 $b<f(x)<B$(b,B 是二实常数). 作$[b,B]$ 的划分

$$T: b=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=B,$$

记 $d(T)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(y_k-y_{k-1})$，$E_k=E[y_{k-1}\leqslant f<y_k]$. 任取 $\xi_k\in[y_{k-1},y_k]$，作和数

$$S(T,f)=\sum_{k=1}^{n}\xi_k\cdot mE_k.$$

证明 $\lim\limits_{d(T)\to 0}S(T,f)=\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

3. 设 $mE<\infty$，$f(x)$ 是 E 上的可测函数,证明 $f(x)$ 在 E 上可积的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}mE[|f|\geqslant n]<\infty$. 问 $mE=\infty$ 时此命题是否成立?

4. 设 $f(x)$ 在 E 上可积. 若对于 E 上的任何有界可测函数 $g(x)$ 都有

$$\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x=0,$$

则 $f(x)=0$，a. e. 于 E.

5. 设 $mE<\infty$，$f(x)$ 在 E 上可积. 若 $E_n\subset E(n=1,2,\cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty}mE_n=mE$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

6. 把上题中的"$f(x)$ 在 E 上可积"改为"$f(x)$ 在 E 上有积分",还成立吗?

7. 设 $f(x)$ 在 E 上可积，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot mE[|f|\geqslant n]=0$.

8. 设 $f(x)$ 是 E 上有积分的函数，并且对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $me<\delta(e\subset E)$ 时恒有 $\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$（即 $f(x)$ 的积分具有绝对连续性）. 证明当 $mE<\infty$ 时 $f(x)$ 必为 E 上的可积函数. 问当 $mE=\infty$ 时如何？

9. 设 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是 $[0,1]$ 的可测子集，$[0,1]$ 的每个点都至少属于这 n 个子集中的 p 个. 证明 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 中至少有一个其测度不小于 $\dfrac{p}{n}$.

10. 设 $E=[a,b]$，$f(x)$ 在 E 上可积，α 是一个常数，$0<\alpha<mE$. 若对 E 的每个测度等于 α 的子集 A 恒有 $\int_A f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $f(x)=0$，a. e. 于 E.

11. 设 $f(x)$ 是在 $[a,b]$ 上处处取正值的可积函数，常数 q 满足 $0<q\leqslant b-a$. 记 $M=\{e\,|\,e\subset[a,b],me\geqslant q\}$. 证明

$$\inf_{e\in M}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}>0.$$

12. 利用 Lebesgue 积分的性质证明：若 $f(x)$ 是在 $[a,b]$（$a<b$）上处处取正值的 Riemann 可积函数，则

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

如果不利用实变函数论中的结论，如何证明？

13. 一致收敛的 R 可积函数列，其极限函数也 R 可积.

14. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界函数，则 $f(x)$ 的不连续点的全体是 F_σ 型集.

15. 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积，$g([a,b])\subset[\alpha,\beta]$，$f(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，证明 $f(g(x))$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积. 若 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g([a,b])\subset[\alpha,\beta]$，$f(y)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 R 可积，此时 $f(g(x))$

在$[a,b]$上未必 R 可积. 试举例说明之.

16. 若 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可积且一致连续,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

17. 试从$\dfrac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+(x^4-x^5)+\cdots(0<x<1)$,推证 $\ln 2=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots$

18. 利用逐项积分定理计算

$$\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x.$$

19. 设$\{f_n(x)\}$是 E 上的可积函数列,在 E 上

$$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant f_3(x)\geqslant\cdots$$

若

$$\inf_n\int_E f_n\mathrm{d}x>-\infty,$$

则$\{f_n(x)\}$必在 E 上处处收敛于一个可积函数 $f(x)$,并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}x=\int_E f\mathrm{d}x.$$

20. 若 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 在 E 上非负可测并且 $f_n(x)\downarrow f(x)$,问是否 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$?

21. 设$\{f_n(x)\}$是 E 上的可测函数列. 若

$$\int_E|f_n|\mathrm{d}x<\frac{1}{2^n}\ (n=1,2,\cdots),$$

则存在 E 上的可积函数 $f(x)$,使

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f(x),\text{a.e. 于 }E.$$

22. 设 $f(x)$ 在 E 上有积分,相应于每个自然数 n 作 E 上的函数

$$[f(x)]_n=\begin{cases}f(x), & \text{当 } x\in E[|f|<n] \text{ 时},\\ n, & \text{当 } x\in E[f\geqslant n] \text{ 时},\\ -n, & \text{当 } x\in E[f\leqslant -n] \text{ 时},\end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E [f(x)]_n \mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$

23. 设 $f(x)$ 在 E 上有积分，令

$$R_n = \{(x_1,x_2,\cdots,x_N) \mid -n \leqslant x_n \leqslant n,\ i = 1,2,\cdots,N\}$$
$$(n = 1,2,\cdots),$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E\cap R_n} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

24. 设在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$. 若 $\sup\limits_n \int_E |f_n| \mathrm{d}x < \infty$，则 $f(x)$ 在 E 上可积.

25. 设 $f_n(x)(n = 1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都在 E 上可积. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$，a. e. 于 E，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n| \mathrm{d}x = \int_E |f| \mathrm{d}x,$$

则对于 E 的每个可测子集 A 恒有

$$\lim_{n\to\infty}\int_A |f_n| \mathrm{d}x = \int_A |f| \mathrm{d}x.$$

26. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(\text{广义 R})\int_0^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} x^{-\frac{1}{n}} \mathrm{d}x = 1.$

27. 证明 $(\text{广义 R})\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^t - x}\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2+1}\ (-1 \leqslant x \leqslant 1).$

28. 设 $f(x)$ 是区间 $[0,a]$ 上的可积函数. 证明对每个 $t \in [0,a]$，下面的等式恒成立.

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\int_0^a \mathrm{e}^{kx(t-\tau)} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

29. 由 Fatou 引理直接推出 §5·3 系 2′.

30. 不利用 §5·3 中的结论，根据 Egoroff 定理来证明 §5·3 系 3.

31. 设 $mE < \infty$，$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列. 证明在 E 上

$f_n(x) \Rightarrow 0$ 的充要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}\mathrm{d}x = 0.$$

32. 设函数 $f(x,t)$ 在 $\{(x,t)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$ 上有界，并设对任何固定的 $t_0\in[\alpha,\beta]$，$f(x,t_0)$ 作为 x 的函数在 $[a,b]$ 上可测，对任何固定的 $x_0\in[a,b]$，$f(x_0,t)$ 作为 t 的函数在 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 令

$$g(t)=\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

问 $g(t)$ 是否在 $[\alpha,\beta]$ 上连续？为什么？

33. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可积函数列. 若

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_E |f_n(x)-f_m(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$

则 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),\cdots$ 的积分具有等度的绝对连续性.

34. 设 $mE<\infty$，$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 都是 E 上的非负可积函数. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ a. e. 于 E，并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x, \qquad \text{则}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

35. 把上题中的条件“$mE<\infty$”去掉，仍然成立. 试证明之.

36. 设 $f(x)$ 是 R^N 上有积分的函数. 若 $f(x)$ 的积分具有绝对连续性，问 $|f(x)|$ 的积分是否也具有绝对连续性？

37. 设 $f(x)$ 是 R^1 上有积分的函数. 若对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得：当 R^1 中有限个两两无交的开区间 $\{I_i\}$ 满足 $\sum\limits_i|I_i|<\delta$ 时(不论 $\{I_i\}$ 的取法如何) 恒有

$$\left|\int_{\bigcup\limits_i I_i} f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

则 $f(x)$ 的积分具有绝对连续性.

38. 若 E_1 是 R^p 中的不可测集，E_2 是 R^q 中的不可测集，则 $E_1 \times E_2$ 是 R^{p+q} 中的不可测集.

39. 若 $E \subset R^p \times R^q$，E 相应于每个 $x \in R^p$ 的截面 E_x 都是 R^q 中的可测集，问 E 是否 $R^p \times R^q$ 中的可测集？为什么？

40. 设 A 是 R^p 中的可测集，B 是 R^q 中的任一点集，证明 $m^*(A \times B) = mA \times m^* B$.

41. 若 $f(x)$ 在 R^p 上可积，$g(y)$ 在 R^q 上可积，则 $f(x) \cdot g(y)$ 在 $R^p \times R^q$ 上可积.

42. 设在 $E = \{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ 上

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2>0 \text{ 时}, \\ 0, & x^2+y^2=0 \text{ 时}. \end{cases}$$

证明 $f(x,y)$ 在 E 上不可积，但两个累次积分都存在并且相等.

43. 设 $\lambda(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$f(x) = \int_a^x \lambda(t)\mathrm{d}t (a \leqslant x \leqslant b)$；又设 $\mu(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x) = \int_a^x \mu(t)\mathrm{d}t (a \leqslant x \leqslant b)$. 利用 Fubini 定理证明下面的分部积分公式成立

$$\int_a^b f(x)\mu(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\lambda(x)\mathrm{d}x.$$

44. 若 $f(x)$ 在 E 上可积，问 $[f(x)]^2$ 是否在 E 上可积？

45. 设 $mE < \infty$，

(a) $\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列，

(b) 存在 E 上的 p 幂可积函数 $F(x)$ 使 $|f_n(x)| \leqslant F(x)$，a. e. 于 $E (n = 1,2,\cdots)$，

(c) 在 E 上 $f_n(x) \Rightarrow f(x)$.

证明在 E 上 $\{f_n(x)\}$ p 幂平均收敛于 $f(x)$.

46. 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的 p 幂可积函数 $(p \geqslant 1)$. 证明：

(i) 存在有理系数多项式列 $\{p_n(x)\}$，它在 $[a,b]$ 上 p 幂平均

收敛于 $f(x)$;

(ii) 存在$[a,b]$上的阶梯函数列$\{s_n(x)\}$,它在$[a,b]$上 p 幂平均收敛于 $f(x)$.

47. 设 $\delta>0$,$f(x)$ 在$[a,b]\cup(b,b+\delta]$上可积,则

$$\lim_{h\to 0+}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

48. 设$f(x)$与$g(x)$都是E上的平方可积函数(即2幂可积函数).证明:

(i) $f(x)g(x)$ 在 E 上可积,并且

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_E |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_E |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}};$$

(ii) $$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_E |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

49. 设 $mE<\infty$,$\{f_n(x)\}$ 是 E 上的可测函数列,满足条件 $\sup\limits_n\int_E |f_n(x)|^2\mathrm{d}x<\infty$.又设在$E$上$f_n(x)\Rightarrow f(x)$.证明 $f(x)$ 是 E上的平方可积函数,并且对E上的任何平方可积函数$g(x)$都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

50. 设$\alpha_1(x)$,$\alpha_2(x)$ 是 R^1 上的两个分布函数,相应于每个半开区间$(a,b]$恒有 $\alpha_1(b)-\alpha_1(a)\leqslant\alpha_2(b)-\alpha_2(a)$.证明:

(i) 若 $f(x)$ 是R^1 上的 α_2 一可测函数,则 $f(x)$ 也是 R^1 上的 α_1 一可测函数.

(ii) 若 $f(x)$ 在 R^1 上是 α_2 一可积的,则 $f(x)$ 在 R^1 上也是 α_1 一可积的.

第六章　微分与 Lebesgue 不定积分 · Riemann — Stieltjes 积分

本章所说函数均指 R^1 中正长度闭区间上的函数. 在 §6·1 ～ §6·3 中凡说到测度、可测函数、积分, 均指在 Lebesgue 意义之下.

§6·1　单调函数的微分性质

我们约定, 今后凡说到单调函数均指有限单调函数. 单调函数是一类常用函数, L—S 测度及积分理论必须用到它, 下一节讨论有界变差函数也要用到它.

本节主要是利用 Lebesgue 测度来讨论单调函数的微分性质. 作为预备知识, 我们先介绍 Vitali 复盖定理及列导数概念.

6·1·1　Vitali 复盖定理

定义 1　设 $E \subset R^1$, V 是一族长度为正数的闭区间. 若对于每个 $x \in E$, 总存在 V 中的一列闭区间 $\{I_n\}$, 使

$$x \in I_n (n = 1, 2, \cdots), mI_n \to 0,$$

就称 V 是 E 的 Vitali 复盖.

引理 1　设 I 与 J 是 R^1 中二闭区间, J 的中点恰为 I 的中点且 $|J| = 5|I|$. 若闭区间 $\hat{I}$ 与 I 相交且 $|\hat{I}| < 2|I|$, 则 $\hat{I} \subset J$.

定理 1　(Vitali 复盖定理) 设 E 是 R^1 中的有界集, V 是 E 的 Vitali 复盖, 则可以从 V 中选出有限个或可列个两两无交的闭区间 $\{I_i\}$ 使

$$m(E\setminus \bigcup_i I_i)=0. \qquad (6\cdot1\cdot1)$$

证明 取包含E的任一开区间Δ作为基本集.不难看出,把V中凡不完全含于Δ的闭区间除去,所得到的V_0仍是E的Vitali复盖.

第一步 选出定理所说的$\{I_i\}$:

任取闭区间$I_1\in V_0$.若I_1满足(1)则定理得证,否则

$\{I|I\in V_0,I\cap I_1=\varnothing\}$不空,

令 $r_1=\sup\{mI\,|I\in V_0,I\cap I_1=\varnothing\}$,

则$0<r_1<\infty$,故可选出$I_2\in V_0$使$mI_2>\frac{1}{2}r_1$且$I_2\cap I_1=\varnothing$.

若$\{I_1,I_2\}$满足$(6\cdot1\cdot1)$式则定理得证,否则再继续作下去.一般地,若$I_1,I_2,\cdots,I_n$已从V_0中选出而不满足$(6\cdot1\cdot1)$式,则

$$\{I\,|\,I\in V_0,I\cap I_i=\varnothing(i=1,2,\cdots,n)\}$$

不空,令

$$r_n=\sup\{mI\,|I\in V_0,I\cap I_i=\varnothing(i=1,2,\cdots,n)\},$$

则$0<r_n<\infty$,故可选出$I_{n+1}\in V_0$使

$$mI_{n+1}>\frac{r_n}{2}\text{ 且 }I_{n+1}\cap I_i=\varnothing,i=1,2,\cdots,n.$$

若经过有限步后所选出的诸闭区间能满足$(6\cdot1\cdot1)$式,定理便得证;否则,就会得到一列闭区间$\{I_i\}$.

第二步 证上述的闭区间列$\{I_i\}$满足$(6\cdot1\cdot1)$式:

诸I_i两两无交,故$\sum_{i=1}^{\infty}mI_i=m\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\leqslant m\Delta<\infty$.对每个$I_i\in\{I_i\}$,以$I_i$的中点为中心扩大$I_i$成闭区间$J_i$使$mJ_i=5\,mI_i$,则级数$\sum_{i=1}^{\infty}mJ_i$收敛.我们来证明对任何自然数$k$恒有

$$E\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i\subset\bigcup_{i=k}^{\infty}J_i$$

(从而立即可知$(6\cdot1\cdot1)$成立):

设 $x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. 对任意给定的自然数 k，必存在 $I_x^k \in \mathsf{V}_0$，使

$$x \in I_x^k \text{ 且 } I_x^k \cap I_i = \varnothing, i = 1,2,\cdots,k.$$

下证存在 $n > k$ 使 $I_x^k \cap I_n \neq \varnothing$：

假如对任何 $n > k$ 总有 $I_x^k \cap I_n = \varnothing$，则由 r_n 的定义知 $mI_x^k \leqslant r_n$. 由 $r_n < 2mI_{n+1}$ 及 $\sum_{i=1}^{\infty} mI_i < \infty$ 知 $r_n \to 0$，故 $mI_x^k = 0$. 这与 V_0 是正长度闭区间族矛盾.

设 $n_0 = \min\{n \mid n \in \mathsf{N},\ I_x^k \cap I_n \neq \varnothing\}$，则

$$n_0 > k \text{ 且 } I_x^k \cap I_i = \varnothing, \quad i = 1,2,\cdots,n_0 - 1,$$

由 r_{n_0-1} 的定义知 $mI_x^k \leqslant r_{n_0-1}$，而 $r_{n_0-1} < 2mI_{n_0}$，又 $I_x^k \cap I_{n_0} \neq \varnothing$，由引理 1 便知 $I_x^k \subset J_{n_0}$. 于是

$$I_x^k \subset \bigcup_{i=k}^{\infty} J_i, \qquad x \in \bigcup_{i=k}^{\infty} J_i.$$

这就证明了

$$E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subset \bigcup_{i=k}^{\infty} J_i.$$

由 k 的任意性及级数 $\sum_{i=1}^{\infty} mJ_i$ 收敛立即知

$$m(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = 0. \blacksquare$$

定理 1 的结论是说：可以从 V 中选出有限个或可列个两两无交的闭区间 $\{I_i\}$ 几乎复盖 E（即除了一个零测度子集外 $\bigcup_i I_i$ 复盖 E）.

6 · 1 · 2　列导数

定义 2　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，$x_0 \in [a,b]$. 若某一趋于 0 的数列 $\{h_n\}$（$h_n \neq 0, x_0 + h_n \in [a,b]$）使

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lambda$$

（λ 为有限数或 $\pm\infty$），就称 λ 是 $f(x)$ 在 x_0 相应于 $\{h_n\}$ 的列导数，

记作 $f'_{(h_n)}(x_0)$(有时只说 λ 是 $f(x)$ 在 x_0 的一个列导数而不指出是相应于$\{h_n\}$ 的).

例 6·1·1 $\left[-\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi}\right]$上的函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\text{ 时},\\ 0, & x=0\text{ 时},\end{cases}$$

在 $x=0$ 点的所有列导数为$\{\lambda\mid -1\leqslant\lambda\leqslant 1\}$.

命题 1 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有限函数,则对任何 $x_0\in[a,b]$, $f(x)$ 在 x_0 点至少有一个列导数.

证明 设 $x_0\in[a,b]$, 则存在数列$\{h_n\}$,使 $h_n\to 0,h_n\neq 0$ 且 $x_0+h_n\in[a,b]$. 记

$$\sigma_n=\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}.$$

若数列$\{\sigma_n\}$有界,则存在子列$\{\sigma_{n_k}\}$收敛于某数λ,λ就是$f(x)$在x_0点的一个列导数;若数列$\{\sigma_n\}$ 无界,不妨设上无界,则存在子列$\{\sigma_{n_k}\}$ 趋于$+\infty$, $+\infty$ 就是 $f(x)$ 在 x_0 点的一个列导数. ▌

定义 3 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有限函数,$x_0\in[a,b]$. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在(为有限数或$\pm\infty$),就称此极限值为 $f(x)$ 在 x_0 的导数,记作 $f'(x_0)$. 若 $f(x)$ 在 x_0 存在有限的导数,就称 $f(x)$ 在 x_0 **可微**.

定理 2 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有限函数,$x_0\in[a,b]$,则 $f(x)$ 在 x_0 点存在(有限或无限) 导数的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点的所有列导数为同一个数.

证明 必要性:由导数的定义立即可知.

充分性:设 $f(x)$ 在 x_0 的所有列导数均为 λ,又设 λ 为有限数(若λ为$\pm\infty$ 可类似地进行证明),来证 $f(x)$ 在 x_0 的导数为 λ. 假若λ不是$f(x)$在x_0的导数,则存在$\varepsilon_0>0$及趋于0的数列$\{h_n\}$(h_n

$\neq 0, x_0 + h_n \in [a,b]$)，使

$$\sigma_n = \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \overline{\in} (\lambda - \varepsilon_0, \lambda + \varepsilon_0)(n = 1,2,\cdots). \tag{6·1·2}$$

由命题 1 的证明过程知，$\{\sigma_n\}$ 必有一子列趋于某个数 μ，μ 是 $f(x)$ 在 x_0 的一个列导数. 由式(6·1·2) 知 $\mu \neq \lambda$. 这与 $f(x)$ 在 x_0 的所有列导数均为 λ 相矛盾. ▌

6·1·3　单调函数的微分性质

关于单调函数的连续性，我们已经知道单调函数只可能有第一类不连续点或可去不连续点，并且不连续点至多为可列个. 下面来讨论单调函数的可微性.

引理 2　设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的严格增函数，$E \subset [a,b]$.

(i) 设 p 是一个非负实数，若 $f(x)$ 在 E 的每个点 x 至少有一个列导数 $\lambda_x \leqslant p$，则

$$m^* f(E) \leqslant p \cdot m^* E;$$

(ii) 设 q 是一个非负实数，若 $f(x)$ 在 E 的每个点 x 至少有一个列导数 $\lambda_x \geqslant q$，则

$$m^* f(E) \geqslant q \cdot m^* E;$$

(iii) 若 $f(x)$ 在 E 的每个点 x 有一个列导数为 $+\infty$，则 $m^* E = 0$.

证明　(i) 设 $\varepsilon > 0$. 由 §3·2 定理 2 知存在开集 G 使

$$G \supset E, \quad mG \leqslant m^* E + \varepsilon.$$

对每个 $x_0 \in E$，由题设知可取出趋于 0 的数列$\{h_n\}$($h_n \neq 0$，$x_0 + h_n \in [a,b]$) 使

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \lambda_{x_0} \leqslant p$$

(对不同的 x_0，取出的$\{h_n\}$ 可能不同). 不妨设$\{h_n\}$ 的诸项同号(否则可取子列使诸项同号)，并且不妨认为诸 h_n 均为正数(若诸 h_n 均为负数可类似地进行证明). 记

$$I_n(x_0)=[x_0,x_0+h_n],\quad \Delta_n(x_0)=[f(x_0),\ f(x_0+h_n)].$$

则
$$mI_n(x_0)=h_n\to 0\quad (n\to\infty).$$

设 $p'>p$,易知当 n 充分大时

$$I_n(x_0)\subset G,\quad \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}<p'.$$

不妨设以上二关系式对每个自然数 n 都成立. 于是

$$m\Delta_n(x_0)<p'\cdot mI_n(x_0)\ (n=1,2,\cdots).$$

由此知 $m\Delta_n(x_0)\to 0(n\to\infty)$,由 $f(x)$ 严格增知 $\Delta_n(x_0)$ 是正长度闭区间,$f(x_0)\in\Delta_n(x_0)\ (n=1,2,\cdots)$,所以

$$\{\Delta_n(x_0)\,|\,n\in\mathbf{N},x_0\in E\}$$

是 $f(E)$ 的一个 Vitali 复盖. 由定理 1 知可选出有限个或可列个两两无交的闭区间 $\{\Delta_{n_i}(x_i)\}$ 使

$$m(f(E)\setminus\bigcup_i\Delta_{n_i}(x_i))=0.$$

显然诸 $I_{n_i}(x_i)$ 也两两无交,并且 $\bigcup\limits_i I_{n_i}(x_i)\subset G$. 所以

$$\begin{aligned}m^*f(E)&\leqslant m\bigcup_i\Delta_{n_i}(x_i)=\sum_i m\Delta_{n_i}(x_i)\\&<p'\cdot\sum_i mI_{n_i}(x_i)=p'\cdot m\bigcup_i I_{n_i}(x_i)\\&\leqslant p'\cdot mG\leqslant p'(m^*E+\varepsilon).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0,p'\to p$ 得

$$m^*f(E)\leqslant p\cdot m^*E.$$

(ii) 不妨设 $q>0$. 记

$$E_1=\{x_0\,|\,x_0\in E,\ f(x)\text{ 在 }x_0\text{ 连续}\}.$$

由 $f(x)$ 单调知 $E\setminus E_1$ 至多有可列个点,所以

$$m(E\setminus E_1)=0,\quad m^*E=m^*E_1.$$

设 $\varepsilon>0$,则存在开集 G 使

$$G\supset f(E),\quad mG\leqslant m^*f(E)+\varepsilon.$$

对每个 $x_0\in E_1$,由题设知可取出趋于 0 的数列

$$\{h_n\}(h_n \neq 0,\quad x_0 + h_n \in [a,b])$$

使

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \lambda_{x_0} \geqslant q$$

(对不同的 x_0,取出的$\{h_n\}$ 可能不同),不妨设$\{h_n\}$ 的诸项均为正数. 记

$$I_n(x_0) = [x_0, x_0+h_n],\quad \Delta_n(x_0) = [f(x_0),\ f(x_0+h_n)].$$

由 $f(x)$ 在 x_0 点连续知

$$m\Delta_n(x_0) = f(x_0+h_n) - f(x_0) \to 0\ (n\to\infty).$$

设正数 $q' < q$,易知当 n 充分大时

$$\Delta_n(x_0) \subset G,\qquad \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} > q'.$$

不妨设以上二关系式对每个自然数 n 都成立. 于是

$$m\Delta_n(x_0) > q' \cdot mI_n(x_0)\ (n = 1,2,\cdots).$$

容易看出

$$\{I_n(x_0) \mid n \in \mathrm{N}, x_0 \in E_1\}$$

是 E_1 的一个 Vitali 复盖. 由定理 1 知可选出有限个或可列个两两无交的闭区间$\{I_{n_i}(x_i)\}$ 使

$$m(E_1 \setminus \bigcup_i I_{n_i}(x_i)) = 0.$$

由 $f(x)$ 严格增知诸 $\Delta_{n_i}(x_i)$ 也两两无交,并且 $\bigcup\limits_i \Delta_{n_i}(x_i) \subset G$. 所以

$$\begin{aligned} m^* E_1 &\leqslant m \bigcup_i I_{n_i}(x_i) = \sum_i mI_{n_i}(x_i) \\ &< \frac{1}{q'} \cdot \sum_i m\Delta_{n_i}(x_i) = \frac{1}{q'} \cdot m \bigcup_i \Delta_{n_i}(x_i) \\ &\leqslant \frac{1}{q'} \cdot mG \leqslant \frac{1}{q'}(m^* f(E) + \varepsilon). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0, q' \to q$ 得

$$m^* E_1 \leqslant \frac{1}{q} \cdot m^* f(E).$$

所以

$$m^* f(E) \geqslant q \cdot m^* E_1 = q \cdot m^* E.$$

(iii) 由 (ii) 知对任何正实数 q 都有

$$m^* f(E) \geqslant q \cdot m^* E.$$

由 $f(x)$ 单调不减知

$$f(E) \subset f([a,b]) \subset [f(a), f(b)],$$

从而 $m^* f(E)$ 为一有限数. 所以 $m^* E = 0$. ▌

定理 3 (**Lebesgue 单调函数可微性定理**) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调函数,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微.

证明 不妨设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调不减函数(若 $f(x)$ 单调不增,考虑 $-f(x)$ 即可).

令 $g(x) = f(x) + x$,则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格增,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 的每个点只能有非负的列导数.

记

$$E = \{x_0 \mid x_0 \in [a,b], g(x) \text{ 在 } x_0 \text{ 不存在导数}\}.$$

若 $x_0 \in E$,由定理 2 知 $g(x)$ 在 x_0 必存在不相等的两个列导数 λ_1, λ_2,不妨设 $\lambda_1 < \lambda_2$,则存在两个正有理数 p, q 使

$$\lambda_1 < p < q < \lambda_2.$$

令 $A = \{(p,q) \mid p,q \text{ 为正有理数}, p < q\}$,显然 A 是可列集. 对每个 $(p,q) \in A$,令

$E_{pq} = \{x_0 \mid g(x)$ 在 x_0 既存在小于 p 的列导数也存在大于 q 的列导数$\}$.

容易看出

$$E = \bigcup_{(p,q) \in A} E_{pq}.$$

由引理 2 (i),(ii) 知

$$q \cdot m^* E_{pq} \leqslant m^* g(E_{pq}) \leqslant p \cdot m^* E_{pq}.$$

由 $p<q$ 知 $m^*E_{pq}=0$，从而 $mE=0$.

记 $\hat{E}=\{x_0\mid x_0\in[a,b]\setminus E, g'(x_0)=+\infty\}$，由引理 2 (iii) 知 $m\hat{E}=0$. 令 $N=E\cup\hat{E}$，则 $mN=0$，$g(x)$ 在$[a,b]\setminus N$ 上处处存在有限导数，因此 $f(x)=g(x)-x$ 在$[a,b]\setminus N$上处处存在有限导数，即 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上几乎处处可微. ▌

定理 4　若 $f(x)$ 是$[a,b]$ 上的单调不减函数，则 $f'(x)$ 是在$[a,b]$ 上几乎处处有定义的非负可积函数，并且

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a).\qquad (6\cdot 1\cdot 3)$$

证明　在$(b,b+1]$ 上补充定义 $f(x)$ 的值为常数 $f(b)$，则 $f(x)$ 便成为$[a,b+1]$ 上的单调不减函数. 相应于每个自然数 n，作$[a,b]$ 上的函数

$$g_n(x)=\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]\Big/\frac{1}{n},$$

则 $g_n(x)$ 是$[a,b]$ 上的非负可测函数，并且在$[a,b]$ 上 Riemann 可积. 由定理 3 知 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上几乎处处有导数，导数显然是非负的，由导数定义知

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=f'(x),\text{a. e. 于}[a,b].$$

由 Fatou 引理，

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}g_n(x)\mathrm{d}x\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x.$$

上式后端中的积分可看成 Riemann 积分，

$$\begin{aligned}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x&=n\left[\int_a^b f\left(x+\frac{1}{n}\right)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$$\leqslant n\left[\frac{1}{n}f(b)-\frac{1}{n}f(a)\right]=f(b)-f(a).$$

所以

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a),$$

$f'(x)$ 是在$[a,b]$上几乎处处有定义的非负可积函数. ▌

值得注意的是:定理4中的不等式(6·1·3),不能把"$\leqslant$"号改为"$=$"号.下面的例6·1·2说明,即使 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续单调不减函数,也不能保证(6·1·3)成为等式.

例6·1·2 利用 Cantor 集 K 作$[0,1]$上的函数 $\theta(x)$:

(1°) 在开集 $K^c=[0,1]\backslash K$ 的各构成区间上规定$\theta(x)$的值如下:在$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$上 $\theta(x)$ 取$\frac{1}{2}$. 在$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$,$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$上 $\theta(x)$ 分别取$\frac{1}{4}$,$\frac{3}{4}$.一般地,对任意自然数 n,在

$$\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\left(\frac{19}{3^n},\frac{20}{3^n}\right),\cdots,\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right)$$

上 $\theta(x)$ 分别取

$$\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}.$$

(2°) 规定:$\theta(0)=0$,$\theta(1)=1$,当 $x\in K\backslash\{0,1\}$时

$$\theta(x)=\sup\{\theta(t)\,|\,t\in K^c,\ t<x\}.$$

所作函数 $\theta(x)$ 称为 Cantor 函数.

显然$\theta(x)$在$[0,1]$上单调不减.再证$\theta(x)$在$[0,1]$上连续:假若 $\theta(x)$ 在 $x_0\in[0,1]$不连续,则开区间$(\theta(x_0-0),\theta(x_0+0))$非空,此开区间中的每个数都不属于 $\theta(x)$ 的值域,这与$\overline{\theta(K^c)}=[0,1]$的事实相矛盾.

当$x\in K^c$时显然$\theta'(x)=0$,故在$[0,1]$上几乎处处$\theta'(x)=0$,

$$\int_0^1\theta'(x)\mathrm{d}x=0<1=\theta(1)-\theta(0).$$

*6·1·4　单调不减函数的跳跃——连续分解

定义 4　设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的单调不减函数，$f(x)$ 的所有不连续点为 $\{\xi_k\}$（$\{\xi_k\}$至多为可列集）. 作$[a,b]$上的函数

$$s(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=a \text{ 时},\\ [f(a+0)-f(a)]+\sum\limits_{a<\xi_k<x}[f(\xi_k+0)-f(\xi_k-0)] & \\ +[f(x)-f(x-0)], & \text{当 } x\in(a,b] \text{ 时},\end{cases}$$

我们称 $s(x)$ 是 $f(x)$ 的**跳跃函数**.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则 $s(x)\equiv 0$. 若 $f(x)$ 只有有限个不连续点，则 $s(x)$ 是阶梯函数. 在一般情况下 $s(x)$ 是非负单调不减函数. $s(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的不连续点.

定理 5　若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的单调不减函数，则 $f(x)$ 可以分解为它的跳跃函数 $s(x)$ 与一个连续单调不减函数 $g(x)$ 之和.

证明　设 $s(x)$ 是 $f(x)$ 的跳跃函数，令 $g(x)=f(x)-s(x)$，则 $f(x)=s(x)+g(x)$.

(1°)　证 $g(x)$ 单调不减：设 x_1、$x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$. 由$s(x)$的定义知

$$s(x_2)-s(x_1)\leqslant f(x_2)-f(x_1).$$

因此 $g(x_1)\leqslant g(x_2)$. (1°) 得证.

(2°)　证 $g(x)$ 连续：设 $x_1\in[a,b]$. 由 $g(x)$ 单调不减知 $g(x_1)\leqslant g(x_1+0)$. 再证相反的不等式. 设 $x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，由 $s(x)$ 的定义知

$$f(x_1+0)-f(x_1)\leqslant s(x_2)-s(x_1).$$

令 $x_2\to x_1$ 得

$$f(x_1+0)-f(x_1)\leqslant s(x_1+0)-s(x_1).$$

因此 $g(x_1+0)\leqslant g(x_1)$. 于是 $g(x_1+0)=g(x_1)$. 类似可证 $g(x_1-0)=g(x_1)$. 所以 $g(x)$ 在 x_1 连续. (2°) 得证. ▍

§6·2　有界变差函数

有界变差函数在历史上最初是为了描述可求长曲线而被引入的，这类函数在Riemann—Stieltjes积分理论(§6·4)中有着重要的应用，我们研究它也是为讨论绝对连续函数的性质(§6·3)做准备.

6·2·1　可求长曲线·有界变差函数的定义

设C是平面中的一条连续曲线，C在直角坐标系XOY下的参数方程是

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta), \tag{6·2·1}$$

其中$\varphi(t)$与$\psi(t)$是区间$[\alpha,\beta]$上的连续函数. 作$[\alpha,\beta]$的划分

$$T:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta.$$

相应于划分T得到C的一组分点$P_i=(\varphi(t_i),\psi(t_i))$，$i=0,1,\cdots,n-1,n$. 依次连接$C$上相邻分点得到$C$的内接折线$C(T)$. 记$C(T)$的长为$l(T)$.

定义1　设C为上述的连续曲线，若数集$\{l(T)\mid T$为$[\alpha,\beta]$的划分$\}$有界，就称C是**可求长曲线**，并称

$$l=\sup\{l(T)\mid T\text{ 为}[\alpha,\beta]\text{ 的划分}\}$$

为**曲线C的长.**

设C为方程(6·2·1)所表示的连续曲线. 由于

$$l(T)=\sum_{i=1}^{n}\{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n}|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|,\sum_{i=1}^{n}|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|\right\}$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2+[\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}[|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})|+|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})|],$$

所以曲线 C 可求长的充要条件是数集

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})| \,\middle|\, n\in \mathbf{N},\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta\right\},$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}|\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})| \,\middle|\, n\in \mathbf{N},\ \alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta\right\}$$

均有界.

定义 2　设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有限函数,作$[a,b]$的划分

$$T: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

我们把非负实数

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

称为 $f(x)$ 相应于划分 T 的**变差**,记作 $V(f;T)$ 或 $V(f;x_0,x_1,\cdots,x_n)$. 把非负数

$$\sup\{V(f;T)\mid T\text{ 为}[a,b]\text{ 的划分}\}$$

称为 $f(x)$ 在$[a,b]$上的**全变差**,记作 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$. 若 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)<\infty$,换句话说,若 $f(x)$ 的一切变差所组成的数集

$$\{V(f;T)\mid T\text{ 为}[a,b]\text{ 的划分}\}$$

有界,就称 $f(x)$ 是$[a,b]$上的**有界变差函数**.

由前面的分析立即知

命题 1　设 C 为方程(6·2·1)所表示的连续曲线,则 C 可求长的充要条件是:$\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 都是$[\alpha,\beta]$上的有界变差函数.

例 6·2·1　$[a,b]$上的单调函数 $f(x)$ 是有界变差函数,并且

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=|f(b)-f(a)|.$$

这是因为相应于任意 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,

$$V(f;T)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=|f(b)-f(a)|.$$

例 6·2·2 闭区间上的连续函数不一定是有界变差函数. 例如

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x\in(0,1]\text{ 时},\\ 0, & x=0\text{ 时},\end{cases}$$

是$[0,1]$上的连续函数. 相应于每个 $n\in\mathbf{N}$,作$[0,1]$的划分

$$T_n:0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\cdots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

易知

$$V(f;T_n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\to\infty(n\to\infty).$$

所以 $f(x)$ 不是$[0,1]$上的有界变差函数.

6·2·2 有界变差函数的性质

引理 1 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有限函数,$a<c<b$,则

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f).$$

证明 由于

$$\begin{aligned}&V(f;a,y_1,\cdots,y_{n-1},c)+V(f;c,z_1,\cdots,z_{m-1},b)\\ =&V(f;a,y_1,\cdots,y_{n-1},c,z_1,\cdots,z_{m-1},b)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f),\end{aligned}$$

所以

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{V}}(f).$$

再证相反的不等式. 对$[a,b]$的任意划分 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,必存在 i 使 $x_i\leqslant c<x_{i+1}$. 不妨设 $x_i<c<x_{i+1}$. 由于

$$|f(x_{i+1})-f(x_i)|\leqslant|f(x_{i+1})-f(c)|+|f(c)-f(x_i)|,$$

所以

$$\begin{aligned}&V(f;a,x_1,\cdots,x_i,x_{i+1},\cdots,x_{n-1},b)\\ \leqslant&V(f;a,x_1,\cdots,x_i,c)+V(f;c,x_{i+1},\cdots,x_{n-1},b)\\ \leqslant&\overset{c}{\underset{a}{V}}(f)+\overset{b}{\underset{c}{V}}(f).\end{aligned}$$

因此

$$\bigvee_a^b(f) \leqslant \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f).$$

这就证明了引理 1. ▌

定理 1　(i) 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有界变差函数,则 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

(ii) 设 $a < c < b$. 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有界变差函数,则 $f(x)$ 分别是$[a,c]$,$[c,b]$上的有界变差函数.

(iii) 若 $f(x)$,$g(x)$ 都是$[a,b]$上的有界变差函数,则

$$f(x) \pm g(x), \qquad f(x) \cdot g(x)$$

也是$[a,b]$上的有界变差函数.

证明　(i) 对任意 $x \in (a,b)$,

$$|f(x) - f(a)| = V(f;a,x) \leqslant \bigvee_a^x(f)$$

$$\leqslant \bigvee_a^x(f) + \bigvee_x^b(f) = \bigvee_a^b(f) < \infty.$$

所以 $f(x)$ 在$[a,b]$上有界.

(ii) 由 $\bigvee_a^b(f) = \bigvee_a^c(f) + \bigvee_c^b(f)$ 立即得证.

(iii) 设 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. 由于

$$|[f(x_i) \pm g(x_i)] - [f(x_{i-1}) \pm g(x_{i-1})]|$$
$$\leqslant |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |g(x_i) - g(x_{i-1})|,$$

所以

$$V(f \pm g;T) \leqslant V(f;T) + V(g;T)$$

$$\leqslant \bigvee_a^b(f) + \bigvee_a^b(g) < \infty.$$

可见 $f(x) \pm g(x)$ 是有界变差函数.

由 (i) 知存在实数 A,B 使在$[a,b]$上 $|f(x)| \leqslant A$, $|g(x)| \leqslant B$. 由于

$$\begin{aligned}
&|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
\leqslant &|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_i)| \\
&\quad +|f(x_{i-1})g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
\leqslant &B\cdot|f(x_i)-f(x_{i-1})|+A\cdot|g(x_i)-g(x_{i-1})|,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
V(fg;T)&\leqslant B\cdot V(f;T)+A\cdot V(g;T) \\
&\leqslant B\cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)+A\cdot \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)<\infty.
\end{aligned}$$

可见 $f(x)\cdot g(x)$ 是有界变差函数. ▌

定理 2 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有界变差函数,则

(i) $\pi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 是$[a,b]$上的非负单调不减函数(我们规定 $\overset{a}{\underset{a}{V}}(f)=0$);

*(ii) $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 与 $f(x)$ 有相同的右(左)方连续点,从而有相同的连续点.

证明 (i) 由引理 1 立即得证.

(ii) 若 $x,x'\in[a,b]$, $x<x'$,则

$$|f(x')-f(x)|=V(f;x,x')\leqslant \overset{x'}{\underset{x}{V}}(f)=\overset{x'}{\underset{a}{V}}(f)-\overset{x}{\underset{a}{V}}(f), \tag{6·2·2}$$

可见 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 的右(左)方连续点必是 $f(x)$ 的右(左)方连续点.

设 $\xi\in[a,b)$ 是 $f(x)$ 的右方连续点,则对任意 $\varepsilon>0$,存在正数 $\delta<b-\xi$,使当 $x\in(\xi,\xi+\delta)$ 时

$$|f(x)-f(\xi)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

作$[\xi,\xi+\delta]$的划分 $\xi=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=\xi+\delta$,使

$$V(f;x_0,x_1,\cdots,x_n)>\overset{\xi+\delta}{\underset{\xi}{V}}(f)-\frac{\varepsilon}{2}$$

（这是可以做到的）. 由于

$$\overset{x_1}{\underset{\xi}{V}}(f) = \overset{\xi+\delta}{\underset{\xi}{V}}(f) - \overset{\xi+\delta}{\underset{x_1}{V}}(f) < \left[V(f;x_0,x_1,\cdots,x_n) + \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

$$- V(f;x_1,\cdots,x_n) = |f(x_1) - f(\xi)| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

所以当 $x \in (\xi, x_1)$ 时

$$\left|\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{\xi}{\underset{a}{V}}(f)\right| = \overset{x}{\underset{\xi}{V}}(f) \leqslant \overset{x_1}{\underset{\xi}{V}}(f) < \varepsilon.$$

即 ξ 是 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 的右方连续点. 同理可证 $f(x)$ 的左方连续点必是 $\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 的左方连续点. ▌

定理 3　(**Jordan 分解定理**) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 则 $f(x)$ 可表为两个单调不减函数 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 之差.

证明　作 $[a,b]$ 上的函数

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left[\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x)\right], \quad \psi(x) = \frac{1}{2}\left[\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x)\right]. \tag{6·2·3}$$

显然 $f(x) = \varphi(x) - \psi(x)$. 由定理 2 证明中的(6·2·2)知, 当 $x < x'$ $(x、x' \in [a,b])$ 时

$$\overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + f(x) \leqslant \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) + f(x').$$

所以 $\varphi(x)$ 单调不减. 同理可证 $\psi(x)$ 单调不减. ▌

注　把一个有界变差函数表示成两个单调不减函数的差, 表示法不是唯一的. 例如, 把(6·2·3)式所定义的 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 分别加上 $\psi(x)$ 得

$$\pi(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(x), \qquad v(x) = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) - f(x),$$

显然 $\pi(x)$ 与 $v(x)$ 单调不减, $f(x) = \pi(x) - v(x)$.

定理 4　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, 则

(i) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只可能有第一类不连续点或可去不连续

点,并且不连续点至多为可列个;

(ii) $f(x)$ 在$[a,b]$上几乎处处可微,并且 $f'(x)$ 是$[a,b]$上的可积函数.

证明 (i) 由定理 3 及单调函数的连续性质立即得证.

(ii) 由定理 3 及 §6·1 定理 3、4 立即得证. ▌

*6·2·3 有界变差函数的跳跃——连续分解

设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有界变差函数,则 $\pi(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$ 与 $v(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)-f(x)$ 单调不减且 $f(x)=\pi(x)-v(x)$. $f(x)$ 至多有可列个不连续点,记其全体为$\{\xi_k\}$,由定理 2 知 $\pi(x)$ 的不连续点与 $f(x)$ 的相同,因此 $v(x)$ 的不连续点均属于$\{\xi_k\}$. 把 $\pi(x)$ 与 $v(x)$ 的跳跃函数分别记作 $s_\pi(x)$ 与 $s_v(x)$,令 $s(x)=s_\pi(x)-s_v(x)$,不难证明

$$
s(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=a \text{ 时},\\ [f(a+0)-f(a)]+\sum\limits_{a<\xi_k<x}[f(\xi_k+0)-f(\xi_k-0)] & \\ +[f(x)-f(x-0)], & \text{当 } x\in(a,b] \text{ 时}.\end{cases}
$$

我们称 $s(x)$ 是 $f(x)$ 的**跳跃函数**.

若 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,则 $s(x)\equiv 0$. 若 $f(x)$ 只有有限个不连续点,则 $s(x)$ 为阶梯函数. 在一般情况下 $s(x)$ 是有界变差函数. $s(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的不连续点.

定理 5 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的有界变差函数,则 $f(x)$ 可以分解为它的跳跃函数 $s(x)$ 与一个连续有界变差函数 $g(x)$ 之和.

证明 由 §6·1 定理 5 知 $\pi(x)-s_\pi(x)$ 与 $v(x)-s_v(x)$ 均为连续单调不减函数,所以

$$g(x)=f(x)-s(x)=[\pi(x)-v(x)]-[s_\pi(x)-s_v(x)]$$

是连续有界变差函数,而 $f(x)=s(x)+g(x)$. ▌

§6·3 绝对连续函数与 Lebesgue 不定积分

6·3·1 可积函数的不定积分·绝对连续函数的定义

定义 1 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的可积函数，c 是任一实数，我们把$[a,b]$上的函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+c \qquad (6\cdot 3\cdot 1)$$

称为 $f(x)$ 的一个 Lebesgue 不定积分（简称不定积分）.

我们来看不定积分(6·3·1)是怎样的一个函数. 由 $f(x)$ 可积知 $|f(x)|$ 的积分具有绝对连续性：对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使当 $me<\delta(e\subset[a,b])$ 时恒有

$$\int_e |f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因此，当$[a,b]$中有限个两两无交的开区间(a_i,b_i)，$i=1,2,\cdots,n$ 满足 $\sum_{i=1}^n(b_i-a_i)<\delta$ 时（不论 $\{(a_i,b_i)\}_1^n$ 的取法如何）恒有

$$\sum_{i=1}^n|F(b_i)-F(a_i)|=\sum_{i=1}^n\left|\int_{a_i}^{b_i}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\int_{\bigcup\limits_{i=1}^n(a_i,b_i)}|f(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

定义 2 设 $F(x)$ 是$[a,b]$上的有限函数. 若对任意 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta>0$，使得：当$[a,b]$中有限个两两无交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}$ 满足 $\sum_i(b_i-a_i)<\delta$ 时（不论 $\{(a_i,b_i)\}$ 的取法如何）恒有

$$\sum_i|F(b_i)-F(a_i)|<\varepsilon,$$

就称 $F(x)$ 是$[a,b]$上的**绝对连续函数**.

由前面的分析立即知

定理1 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的可积函数,则其不定积分 $F(x)$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数.

由定义 2 不难看出,绝对连续函数必为连续函数.但是连续函数未必是绝对连续函数,例如 §6·2例6·2·2中的函数 $f(x)$,它在$[0,1]$上连续但不是绝对连续函数.

例6·3·1 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件:存在实数 M,使当 $x,x'\in[a,b]$ 时

$$|f(x)-f(x')|\leqslant M|x-x'|,$$

则 $f(x)$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数.

6·3·2 绝对连续函数的性质

定理2 若 $f(x),g(x)$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数,则

$$f(x)\pm g(x),\qquad f(x)\cdot g(x)$$

也是$[a,b]$上的绝对连续函数.

证明 设$\{(a_i,b_i)\}$是$[a,b]$中任意有限个两两无交的开区间.由于

$$\begin{aligned}&|[f(b_i)\pm g(b_i)]-[f(a_i)\pm g(a_i)]|\\ \leqslant\ &|f(b_i)-f(a_i)|+|g(b_i)-g(a_i)|,\end{aligned}$$

可知 $f(x)\pm g(x)$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数.

由 $f(x),g(x)$ 连续知存在实数 A,B 使在$[a,b]$上 $|f(x)|\leqslant A$, $|g(x)|\leqslant B$.由于

$$\begin{aligned}&|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|\\ \leqslant\ &|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(b_i)|\\ &+|f(a_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|\\ \leqslant\ &B\cdot|f(b_i)-f(a_i)|+A\cdot|g(b_i)-g(a_i)|,\end{aligned}$$

可知 $f(x)\cdot g(x)$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数. ▌

定理3 $[a,b]$上的绝对连续函数 $f(x)$ 必为有界变差函数.

证明 取 $\varepsilon=1$,由 $f(x)$ 绝对连续知存在 $\delta>0$,使得当$[a,b]$

中有限个两两无交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}$ 满足 $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ 时恒有

$$\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < 1.$$

取自然数 m 使 $\frac{b-a}{m} < \delta$，把区间 $[a,b]$ m 等分，得到划分：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b.$$

对固定的 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，任作 $[x_{i-1}, x_i]$ 的划分：

$$x_{i-1} = z_0 < z_1 < \cdots < z_{n-1} < z_n = x_i,$$

由于 $\sum_{j=1}^{n}(z_j - z_{j-1}) = x_i - x_{i-1} < \delta$，所以

$$\sum_{j=1}^{n} |f(z_j) - f(z_{j-1})| < 1,$$

由此可知

$$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leqslant 1, \quad 从而 \quad \bigvee_a^b(f) = \sum_{i=1}^{m} \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i}(f) \leqslant m.$$

即知 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. ▌

由定理 3 立即可知

定理 4　若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微，并且 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数.

6 · 3 · 3　不定积分与微分的关系

在数学分析中，关于 Riemann 积分有如下的两个结论：

(i) 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 Riemann 可积的导函数，则

$$F(x) = (\mathrm{R})\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t + F(a) \quad (x \in [a,b]). \tag{6 · 3 · 2}$$

((6 · 3 · 2) 即 Riemann 积分的 Newton－Leibniz 公式)

(ii) 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(\mathrm{R})\int_a^x f(t)\mathrm{d}t + c\right] = f(x) \quad (x \in [a,b]). \tag{6 · 3 · 3}$$

§6·3中6·3·3的主要目的是对于Lebesgue积分来建立相应于(i),(ii) 的定理.

定理5 若 $F(x)$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数,则 $F'(x)$ 是在$[a,b]$上几乎处处有定义的可积函数,并且

$$F(x)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t+F(a)\qquad (x\in[a,b]).\tag{6·3·4}$$

((6·3·4) 即 Lebesgue 积分的 Newton－Leibniz 公式)

证明 定理4已指出 $F'(x)$ 是在$[a,b]$上几乎处处有定义的可积函数.我们来证明(6·3·4).不失一般性,只需证明

$$\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a).\tag{6·3·5}$$

在$(b,b+1]$上补充定义 $F(x)$ 的值为常数 $F(b)$,则 $F(x)$ 便成为$[a,b+1]$上的绝对连续函数. 相应于每个自然数 n,作$[a,b]$上的函数

$$f_n(x)=\left[F(x+\frac{1}{n})-F(x)\right]\Big/\ \frac{1}{n},$$

显然 $f_n(x)$ 在$[a,b]$上连续,并且

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=F'(x),\text{a. e. 于 }[a,b].$$

如果能够证出 $f_n(x),n=1,2,\cdots$ 的积分具有等度的绝对连续性,那么由 Vitali 逐项积分定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b F'(x)\mathrm{d}x,$$

上式左端中的积分可看成 Riemann 积分,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}n\int_a^b\left[F\left(x+\frac{1}{n}\right)-F(x)\right]\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}}F(x)\mathrm{d}x-\int_a^b F(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\lim_{n\to\infty}n\left[\int_b^{b+\frac{1}{n}}F(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+\frac{1}{n}}F(x)\mathrm{d}x\right]\end{aligned}$$

$= F(b) - F(a)$ （此最后一步根据(6・3・3)而得），

这样便可证得(6・3・5)式.

下面来证明 $f_n(x), n = 1,2,\cdots$ 的积分确实具有等度的绝对连续性. 设 $\varepsilon > 0$，由 $F(x)$ 在 $[a,b+1]$ 上绝对连续知存在 $\delta > 0$，使得当 $[a,b+1]$ 中有限个两两无交的开区间 $\{(c_i,d_i)\}$ 满足 $\sum\limits_i (d_i - c_i) < \delta$ 时恒有

$$\sum_i |F(d_i) - F(c_i)| < \varepsilon.$$

(1°) 设 $I_i = (a_i,b_i), i = 1,2,\cdots,k$ 是 $[a,b]$ 中两两无交的开区间，$\sum\limits_{i=1}^{k}(b_i - a_i) < \delta$，则

$$\begin{aligned}\left|\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} I_i} f_n(x)\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{i=1}^{k}\int_{a_i}^{b_i} f_n(x)\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{k} n\left[\int_{b_i}^{b_i+\frac{1}{n}} F(x)\mathrm{d}x - \int_{a_i}^{a_i+\frac{1}{n}} F(x)\mathrm{d}x\right]\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{k} n\int_0^{\frac{1}{n}} [F(b_i + x) - F(a_i + x)]\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant n\int_0^{\frac{1}{n}}\left[\sum_{i=1}^{k}|F(b_i + x) - F(a_i + x)|\right]\mathrm{d}x \\ &< n\int_0^{\frac{1}{n}}\varepsilon\mathrm{d}x = \varepsilon.\end{aligned}$$

(2°) 设 G 是含于 $[a,b]$ 的开集，$mG < \delta$. 由 §2・4 定理 1 知 G 可以表为可列个两两无交的开区间 I_i 之并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$.

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = mG < \delta,$$

从而

$$m(G\setminus \bigcup_{i=1}^{k} I_i) = \sum_{i=k+1}^{\infty}|I_i| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

由 $f_n(x)$ 的积分具有绝对连续性知

$$\int_{\bigcup_{i=1}^{k} I_i} f_n(x)\mathrm{d}x \to \int_G f_n(x)\mathrm{d}x \quad (k\to\infty).$$

因为对每个 k 有 $\sum_{i=1}^{k}|I_i|<\delta$,由(1°)知

$$\left|\int_G f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon.$$

(3°) 设 e 是含于 $[a,b]$ 的可测集,$me<\delta$. 令 $e_1=e\setminus\{a,b\}$,则 $me_1<\delta$. 由 §3·4 定理 3 知存在含于 $[a,b]$ 的开集列 $\{G_k\}$,使

$$G_k\supset e_1 \quad \text{且} \quad m(G_k\setminus e_1)\to 0 \quad (k\to\infty).$$

由 $f_n(x)$ 的积分具有绝对连续性知

$$\int_{G_k} f_n(x)\mathrm{d}x \to \int_{e_1} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_e f_n(x)\mathrm{d}x \qquad (k\to\infty).$$

因为当 k 充分大时 $mG_k<\delta$,由(2°)知

$$\left|\int_e f_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon.$$

由于上述 δ 的选取与 n 无关,这就证明了 $f_n(x)$, $n=1,2,\cdots$ 的积分具有等度的绝对连续性. ▌

由定理 1 及定理 5 我们看到:$[a,b]$ 上绝对连续函数的全体恰是 $[a,b]$ 上所有可积函数的一切不定积分的全体. 在 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上有限函数的前提下,要使 Newton — Leibniz 公式(4) 成立,$F(x)$ 绝对连续的条件不仅是充分的,而且是必要的.

系 1 若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可微,并且 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,则 $F'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,并且

$$F(x)=\int_a^x F'(t)\mathrm{d}t+F(a) \quad (x\in[a,b]). \tag{6·3·6}$$

证明 由微分中值定理可知 $F(x)$ 满足 Lipschitz 条件,从而 $F(x)$ 是绝对连续函数,所以 $F'(x)$ 可积且(6·3·6) 式成立. ▌

我们还可以证明比系 1 更一般的结论:若 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上处

处可微，并且 $F'(x)$ 在$[a,b]$上可积，则(6·3·6)式成立(证明可见[1]《实变函数论》第九章 §8).

* **例 6·3·2**　设 $K_{\frac{1}{2}}$ 是$\frac{1}{2}$－Cantor 集，开集$[0,1]\setminus K_{\frac{1}{2}}$的所有构成区间为$\{(a_n,b_n)\}$. 定义$[0,1]$上的函数 $F(x)$：在 $K_{\frac{1}{2}}$ 上 $F(x)$ 为 0，在每个区间(a_n,b_n)上 $F(x)$ 为

$$(x-a_n)^2(x-b_n)^2\sin[(b_n-a_n)(x-a_n)(x-b_n)]^{-1}.$$

可以证明 $F(x)$ 在$[0,1]$上处处可微，并且 $F'(x)$ 在$[0,1]$上有界. 由系 1 知

$$F(x)=\int_0^x F'(t)\mathrm{d}t\ (x\in[0,1]).$$

但 $F'(t)$ 在每个$[0,x](x\in(0,1])$上都不是 R 可积的(证明可见[1]第五章 §5·5).

要从(处处有限的)导函数构造出原函数，通过 Lebesgue 不定积分比通过 Riemann 不定积分(指变上限定积分)要有效得多，这是 Lebesgue 积分的又一优点. 但是还有这样的函数存在，它在一个闭区间上处处可微，但导函数在此闭区间上不是 L 可积的，因此 Lebesgue 不定积分也只能说是“求(有限)导函数”运算的“一部分”逆运算. Lebesgue 积分的进一步推广——Denjoy－Perron 积分能够完全解决从(处处有限的)导函数求原函数的问题(参见[1]第十六章).

我们来看一个应用定理 5 的例子.

* **例 6·3·3**　若 $f(x)$ 在$[a,b]$上绝对连续，则在直角坐标系 XOY 下曲线$\{(x,y)\mid x\in[a,b],y=f(x)\}$的长 l 可以由下面的公式来计算

$$l=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.\qquad(6\cdot3\cdot7)$$

这个结论的证明可参见[1]附录 Ⅰ. 当 $f(x)$ 绝对连续时公式(6·3·7)中的被积函数一定 L 可积但未必 R 可积，这说明

Lebesgue 积分在反映实际问题中的数量关系方面比 Riemann 积分要好.

引理1 若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的可积函数,并且对任何 $x\in[a,b]$ 都有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

则 $f(x)=0$, a. e. 于$[a,b]$.

证明 (1°) 设开区间 $I=(c,d)\subset[a,b]$,则

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \int_a^d f(t)\mathrm{d}t - \int_a^c f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

(2°) 设开集 $G\subset[a,b]$,则 G 可表为可列个两两无交的开区间 I_i之并 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. 由 $f(x)$ 积分的绝对连续性及(1°),

$$\int_G f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{\bigcup_{i=1}^{n} I_i} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

(3°) 设可测集 $A\subset[a,b]$. 令 $A_1 = A\setminus\{a,b\}$,则存在开集列 $\{G_n\}$ 使

$$A_1\subset G_n\subset[a,b],\ m(G_n\setminus A_1)\to 0\ (n\to\infty).$$

由 $f(x)$ 积分的绝对连续性及(2°),

$$\int_A f(t)\mathrm{d}t = \int_{A_1} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{G_n} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

(4°) 记 $E_1=\{x\,|\,f(x)\geqslant 0\}$, $E_2=\{x\,|\,f(x)<0\}$,则

$$[a,b]=E_1+E_2.$$

由(3°)知 $\int_{E_1} f(t)\mathrm{d}t = 0$,故

$$f(x)=0,\ \text{a. e. 于 } E_1.$$

同理可证

$$f(x)=0,\ \text{a. e. 于 } E_2.$$

所以

$$f(x)=0,\ \text{a. e. 于}[a,b]. \blacksquare$$

定理 6　若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，则 $f(x)$ 的不定积分 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，并且

$$F'(x) = f(x),\ \text{a. e. 于 } [a,b].$$

证明　定理 1 已指出 $f(x)$ 的不定积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t + c$$

是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. 在上式中取 $x = a$ 得 $c = F(a)$. 对任意 $x \in [a,b]$，由定理 5

$$\int_a^x [F'(t) - f(t)]\mathrm{d}t = \int_a^x F'(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$= [F(x) - F(a)] - [F(x) - F(a)] = 0.$$

由引理 1 即知 $F'(x) = f(x)$，a. e. 于 $[a,b]$. ▌

6 · 3 · 4　Lebesgue 积分的分部积分公式和换元积分公式

命题 1　若 $f(x)$、$g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数，则

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

证明　由定理 4 及数学分析中的微分法则知

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x),\ \text{a. e. 于}[a,b].$$

由定理 4 及 $f(x)$，$g(x)$ 有界可测知 $f(x)g'(x)$，$f'(x)g(x)$ 可积，由定理 2 知 $f(x)g(x)$ 绝对连续，由定理 5，

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x)g(x)]'\mathrm{d}x - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x.$$ ▌

* **命题 2**　设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数，若 $\varphi(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上严格增加的绝对连续函数，并且 $a = \varphi(\alpha)$、$b = \varphi(\beta)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

这个命题的证明可参见[1]《实变函数论》第九章 §5.

*6·3·5 有界变差函数的 Lebesgue 分解

定义 3 设 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续有界变差函数. 若 $f'(x)=0$, a. e 于$[a,b]$并且 $f(x)$ 不等于常数,就称 $f(x)$ 是$[a,b]$上的**奇异函数**

由定理 5 立即知奇异函数一定不是绝对连续函数. §6·1 例 6·1·2 所说的 Cantor 函数 $\theta(x)$ 就是一个奇异函数.

定理 7 $[a,b]$上的连续有界变差函数 $g(x)$ 可以唯一地表示成

$$g(x)=h(x)+r(x), \tag{6·3·8}$$

其中 $h(x)$ 是绝对连续函数并且 $h(a)=g(a)$, $r(x)$ 是奇异函数或是常数 0.

证明 第一步证 $g(x)$ 可表为(6·3·8):由 §6·2 定理 4 知 $g'(x)$ 是在$[a,b]$上几乎处处有定义的可积函数,令

$$h(x)=\int_a^x g'(x)\mathrm{d}x+g(a),$$

则 $h(x)$ 是$[a,b]$上的绝对连续函数,并且 $h(a)=g(a)$. 令

$$r(x)=g(x)-h(x).$$

由定理 6 知

$$r'(x)=g'(x)-h'(x)=g'(x)-g'(x)=0,\ \text{a. e. 于}[a,b].$$

若 $r(x)$ 不等于常数则为奇异函数;若 $r(x)$ 等于常数,由

$$r(a)=g(a)-h(a)=0 \text{ 知 } r(x)\equiv 0.$$

而

$$g(x)=h(x)+r(x).$$

第二步证 $g(x)$ 表为(6·3·8)的唯一性:设又有表示 $g(x)=h_1(x)+r_1(x)$,其中 $h_1(x)$ 绝对连续且 $h_1(a)=g(a)$, $r_1(x)$ 奇异或者为 0,则

$$h(x)-h_1(x)=r_1(x)-r(x),$$

从而 $h(x)-h_1(x)$ 在$[a,b]$上几乎处处导数为 0. 由于 $h(x)-h_1(x)$ 为绝对连续函数,根据定理 5 知 $h(x)-h_1(x)$ 在$[a,b]$上为一常数,但

$$h(a) = g(a) = h_1(a),$$

故 $h(x) \equiv h_1(x)$，又可知 $r_1(x) \equiv r(x)$. ▌

定理 8 （Lebesgue 分解定理） 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $f(x)$ 可以分解成

$$f(x) = s(x) + h(x) + r(x),$$

其中 $s(x)$ 是 $f(x)$ 的跳跃函数，$h(x)$ 是一个绝对连续函数，$r(x)$ 是一个奇异函数或是常数 0.

证明　由 §6·2 定理 5 及本节定理 7 立即可知. ▌

§6·4　Riemann－Stieltjes 积分

6·4·1　R－S 积分的定义及性质

设在线段 $[a,b]$ 上分布着物质（在端点 a 上没有物质），对任意 $x \in [a,b]$，把分布在线段 $[a,x]$ 上的物质总质量记为 $g(x)$，则 $[a,b]$ 上全部物质的质心是

$$\lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{g(b)} [g(x_i) - g(x_{i-1})],$$

其中

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$d(T) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(x_i - x_{i-1}), \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

又 $[a,b]$ 上全部物质对于原点的转动惯量是

$$\lim_{d(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 [g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

把物理中诸如此类的问题进行抽象，Stieltjes 提出了 R－S 积分的概念（R－S 是 Riemann－Stieltjes 的简写）.

定义 1　设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的有限函数. 任取 $[a,b]$ 的划分

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

记

$$d(T)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1}).$$

又任取

$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

记

$$\{\xi_i\}=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$$

(称 $\{\xi_i\}$ 为划分 T 的一个**介点集**). 相应于 $T,\{\xi_i\}$ 作和数

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

(称 σ 为函数 $f(x)$ 关于 $g(x)$ 的一个 **R－S 和数**). 若当 $d(T)\to 0$ 时相应的 R－S 和数 σ 总趋于一个确定的有限数 a(不论划分 T 的取法如何,也不论 T 的介点集 $\{\xi_i\}$ 如何取法),就称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 $g(x)$ 是 **R－S 可积的**,而把极限

$$\lim_{d(T)\to 0}\sigma=a$$

称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 $g(x)$ 的 **R－S 积分**,记作

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)(\text{或}\int_a^b f\mathrm{d}g).$$

显然当 $g(x)\equiv x$ 时 R－S 积分便成为 R 积分.

R－S 积分有如下显而易见的性质:

定理 1 下面的(i)－(iv),若等号右边的积分存在,则等号左边的积分也存在,并且等式成立.

(i) $\int_a^b(f_1+f_2)\mathrm{d}g=\int_a^b f_1\mathrm{d}g+\int_a^b f_2\mathrm{d}g$;

(ii) $\int_a^b f\mathrm{d}(g_1+g_2)=\int_a^b f\mathrm{d}g_1+\int_a^b f\mathrm{d}g_2$;

(iii) $\int_a^b \alpha f\mathrm{d}(\beta g)=\alpha\beta\int_a^b f\mathrm{d}g\ (\alpha,\beta\in R^1)$;

(iv) $\int_a^c f\mathrm{d}g+\int_c^b f\mathrm{d}g=\int_a^b f\mathrm{d}g\ (a<c<b)$.

注意上面的(iv),当等号左边的两个积分都存在时等号右边的积分可能不存在.

例 6·3·1　设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0],\\ 1, & x\in(0,1]\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0),\\ 1, & x\in[0,1],\end{cases}$$

则 $\int_{-1}^{0} f\mathrm{d}g=0,\int_{0}^{1} f\mathrm{d}g=0$, 但 $\int_{-1}^{1} f\mathrm{d}g$ 不存在.

证明　任取划分 $T:-1=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$,使 0 不是 T 的分点,则存在 j 使 $x_{j-1}<0<x_j$. 又任取 T 的介点集 $\{\xi_i\}$. 相应于 T、$\{\xi_i\}$,作 f 关于 g 的 R－S 和数 σ,则

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

$$=f(\xi_j)=\begin{cases}0, & 当\ \xi_j\leqslant 0\ 时,\\ 1, & 当\ \xi_j>0\ 时.\end{cases}$$

由此可知当 $d(T)\to 0$ 时 σ 不趋于一个确定的数,即 $\int_{-1}^{1} f\mathrm{d}g$ 不存在. ▌

* **定理 2**　若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 存在,则 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)$ 存在,并且

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

证明　相应于任意划分 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 及 T 的任意介点集 $\{\xi_i\}$,作 g 关于 f 的 R－S 和数 σ,则

$$\begin{aligned}\sigma=&\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)[f(x_i)-f(x_{i-1})]\\ =&-\Big\{\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[g(\xi_{i+1})-g(\xi_i)]\\ &+f(a)[g(\xi_1)-g(a)]\\ &+f(b)[g(b)-g(\xi_n)]\Big\}\\ &+f(b)g(b)-f(a)g(a).\end{aligned}\tag{6·4·1}$$

把划分 $a\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\cdots\leqslant\xi_n\leqslant b$(其中有等号成立时,等号所连二数实为同一分点)记作 $\hat{T}$,则(6·4·1)式后端大括号内的式子恰是 f 关于 g 相应于 $\hat{T}$ 的一个R-S和数,记其为 $\hat{\sigma}$. 当 $d(T)\to 0$ 时显然 $d(\hat{T})\to 0$,而 $d(\hat{T})\to 0$ 时 $\hat{\sigma}\to\int_a^b f\mathrm{d}g$,所以当 $d(T)\to 0$ 时

$$\sigma\to-\int_a^b f\mathrm{d}g+f(b)g(b)-f(a)g(a).$$

这就证明了 $\int_a^b g\mathrm{d}f$ 存在并且

$$\int_a^b g\mathrm{d}f=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f\mathrm{d}g.\ \blacksquare$$

设 $\alpha(x)$ 是 $[a,b]$ 上的单调不减函数,并且在 (a,b) 上右方连续. 相应于 $\alpha(x)$ 作 R' 上的函数

$$\tilde{\alpha}(x)=\begin{cases}\alpha(a), & x\in(-\infty,a),\\ \alpha(a+0), & x=a,\\ \alpha(x), & x\in(a,b],\\ \alpha(b), & x\in(b,+\infty),\end{cases}\tag{6·4·2}$$

则 $\tilde{\alpha}(x)$ 是 R' 上的一个分布函数.

* **定理3** 设 $\alpha(x),\tilde{\alpha}(x)$ 是上述的函数. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 $\alpha(x)$ 是R-S可积的,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于分布函数 $\tilde{\alpha}(x)$ 是L-S可积的,并且

$$(\mathrm{R-S})\int_a^b f(x)\mathrm{d}\alpha(x)=(\mathrm{L-S})\int_{[a,b]}f(x)\mathrm{d}\tilde{\alpha}(x).$$

这个定理的证明与 §5·2 定理1类似.

我们已经知道L-S积分是L积分的推广(这个推广类似于R积分到R-S积分的推广). 由于定理3,我们还可以说L-S积分是某种类型的R-S积分的推广(这个推广类似于R积分到L积分的推广).

* **例 6·4·2**　设

$$\alpha(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0),\\ 1, & x\in[0,1],\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-1,0],\\ 1, & x\in(0,1].\end{cases}$$

由例 6·4·1 知(R－S)$\int_{-1}^{1} f\mathrm{d}\alpha$不存在. 但(L－S)$\int_{[-1,1]} f\mathrm{d}\tilde{\alpha}=0$，其中 $\tilde{\alpha}(x)$ 是由 $\alpha(x)$ 按(6·4·2) 作出的函数.

6·4·2　连续函数关于有界变差函数的 R－S 积分

定理 4　若 $f(x)$ 是$[a,b]$上的连续函数，$g(x)$ 是$[a,b]$上的有界变差函数，则 $f(x)$ 在$[a,b]$上关于 $g(x)$ 是 R－S 可积的.

证明　由 §6·2 定理 3 知 $g(x)$ 可表为两个单调不减函数的差. 由于定理 1(ii)，(iii)，我们只需设 $g(x)$ 是单调不减函数来完成证明.

相应于$[a,b]$的划分 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，我们作如下的符号规定：

$$m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\qquad M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x);$$

$$s(T)=\sum_{i=1}^{n} m_i[g(x_i)-g(x_{i-1})],$$

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n} M_i[g(x_i)-g(x_{i-1})];$$

$$\sigma(T)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})],$$

其中$\{\xi_i\}$是 T 的任一介点集. 由 $g(x)$ 单调不减知下面的两个结论成立：

(i) $s(T)\leqslant\sigma(T)\leqslant S(T)$.

(ii) 对于$[a,b]$的任意两个划分 T_1,T_2，恒有 $s(T_1)\leqslant S(T_2)$. (事实上，合并 T_1,T_2 的所有分点得到$[a,b]$的划分 T_3，显然

$$s(T_1) \leqslant s(T_3) \leqslant S(T_3) \leqslant S(T_2).)$$

记

$$a = \sup\{s(\hat{T}) \mid \hat{T} \text{ 为}[a,b]\text{ 的划分}\},$$

设 T 为$[a,b]$ 的任意划分,由(ii) 可知

$$s(T) \leqslant a \leqslant S(T).$$

再由(i) 可知

$$|\sigma(T) - a| \leqslant S(T) - s(T).$$

任给 $\varepsilon > 0$,由 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续知存在 $\delta > 0$,使当

$$|x' - x''| < \delta \quad (x'、x'' \in [a,b]) \text{ 时}$$

就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

因此当 $d(T) < \delta$ 时

$$M_i - m_i \leqslant \varepsilon \ (i = 1,2,\cdots,n),\text{从而}$$

$$|\sigma(T) - a| \leqslant S(T) - s(T) \leqslant \varepsilon[g(b) - g(a)].$$

所以当 $d(T) \to 0$ 时 $\sigma(T) \to a$. 即知 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上关于 $g(x)$ 是 R－S 可积的. ▌

定理 5 设 $f(x)$ 是$[a,b]$ 上的连续函数,$g(x)$ 是$[a,b]$ 上的有界变差函数,则

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)\right| \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \cdot \bigvee_a^b(g).$$

证明 相应于任意划分 T: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 及 T 的任意介点集 $\{\xi_i\}$, 作 f 关于 g 的 R－S 和数 σ,则

$$\begin{aligned}|\sigma| &= \left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]\right| \\ &\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \cdot \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \\ &\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \cdot \bigvee_a^b(g).\end{aligned}$$

由定理 4 及上式知定理 5 成立. ▌

* **命题 1**　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处可微且 $g'(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积，则

$$(R-S)\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = (R)\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

这个命题的证明留给读者考虑.

* **命题 2**　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续，则

$$(R-S)\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = (L)\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{6·4·3}$$

这个命题的证明可参见[1]《实变函数论》第九章 §7.

注　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续有界变差函数，此时(6·4·3)式两边的积分都存在，但(6·4·3)式未必成立. 例如，设 $[a,b]=[0,1]$，$f(x)\equiv 1$，$g(x)$ 为 Cantor 函数 $\theta(x)$，此时(6·4·3)式左边为 1，而右边为 0.

下面的讨论主要是为 §9·3 研究连续函数空间 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函的表示问题作准备.

定义 2　设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 若 $g(x)$ 在 (a,b) 上右方连续并且 $g(a)=0$，就称 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的**正规有界变差函数**. $[a,b]$ 上正规有界变差函数的全体记作 $V_0[a,b]$.

定理 6　(i) 设 h 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则在 $V_0[a,b]$ 中有且仅有一个函数 g 满足：

(a) 在 h 的连续点上 $g(x)=h(x)-h(a)$，

(b) $g(b)=h(b)-h(a)$，

(c) $\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)\leqslant \overset{b}{\underset{a}{V}}(h)$.

(我们把这样的 g 称为 h 的正规化有界变差函数)

(ii) 设 h 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则在 $V_0[a,b]$ 中有且仅有一个函数 g，使对于 $[a,b]$ 上的任何连续函数 f 都有

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^b f\mathrm{d}h.$$

* **证明** (i) 作$[a,b]$上的函数

$$g(x)=\begin{cases}0, & x=a,\\ h(x+0)-h(a), & x\in(a,b),\\ h(b)-h(a), & x=b.\end{cases} \tag{6·4·4}$$

显然 g 满足条件(a)(b).

下证 g 在(a,b)上右方连续;设 $x_0\in(a,b)$,对任意 $\varepsilon>0$,必存在 $\delta>0$,使当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时

$$|h(x)-h(x_0+0)|<\varepsilon,$$

从而

$$|h(x+0)-h(x_0+0)|\leqslant\varepsilon,$$

于是

$$|g(x)-g(x_0)|\leqslant\varepsilon,$$

所以 $g(x)$ 在 x_0右方连续.

再证 g 满足条件(c):任作$[a,b]$的划分:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

并任取

$$y_i\in(x_i,x_{i+1})\quad(i=1,2,\cdots,n-1),$$

则

$$V(h;x_0,y_1,\cdots,y_{n-1},x_n)\leqslant\bigvee_a^b(h). \tag{6·4·5}$$

令

$$y_i\to x_i,\qquad i=1,2,\cdots,n-1,$$

这时

$$h(y_i)\to h(x_i+0)=g(x_i)+h(a),$$

从而(6·4·5)式左端趋于$V(g;x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)$,因此

$$V(g;x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)\leqslant \bigvee_a^b(h).$$

所以 $\bigvee_a^b(g)\leqslant \bigvee_a^b(h)$. 总之，$g$ 是 $V_0[a,b]$ 中满足条件(a)(b)(c) 的函数.

由于 $V_0[a,b]$ 中满足条件(a)(b)(c) 的函数必然满足(6·4·4) 式，所以这样的函数是唯一的.

(ii) 第一步证所述 g 的存在性. 设 $\hat{h}$ 是 h 的正规化有界变差函数，则 $\hat{h}\in V_0[a,b]$，下证对于$[a,b]$上的任何连续函数 f 都有

$$\int_a^b f\mathrm{d}\hat{h}=\int_a^b f\mathrm{d}h.$$

相应于每个自然数 n 作$[a,b]$ 的划分

$$T_n:a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n-1}^{(n)}<x_{m_n}^{(n)}=b,$$

使 $x_1^{(n)},\cdots,x_{m_n-1}^{(n)}$ 是 $h(x)$ 的连续点，并且使 $\lim\limits_{n\to\infty}d(T_n)=0$(由于 h 的不连续点至多可列个，这样的 T_n 是可以作出的). 相应于划分 T_n 及 T_n 的任意介点集$\{\xi_i^{(n)}\}$，作 f 关于h 的 R－S 和数 σ，则

$$\begin{aligned}\sigma&=\sum_{i=1}^{m_n}f(\xi_i^{(n)})[h(x_i^{(n)})-h(x_{i-1}^{(n)})]\\&=\sum_{i=1}^{m_n}f(\xi_i^{(n)})[\hat{h}(x_i^{(n)})-\hat{h}(x_{i-1}^{(n)})].\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 便得到

$$\int_a^b f\mathrm{d}h=\int_a^b f\mathrm{d}\hat{h}.$$

第二步证所述 g 的唯一性. 设 $g\in V_0[a,b]$，且对$[a,b]$上的任何连续函数 f 都有

$$\int_a^b f\mathrm{d}g=\int_a^b f\mathrm{d}h,$$

下证 g 即 h 的正规化有界变差函数 $\hat{h}$.

由第一步知对$[a,b]$ 上的任意连续函数 f 恒有

$$\int_a^b f\mathrm{d}\hat{h}=\int_a^b f\mathrm{d}h,$$

从而恒有

$$\int_a^b f\mathrm{d}(g-\hat{h})=0. \tag{6·4·6}$$

令 $\varphi=g-\hat{h}$，则 $\varphi\in V_0[a,b]$. 要证 $g=\hat{h}$ 只需证 $\varphi(x)\equiv 0$.

在(6·4·6)中取 $f(x)\equiv 1$ 得 $\varphi(b)-\varphi(a)=0$,故

$$\varphi(b)=\varphi(a)=0.$$

任取 λ,μ 满足 $a<\lambda<\mu<b$, 作函数

$$f_1(x)=\begin{cases}\mu-\lambda, & x\in[a,\lambda],\\ \mu-x, & x\in(\lambda,\mu),\\ 0, & x\in[\mu,b].\end{cases}$$

$f_1(x)$ 在$[a,b]$上连续. 根据定理2并注意到 $f_1(x)$ 在$[a,\lambda]$,$[\mu,b]$上为常数,就得到

$$\begin{aligned}\int_a^b f_1(x)\mathrm{d}\varphi(x)&=f_1(x)\varphi(x)\Big|_a^b-\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}f_1(x)\\&=\int_\lambda^\mu\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由(6·4·6)知

$$\int_\lambda^\mu\varphi(x)\mathrm{d}x=0. \tag{6·4·7}$$

由 $\lambda\in(a,b)$ 知 λ 是 φ 的右方连续点,故对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $x\in(\lambda,\lambda+\delta)$ 时 $|\varphi(x)-\varphi(\lambda)|<\varepsilon$. 取 μ 满足 $\lambda<\mu<\lambda+\delta$,由(6·4·7)知

$$\begin{aligned}|\varphi(\lambda)|&=\left|\frac{1}{\mu-\lambda}\int_\lambda^\mu[\varphi(\lambda)-\varphi(x)]\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\frac{1}{\mu-\lambda}\int_\lambda^\mu|\varphi(\lambda)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.\end{aligned}$$

由正数 ε 的任意性知 $\varphi(\lambda)=0$. 由 λ 是(a,b)中的任意点及 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ 知 $\varphi(x)$ 在$[a,b]$上恒等于0. 所以 $g=\hat{h}$. ▌

习　题　六

1. 设 $E \subset [a,b]$，$\overline{E} = [a,b]$. 若 $[a,b]$ 上的两个单调函数在 E 上处处相等，则它们在 $[a,b]$ 上有相同的连续点和可微点.

2. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格增函数，p 是一个非负实数. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处有不大于 p 的导数，则对于 $[a,b]$ 的任意子集 E 恒有 $m^* f(E) \leqslant p \cdot m^* E$. 试不依据 §6·1 引理 2 来证明之.

3. 证明 $[a,b]$ 上的有限函数 $f(x)$ 在点 $x_0 \in [a,b]$ 的所有列导数组成一个闭集.

4. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有限函数，$E \subset [a,b]$，M 是一个实数. 若 $f(x)$ 在 E 的每个点 x_0 有导数 $f'(x_0)$，并且 $|f'(x_0)| \leqslant M$，则 $m^* f(E) \leqslant M \cdot m^* E$.

5. 若 $f(x)$ 是 E 上的可测函数，A 是 R^1 中的可测集，此时 $E[f \in A]$ 可能不是可测集. 试举例说明之.（提示：利用 Cantor 函数）

6. 若 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格增连续函数，$g(a) = \alpha$，$g(b) = \beta$，$f(y)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上的可测函数，此时 $f[g(x)]$ 可能不是 $[a,b]$ 上的可测函数. 试举例说明之.（提示：利用 Cantor 函数）

7. 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & \text{当 } x \in (0,1] \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

当 α 取什么数时是有界变差的? 试讨论之.

8. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上有的界变差函数，若存在正数 ε 使在 $[a,b]$ 上 $|g(x)| \geqslant \varepsilon$，则 $f(x)/g(x)$ 也是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

9. $[a,b]$ 上的有限函数 $f(x)$ 为有界变差函数的充要条件是：存在 $[a,b]$ 上的单调不减函数 $\varphi(x)$，使当 $x' < x''$（$x', x'' \in [a,b]$）

时就有

$$f(x'')-f(x')\leqslant\varphi(x'')-\varphi(x').$$

10. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 若 $|f(x)|$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

11. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列,在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $f(x)$. 若存在有限数 M 使 $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f_n)\leqslant M\ (n=1,2,\cdots)$,又在 $[a,b]$ 上 $|f(x)|<\infty$,则 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

12. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则

$$\int_a^x|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)\quad(x\in[a,b]).$$

13. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)=|f'(x)|,\text{a. e. 于}[a,b].$$

(此题较难,可放到第 23 题之后做)

14. $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数的充要条件是:对任意 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $[a,b]$ 中有限个两两无交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}$ 满足 $\sum\limits_i(b_i-a_i)<\delta$ 时(不论 $\{(a_i,b_i)\}$ 的取法如何)恒有

$$\left|\sum_i[F(b_i)-F(a_i)]\right|<\varepsilon.$$

15. $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件的充要条件是:对任意 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当 $[a,b]$ 中有限个开区间 $\{(a_i,b_i)\}$(未必两两无交)满足 $\sum\limits_i(b_i-a_i)<\delta$ 时(不论 $\{(a_i,b_i)\}$ 的取法如何)恒有

$$\left|\sum_i[F(b_i)-F(a_i)]\right|<\varepsilon.$$

16. 讨论函数

$$F(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x^\beta}, & \text{当 } x\in(0,1]\text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=0\text{ 时}\end{cases}$$

的绝对连续性.

17. 若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数,并且 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上处处非 0,则 $f(x)/g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

18. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续,并且几乎处处有非负导数,则 $f(x)$ 是单调不减函数.

19. $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件的充要条件是:$F(x)$ 可表为 $[a,b]$ 上的一个有界可测函数的不定积分.

20. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数,证明对几乎所有 $x_0 \in [a,b]$ 成立

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} [f(x) - f(x_0)]\mathrm{d}x = 0.$$

21. 证明在 $[a,b]$ 上处处存在有限导数的单调函数是绝对连续函数.

22. $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数的充要条件是:$\overset{x}{\underset{a}{V}}(F)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

23. 若 $F(x)$ 为 $[a,b]$ 上的绝对连续函数,则

$$\int_a^x |F'(t)|\,\mathrm{d}t = \overset{x}{\underset{a}{V}}(F) \quad (x \in [a,b]).$$

(要求不用第 13 题来证明,答案可见于[1]第九章 §4)

24. 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, … 是 $[a,b]$ 上的一列可积函数,并且其积分具有等度的绝对连续性.若对于 $[a,b]$ 的每个可测子集 e,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_e f_n(x)\mathrm{d}x$ 都存在且为有限数,则存在 $[a,b]$ 上的可积函数 $f(x)$,使得对 $[a,b]$ 上的任何有界可测函数 $g(x)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

25. 设 E 为 R^1 中的可测集.对于 $x_0 \in R^1$ 若极限

$$\lim_{h\to 0+}\frac{m(E\cap(x_0-h,x_0+h))}{2h}$$

存在，就称此极限值为 E 在点 x_0 的**密度**. 证明：(*i*) 对几乎所有 $x\in E$，E 在点 x 的密度为 1；(*ii*) 对几乎所有 $x\in R^1\setminus E$，E 在点 x 的密度为 0.

26. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于 $g(x)$ 是 R－S 可积的. 若 $\varphi(t)$ 是 $[\alpha,\beta]$ 上严格增加的连续函数，并且 $a=\varphi(\alpha)$、$b=\varphi(\beta)$，则 $f[\varphi(t)]$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上关于 $g[\varphi(t)]$ 是 R－S 可积的，并且

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\mathrm{d}g[\varphi(t)]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

27. 证明 §6·4 命题 1.

28. 设在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别为连续函数与有界变差函数，则

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}g(t)$$

是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，并且此函数在 $g(x)$ 的连续点上是连续的.

29. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列，在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，又设 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}g(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

30. 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数. 又设 $\{g_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数列，在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $g(x)$. 若

$$\bigvee_a^b(g_n)\leqslant M<\infty\qquad(n=1,2,\cdots),$$

在 $[a,b]$ 上 $|g(x)|<\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}g_n(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

附 录

勒贝格(Lebesgue)简介

勒贝格(Henri Leon Lebesgue)是法国数学家,1875 年 6 月 8 日生于博韦,1941 年 7 月 26 日卒于巴黎.

勒贝格从小勤奋好学,成绩优秀,特别善长计算.他于 1894 年考入巴黎的高等师范学校,1897 年大学毕业后在该校图书馆工作了两年.

从 1899 年至 1902 年勒贝格在南锡的一所中学任教,在繁忙的工作之余,孜孜不倦地研究实变函数理论,并于 1902 年发表了著名的博士论文"积分"、长度与面积".在这篇文章中,勒贝格创立了后来以他的名字命名的积分理论.

从 1902 年开始,勒贝格在大学里任教(1902—1906 在雷恩;1906—1910 在普瓦蒂埃),并先后于 1904 年和 1906 年出版了他的重要著作:《积分法和原函数分析的讲义》、《三角级数讲义》.

1910—1919 年,勒贝格在巴黎(韶邦)大学担任讲师,1920 年转聘为教授.这期间,他又陆续发表了许多关于函数的微分、积分理论的研究成果.

1921 年,勒贝格被法兰西学院聘为教授,翌年作为C. Jordan的后继人被选为巴黎科学院院士,此时,他的论文和著作已达 90 多种,内容除了积分理论外,还涉及集合与函数的构成、变分学、曲面面积以及维数理论等.在勒贝格生前最后 20 年,研究工作主要涉及教育、历史及初等几何.

由于勒贝格在实变函数理论方面的杰出贡献,他相继获得胡勒维格奖(1912 年)、彭赛列奖(1914 年)和赛恩吐奖(1917),许多国家和地区(如伦敦、罗马、丹麦、比利时、罗马尼亚和波兰)的科学院都聘他为院士,许多大学授予他名誉学位,以表彰他的贡献.

第七章　距离空间·赋范线性空间

§7·1　距离空间的定义及例

在数学分析中主要是研究有限维欧几里德空间及其上的函数的分析性质. n 维欧几里德空间有许多基本概念，如球、开集、导集、闭集、极限等等，利用这些概念又产生了 R^n 上函数的有界性、连续性、函数列的收敛性、一致收敛性等等重要的数学概念. 我们知道，所有这些概念都可以基于 R^n 中两点 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 与 $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$ 间的距离

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}$$

来定义. 例如，当我们说 R^n 中点列 $\{x_n\}$ 收敛于一点 $x\in R^n$，那就是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$. 所以，“距离”这个概念在数学分析中起着根本的作用. 现在，我们将“距离”这个概念抽象出来移植到一般的抽象集合上去，从而得出距离空间的概念.

定义1　设X是一个集合，如果按某一法则对于X中任意二元素 x,y 都有一个非负实数 $\rho(x,y)$ 与之对应，且满足下列条件：

(i) $\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$,

(ii) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

(iii) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$,

则称 $\rho(x,y)$ 是 x 与 y **间的距离**，且称 X×X 上的函数 $\rho=\rho(\cdot,\cdot)$ 为 X 上的一个**距离**，并称 X 按 ρ 成为一个**距离空间**(或**度量空间**)，

记作(X,ρ).

在不引起混淆的情况下，往往简单地说X是一距离空间，并形象地把X的元素称为“点”，把X的子集称为“点集”.

距离ρ所应满足的条件(i)，(ii)，(iii)通常称为距离三公理. 公理(iii)也称三角不等式或三角形公理. 在R^3中三角不等式即表示“三角形任一边之长不超过其余二边长之和”—— 这正是“三角形公理”这个术语的来源.

定义 2 设X是以ρ为距离的距离空间. 如果$\{x_n\} \subset X$，$x \in X$，有

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x) = 0,$$

则称点列x_n**趋于(收敛于)**x，或称x是x_n的**极限**，记作

$$x_n \to x \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

有极限的点列称作**收敛列**；如果$\{x_n\} \subset X$，有

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho(x_n,x_m) = 0, \qquad (7\cdot1\cdot1)$$

则称$\{x_n\}$是一个**基本列**，或称点列$\{x_n\}$是**本来收敛的**，基本列也称作 Cauchy 列.

显然，收敛列必是基本列. 事实上，如果$x_n \to x$，则对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在正整数N，使当$n > N$时$\rho(x_n,x) < \frac{\varepsilon}{2}$，于是当$n$，$m > N$时

$$\rho(x_n,x_m) \leqslant \rho(x_n,x) + \rho(x_m,x) < \varepsilon,$$

故$(7\cdot1\cdot1)$式成立. 但其逆一般不成立，即在一个距离空间中基本列未必收敛.

例如，取X为R^1中除去原点后所成之集，按距离

$$\rho(x,y) = |x-y|,$$

X是一距离空间，

$$x_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

是 X 中一基本列，但它在 X 中无极限(因 $0 \overline{\in} X$).

定义 3　如果距离空间 X 中任一基本列都有极限，则称 X 是**完备距离空间**.

例如，由 Cauchy 收敛准则，n 维欧几里德空间 R^n 是完备距离空间.

我们看到，在距离空间中极限的概念是通过距离来定义的. 但是应当注意，一个非空集 X，当它不仅含有一个点时，可以在 X 上定义不同的距离，而且一般地说不同的距离所决定的收敛是不一样的.

例如，在 R^1 中可以定义距离

$$\rho_1(x,y) = |x-y|,$$

也可以定义距离

$$\rho_2(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = y, \\ 1, & \text{当 } x \neq y, \end{cases}$$

点列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 在 ρ_1 下是一收敛列，它以 0 为极限，但在 ρ_2 下却不是收敛列，甚至不是基本列.

如果集合 X 上的两个距离 ρ_1、ρ_2 所决定的收敛相同，我们就说 ρ_1 与 ρ_2 等价. 更确切地说，我们有

定义 4　称集合 X 上的两距离 ρ_1、ρ_2 是等价的，是指对于 X 中任一点列 $\{x_n\}$ 及任一点 $x_0 \in X$，

$$\rho_1(x_n, x_0) \to 0 \Leftrightarrow \rho_2(x_n, x_0) \to 0.$$

例 7·1·1　在实数集 R^1 中定义

$$\rho_1(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}, \qquad \forall x、y \in R^1,$$

则 ρ_1 是 R^1 上的一个距离.

事实上，距离公理中的(i)，(ii) 显然成立. 下证(iii) 成立：由于函数 $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ 是$(0,\infty)$ 上的单调增加函数，再由

$$|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$$

即得

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leqslant \frac{|x-z|+|z-y|}{1+|x-z|+|z-y|}$$
$$\leqslant \frac{|x-z|}{1+|x-z|} + \frac{|z-y|}{1+|z-y|}, \quad (7\cdot1\cdot2)$$

所以

$$\rho_1(x,y) \leqslant \rho_1(x,z) + \rho_1(z,y).$$

容易看出,这里定义的距离 $\rho_1(x,y)$ 与通常在 R^1 中定义的距离

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

是等价的. 但在以后如不加声明,凡说 R^1 中距离都是指

$$\rho(x,y) = |x-y|.$$

例 7·1·2 空间 $S(E)$. 设 E 是 R^n 中可测集且 $0 < mE < +\infty$. 把一切在 E 上几乎处处取有限值的可测函数所成之集记为 $S(E)$,并且把 $S(E)$ 中凡几乎处处相等的函数看成同一个元素,在 $S(E)$ 上定义距离

$$\rho(f_1,f_2) = \int_E \frac{|f_1(x)-f_2(x)|}{1+|f_1(x)-f_2(x)|}\mathrm{d}x, \ \forall f_1,f_2 \in S(E), \quad (7\cdot1\cdot3)$$

则 $S(E)$ 成为一个完备的距离空间. $S(E)$ 可简记作 S.

证明 ρ 显然满足距离公理(i) 和(ii),下证满足(iii):由(7·1·2) 式知对任 $f_1,f_2,f_3 \in S$ 有

$$\frac{|f_1-f_2|}{1+|f_1-f_2|} \leqslant \frac{|f_1-f_3|}{1+|f_1-f_3|} + \frac{|f_2-f_3|}{1+|f_2-f_3|},$$

两边在 E 上积分即得 $\rho(f_1,f_2) \leqslant \rho(f_1,f_3) + \rho(f_2,f_3)$.

由第五章习题知,S 中 $f_n \to f$ 等价于函数列 $\{f_n(x)\}$ 依测度收敛于 $f(x)$. 类似地可以证明 S 中 $\{f_n\}$ 为基本列等价于函数列 $\{f_n(x)\}$ 为"依测度基本列", 即对任意 $\varepsilon > 0$ 都有

$$\lim_{m,n\to\infty} mE[|f_n - f_m| \geqslant \varepsilon] = 0 .$$

由第四章习题知依测度基本列等价于依测度收敛列. 这就说明 S 是完备的. ▌

例 7·1·3　空间 s. 一切实数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 所成之集记为 s. 在 s 中定义距离

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}, \qquad (7·1·4)$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ 是 s 中任意的点，则 s 成为一个完备的距离空间. 并且在 s 中 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)$ 收敛于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 等价于对每个固定的自然数 i 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i$. 请读者参照例 7·1·2 来完成证明.

例 7·1·4　离散距离空间. 设 X 是一个非空集合，在 X 上定义

$$\rho(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\neq y \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x=y \text{ 时},\end{cases} \qquad (7·1·5)$$

则 X 按 ρ 成为一个完备的距离空间(证明留作习题)，我们称此(X, ρ) 是一个**离散距离空间**(简称离散空间).

§7·2　赋范线性空间的定义及例

定义 1　设 E 是一个非空集合，K 表示复(或实) 数域. 如果

(i) E 是一个加法群(Abel 群)，即定义了 E 中每两个元素 x,y 的加法运算，$x+y\in$ E，满足：

1) $x+y=y+x$;

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3) E 中存在零元素 θ，使对任何 $x\in$ E 均有 $x+\theta=x$;

4) 对任一 $x\in$ E，存在加法逆元 $-x$ 使 $x+(-x)=\theta$,

(ii) 定义了 K 中每个数 α 与 E 中每个元素 x 的乘法运算，$\alpha x\in$

E,满足:

1) $1x = x$;

2) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

3) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$;

4) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$,

则称 E 是一个**复(或实)线性空间**.

注 1 我们通常把 $x+(-y)$ 写作 $x-y$,且在不致引起混淆的情况下把 E 中的零元素 θ 写作 0.

注 2 今后凡说"线性空间"而前面不标出"复"、"实"字样时,意指此线性空间既可以是复的也可以是实的.

我们约定今后凡说到数是指实数或复数,而不再指 $\pm\infty$.

例 7·2·1 数列空间. 设 K 是实数域,Q 是某些实数列所组成的集(Q $=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\}$). 定义 Q 中两元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 与 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$ 的加法以及数 $\alpha\in K$ 与元素 x 的乘法如下:

$$\left.\begin{aligned} x+y &= (\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots) \\ \alpha x &= (\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots) \end{aligned}\right\}. \qquad (7\cdot2\cdot1)$$

若当 $x,y\in$ Q,$\alpha,\beta\in K$ 时恒有 $\alpha x+\beta y\in$ Q,则 Q 成为 K 上的一个线性空间. 此线性空间称为**实的数列空间**. 类似地可定义**复的数列空间**(这时 K 为复数域,Q 中元素为复数列).

例 7·2·2 函数空间. 设 K 为实数域,Ω 为 R^n 中的一个点集,F 是 Ω 上某些实值函数所组成的集(F $=\{f\}$). 定义 F 中两元素 f 与 g 的加法以及数 $\alpha\in K$ 与 f 的乘法如下:

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) \quad (\forall x\in\Omega) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha\cdot f(x) \qquad\quad\ (\forall x\in\Omega) \end{aligned}\right\} \quad (7\cdot2\cdot2)$$

(即函数普通意义的加法及数乘运算). 若当 $f,g\in$ F,$\alpha,\beta\in K$ 时恒有 $\alpha f+\beta g\in$ F,则 F 成为 K 上的一个线性空间,此线性空间称为**实的函数空间**. 类似地可定义**复的函数空间**(这时 K 为复数域,F 中元素为 Ω 上的复值函数).

注 1　今后若说到某具体数列空间、函数空间而未说明是"实的"还是"复的"时，意指实、复均可. 但为叙述上的方便我们往往只就"实的"情况来证明有关结论.

注 2　R^n 中点集 Ω 上的复值函数 $f(x)$ 必可唯一地表成

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

其中 $f_1(x)$、$f_2(x)$ 是 Ω 上的实值函数. 当 f_1，f_2 均为可测函数时称 f 是**可测函数**. 当 f_1、f_2 均为可积函数时称 f 是**可积函数**，并且规定

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f_1(x)\mathrm{d}x + i\int_\Omega f_2(x)\mathrm{d}x.$$

又当 $|f_1(x) + if_2(x)|$ 为 p 幂可积函数时称可测函数 $f(x)$ 是 **p 幂可积函数**等等.

定义 2　设 E 是一个复(或实)线性空间，如果在 E 上定义了一个实值函数 $\|\cdot\|$，它满足下面的"范数公理"：

(i) $\|x\| \geqslant 0$；$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$，

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $(\alpha \in K)$，

(iii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，

则称 $\|x\|$ 为**元素 x 的范数**，且称 $\|\cdot\|$ 是 **E 上的一个范数**，并称 E 按 $\|\cdot\|$ 成为一个复(或实)**赋范线性空间**(简称复(或实)**赋范空间**).

对赋范线性空间 E，定义

$$\rho(x,y) = \|x - y\| \qquad (\forall x, y \in \mathrm{E}),$$

容易验证 $\rho(x,y)$ 是 E 上的距离. 此 $\rho(\cdot,\cdot)$ 称为**范数 $\|\cdot\|$ 所导出的距离**.

今后凡说赋范线性空间上的距离均指其范数所导出的距离，并在此意义下说赋范线性空间是距离空间.

定义 3　如果赋范线性空间 E 按范数所导出的距离是一个完备的距离空间，则称 E 是一个 **Banach 空间**(或 **B－型空间**).

下面举一些赋范线性空间的例子，这些例子在泛函分析及其应用中都是很重要的.

例 7·2·3 n 维欧氏空间 R^n. 设

$$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n),y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in R^n,\alpha\in R^1,$$

定义

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$
$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\cdots,\alpha\xi_n),$$

并定义 x 的范数为

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{7·2·3}$$

显然 R^n 成为一个 Banach 空间，并且 $\|\cdot\|$ 导出的距离即欧氏距离.

例 7·2·4 连续函数空间 $C[a,b]$. 考察闭区间 $[a,b](a<b)$ 上连续函数 $f(x)$ 的全体所成的集合 $C[a,b]$. 在其中两函数的"加法"以及数与函数的"乘法"按普通的意义定义，那么 $C[a,b]$ 成一线性空间(请予验证)，其中函数的范数按下式定义

$$\|f\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|, \tag{7·2·4}$$

则 $C[a,b]$ 成一 Banach 空间.

事实上，范数的三个公理显然是满足的(请予验证)，我们只需再证明完备性. 首先注意，在 $C[a,b]$ 中的收敛

$$\rho(f_n,f)=\|f_n-f\|\to 0$$

意味着函数列 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

设 $\{f_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中一基本列，则对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n,m>N$ 时

$$\|f_n-f_m\|<\varepsilon,$$

依范数定义(7·2·4)，对任一 $x\in[a,b]$ 有

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|,$$

从而当 $n,m>N$ 时有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [a,b].$$

由此可知，$f_n(x)$ 在$[a,b]$上一致收敛于某连续函数 $f(x)$，亦即

$$\rho(f_n, f) \to 0, \ (n \to \infty).$$

$C[a,b]$ 的完备性得证.

例 7·2·5　空间 $C^m[a,b]$. 考察闭区间$[a,b](a<b)$上 m 次连续可微的函数 $f(x)$ 的全体所成之集 $C^m[a,b]$. 在其中两函数的"加法"以及数与函数的"乘法"按普通的意义定义，那么 $C^m[a,b]$ 成一线性空间，其中函数 $f(x)$ 的范数按下式定义

$$\|f\| = \max_{a \leqslant x \leqslant b}|f(x)| + \max_{a \leqslant x \leqslant b}|f'(x)| + \cdots + \max_{a \leqslant x \leqslant b}|f^{(m)}(x)|, \tag{7·2·5}$$

则 $C^m[a,b]$ 成为一个 Banach 空间.

例 7·2·6　空间 m. 一切有界数列 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ 所成之集记为 m. $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$，$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots)$ 的"加法"及数 α 与 x 的"乘法"按(7·2·1)来定义，而范数按下式定义

$$\|x\| = \sup_i |\xi_i|, \tag{7·2·6}$$

则 m 成为一个 Banach 空间.

例 7·2·5、例 7·2·6 可仿例 7·2·4 证明之，把它们留给读者.

例 7·2·7　空间 $\mathsf{M}(E)$. 设 E 是R^n中的可测集. 令 $\mathsf{M}(E)$ 表示 E 上本质有界的可测函数的全体(即对每一 $f(x) \in \mathsf{M}(E)$ 都有 $L>0$ 使$|f(x)| \leqslant L$, $a.e.$)，并且把$\mathsf{M}(E)$中凡几乎处处相等的函数看成同一元素. 对 $f(x) \in \mathsf{M}(E)$ 定义

$$\|f\| = \inf\{L \mid |f(x)| \leqslant L, \ a.e.\}, \tag{7·2·7}$$

则按普通函数的加法与数乘运算 $\mathsf{M}(E)$ 是一线性空间，且按(7·2·7)式所定义的范数 $\mathsf{M}(E)$ 为一个 Banach 空间. $\mathsf{M}(E)$ 可简记作 M.

我们指出，对每一 $f \in \mathsf{M}$ 必存在 $e \subset E$，$me = 0$，使

$$\|f\| = \sup_{x \in E \setminus e}|f(x)|.$$

事实上，对每一自然数 n，$|f(x)| \leqslant \|f\| + \dfrac{1}{n}$，$a.e.$，因此

存在 $e_n \subset E, me_n = 0$,使当 $x \in E \setminus e_n$ 时有

$$|f(x)| \leqslant \|f\| + \frac{1}{n},$$

令 $e = \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$,则 $me = 0$,且当 $x \in E \setminus e$ 时有

$$|f(x)| \leqslant \|f\| + \frac{1}{n}, \qquad n = 1,2,\cdots$$

从而当 $x \in E \setminus e$ 时 $|f(x)| \leqslant \|f\|$,但显然不能有

$$\sup_{x \in E \setminus e} |f(x)| < \|f\| \qquad (\text{否则与}(7 \cdot 2 \cdot 7)\text{ 矛盾}),$$

故

$$\|f\| = \sup_{x \in E \setminus e} |f(x)|.$$

利用上面指出的结论,不难证明 M 是 Banach 空间(留给读者作练习).

例 7·2·8 空间 $L^p(E)(p \geqslant 1)$. 设 E 是 R^n 中的可测集,我们把 E 上的一切 p 幂可积函数 $f(x)$ 所成之集记为 $L^p(E)$,并且把 $L^p(E)$ 中凡几乎处处相等的函数看成同一元素,在 $L^p(E)$ 中两函数的"加法"及数与函数的"乘法"按普通意义定义,而范数按下式定义

$$\|f\| = \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \qquad (7 \cdot 2 \cdot 8)$$

则 $L^p(E)$ 成一 Banach 空间. $L^p(E)$ 可简记作 L^p.

证明 显然 L^p 是线性空间. 以下证明(7·2·8)式确实是定义了 L^p 上的范数. 范数公理(i)、(ii)显然满足. 当 $p = 1$ 时范数公理(iii)也显然满足. 下设 $p > 1$,并设 $q = \dfrac{p}{p-1}$ (即 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$) 来证范数公理(iii)也满足. 分如下几步进行:

1°. 证明对任意 $A \geqslant 0, B \geqslant 0$ 有

$$AB \leqslant \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}. \qquad (7 \cdot 2 \cdot 9)$$

当 $AB = 0$ 时,(7·2·9)式显然成立. 当 $AB > 0$ 时,考虑函数

$$\varphi(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{1}{q}-x\ (x\geqslant 0).$$

由于$\varphi'(x)=x^{p-1}-1$,故当$x<1$时$\varphi'(x)<0$,当$x>1$时$\varphi'(x)>0$,因此$\varphi(x)$在$x=1$达到最小值0,即对任一$x\geqslant 0$,$\varphi(x)\geqslant 0$.

令$x=AB^{-q/p}$,则

$$\frac{A^pB^{-q}}{p}+\frac{1}{q}-AB^{-q/p}\geqslant 0.$$

以B^q乘上式并注意到$q-\frac{q}{p}=q(1-\frac{1}{p})=1$,即得(7·2·9)式.

2°.证明若$f\in L^p$,$g\in L^q$,则$fg\in L^1$,且

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}. \tag{7·2·10}$$

不失一般性可设　$\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x>0$,　$\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x>0$.

令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)}{\left(\int_E|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}},\quad \psi(x)=\frac{g(x)}{\left(\int_E|g(x)|^q\mathrm{d}x\right)^{1/q}},$$

由(7·2·9)式,

$$|\varphi(x)\psi(x)|\leqslant\frac{|\varphi(x)|^p}{p}+\frac{|\psi(x)|^q}{q},$$

因而$\varphi(x)\psi(x)\in L^1$,从而$f(x)g(x)\in L^1$且

$$\int_E|\varphi(x)\psi(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_E\frac{|\varphi(x)|^p}{p}\mathrm{d}x+\int_E\frac{|\psi(x)|^q}{q}\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int_E|\varphi(x)|^p\mathrm{d}x=\int_E|\psi(x)|^q\mathrm{d}x=1$$

及$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$即知(7·2·10)式成立.

3°. 证明若 $f \in L^p, g \in L^p$,则

$$\left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}. \qquad (7\cdot 2\cdot 11)$$

由 $|f(x)+g(x)|^p \leqslant 2^p(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$ 即知

$$|f(x)+g(x)| \in L^p,$$

从而

$$|f(x)+g(x)|^{p/q} \in L^q,$$

由(7・2・10)式有

$$\int_E |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p/q} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

$$\int_E |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p/q} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/q},$$

将两式相加,并注意到

$$|f(x)+g(x)|^p = |f(x)+g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p/q},$$

即得

$$\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \int_E |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p/q} \mathrm{d}x + \int_E |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p/q} \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left[\left(\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}\right] \cdot \left(\int_E |f(x)+g(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/q}.$$

注意到 $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$,即知(7・2・11)式成立,亦即

$$\| f+g \| \leqslant \| f \| + \| g \|.$$

最后，证明 $L^p(E)$ 是完备的. 设 $\{f_n\}$ 是 $L^p(E)$ 中一基本列，即

$$\lim_{n,m\to\infty} \| f_n - f_m \| = \lim_{n,m\to\infty} \left(\int_E | f_n(x) - f_m(x) |^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} = 0. \quad (7\cdot2\cdot12)$$

显然可取 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 使 $\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \| < \frac{1}{2^k}$. 将 E 表为可列个有界可测集的并集：

$$E = \bigcup_{r=1}^{\infty} E_r,\ mE_r < +\infty.$$

在 E_r 上对函数 $| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} |$ 与 1 应用不等式(7・2・10)，

$$\begin{aligned} &\int_{E_r} | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) | \mathrm{d}x \\ &\leqslant (mE_r)^{1/q} \left(\int_{E_r} | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) |^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \\ &\leqslant (mE_r)^{1/q} \left\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \right\|, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\int_{E_r} \left(\sum_{k=1}^{\infty} | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) | \right) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_r} | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) | \mathrm{d}x \\ &\leqslant (mE_r)^{1/q} \sum_{k=1}^{\infty} \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \| \leqslant (mE_r)^{1/q} \leqslant + \infty, \end{aligned}$$

从而级数

$$| f_{n_1}(x) | + \sum_{k=1}^{\infty} | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) | \quad (7\cdot2\cdot13)$$

在 E_r 上几乎处处收敛，因而级数(7・2・13)在 E 上几乎处处收敛. 于是，级数

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

在 E 上几乎处处收敛于某可测函数 $f(x)$，即 $f_{n_k}(x)$ 在 E 上几乎处

处收敛于 $f(x)$.

任给 $\varepsilon>0$,由(7·2·12)式知存在 N,使当 $n,m>N$ 时

$$\int_E |f_n(x)-f_m(x)|^p \mathrm{d}x<\varepsilon^p.$$

取 k_0 充分大,使当 $k>k_0$ 时 $n_k>N$,于是当 $n>N,k>k_0$ 时

$$\int_E |f_n(x)-f_{n_k}(x)|^p \mathrm{d}x<\varepsilon^p,$$

令 $k\to\infty$ 并应用 Fatou 引理,得

$$\int_E |f_n(x)-f(x)|^p \mathrm{d}x\leqslant\varepsilon^p.$$

上式说明 $f\in L^p(E)$,且当 $n>N$ 时 $\|f_n-f\|\leqslant\varepsilon$,故

$$f_n\to f\quad(\text{在 } L^p \text{中}).$$

完备性得证. 所以 L^p 是 Banach 空间. ▌

注 1 不等式(7·2·10)与(7·2·11)分别叫做 Hölder 不等式与 Minkowski 不等式. 特别当 p = 2 时(此时 q = 2)它们分别是 Cauchy 不等式与 Буняковский 不等式:

$$\left|\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_E |f(x)|^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_E |g(x)|^2\mathrm{d}x};$$

$$\sqrt{\int_E |f(x)+g(x)|^2\mathrm{d}x}\leqslant\sqrt{\int_E |f(x)|^2\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_E |g(x)|^2\mathrm{d}x}.$$

注 2 在 $L^p(E)$ 中 $f_n\to f$ 即函数列 $f_n(x)$ 在 E 上 p 幂平均收敛于 $f(x)$,可记作 $f_n\to f(L^p)$,特别当 $p=2$ 时即为平方平均收敛,平方平均收敛一般简称为**平均收敛**.

例 7·2·9 空间 $l^p(p\geqslant 1)$. 一切满足条件

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}<+\infty\qquad(7\cdot 2\cdot 14)$$

的数列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$ 的全体记为 l^p. 在 l^p 中元素的"加法"与"数乘"运算定义如(7·2·1),则 l^p 成一线性空间,且按(7·2·14)所定义的范数,l^p 成为一 Banach 空间

(7·2·14)式所定义的非负实值函数显然满足范数公理(i),

(ii),并当 $p=1$ 时也满足范数公理(iii). 当 $p>1$ 时,令 $q=\dfrac{p}{p-1}$,类似于例 7·2·8 可证

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q},\quad(7\cdot2\cdot15)$$

及

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{1/q}.\quad(7\cdot2\cdot16)$$

不等式(7·2·15)与(7·2·16)也分别叫做 **Hölder 不等式与 Minkowski 不等式**. 特别当 $p=2$ 时,相应的不等式称为 **Cauchy 不等式**与 **Вуняковский 不等式**. 由不等式(7·2·16)即知当 $p>1$ 时范数公理(iii)也满足. l^p 的完备性的证明留给读者作练习.

如果一个线性空间上已规定有距离,未必能赋予一个范数使其导出的距离与原规定的距离相同.

例如,空间 S(E) 按普通函数的加法与数乘运算成为一线性空间,但在 S(E) 上不能赋予范数使导出的距离与 §7·1 规定的距离 ρ 相同.

事实上,假若能赋予这样的范数 $\|\cdot\|$,令 $f_0(x)\equiv1$,必有

$$\begin{aligned}\|2f_0\|&=\|2f_0-\theta\|=\rho(2f_0,\theta)\\&=\int_E\frac{|2f_0(x)|}{1+|2f_0(x)|}dx=\int_E\frac{2}{1+2}dx=\frac{2}{3}mE,\end{aligned}$$

但 $\|f_0\|=\dfrac{1}{2}mE$,从而 $\|2f_0\|\neq2\|f_0\|$,这与范数公理(ii)矛盾.

§7·3 距离空间中的若干概念·连续映射

7·3·1 距离空间中的若干概念

在 §7·3·1 我们总是设(X,ρ)是距离空间,并简记作 X.

如果 $X_0 \subset X$，当 $\rho(x,y)$ 中的 x、y 限制取 X_0 中的点时显然仍满足距离三公理，从而 X_0 按距离 ρ 也是一个距离空间. 我们把 (X_0,ρ) 称为 (X,ρ) 的**子空间**(或简称 X_0 是 X 的距离子空间).

定义 1 设 $x_0 \in X$，$A \subset X$，定义**点 x_0 到点集 A 的距离**为

$$\rho(x_0,A) = \inf_{x\in A}\rho(x_0,x).$$

设 $A \subset X$，$B \subset X$，定义**两点集 A、B 间的距离**为

$$\rho(A,B) = \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}\rho(x,y).$$

定义 2 设 $x_0 \in X$，r 是一个正数. 点集 $\{x\in X \mid \rho(x,x_0) < r\}$ 称为以 x_0 为中心以 r 为半径的**开球**(或 x_0 的 **r 邻域**)，记作 $B(x_0,r)$；

点集 $\{x\in X \mid \rho(x,x_0) \leqslant r\}$ 称为以 x_0 为中心以 r 为半径的**闭球**，记作 $\bar{B}(x_0,r)$；

点集 $\{x\in X \mid \rho(x,x_0) = r\}$ 称为以 x_0 为中心以 r 为半径的**球面**(或 $\bar{B}(x_0,r)$ 的**球面**)，记作 $S(x_0,r)$.

定义 3 设 $x \in X$，$A \subset X$. 点 x 称为点集 A 的**内点**是指存在 $r > 0$ 使 $B(x,r) \subset A$；A 的内点的全体称为 A 的**内部**，记为 A°；

如果 $A^\circ = A$，则称 A 是**开集**.

点 x 称为点集 A 的**聚点**是指对任意 $\varepsilon > 0$ 都有

$$(B(x,\varepsilon)\setminus\{x\}) \cap A \neq \varnothing;$$

A 的聚点的全体称为 A 的**导集**，记作 A'；$A \cup A'$ 称为 A 的**闭包**，记作 $\bar{A}$.

如果 $A' \subset A$，则称 A 是**闭集**.

第二章 §2·2 与 §2·3 中，所有关于 R^N 中点、点集的定理、命题(及其证明)，把其中的“R^N”换成任意距离空间 X，仍然成立.

在 R^n 中，对任意 $x \in R^n$，$r > 0$，总有 $\bar{B}(x,r) = \overline{B(x,r)}$. 但此式对于一般距离空间不成立.

例如，前面定义的离散空间 X，

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=y,\\ 1, & \text{当 } x\neq y,\end{cases}$$

当 X 中含有不止一个点时，对任意 $x\in \mathrm{X}$，有 $\overline{B(x,1)}=\{x\}$ 及 $\bar{B}(x,1)=\mathrm{X}$，从而 $\bar{B}(x,1)\neq\overline{B(x,1)}$. 这与欧氏空间 R^n 中的情形是很不相同的.

命题 1　设(X_1,ρ) 是(X,ρ) 的子空间，则

(i) X_1 中点集 G_1 是(X_1,ρ) 中开集的充要条件是：存在(X,ρ) 中的开集 G 使 $G_1=G\cap \mathrm{X}_1$.

(ii) X_1 中点集 F_1 是 X_1 中闭集的充要条件是：存在 X 中的闭集 F 使 $F_1=F\cap \mathrm{X}_1$.

证明　(i) 充分性由开集的定义立即可知.

下证必要性：设 G_1 是 X_1 中开集，则对每个 $x\in G_1$ 存在 X_1 中的开球 $B_{\mathrm{X}_1}(x,r_x)\subset G_1$，从而 $G_1=\bigcup\limits_{x\in G_1}B_{\mathrm{X}_1}(x,r_x)$.

相应于 $B_{\mathrm{X}_1}(x,r_x)$ 作 X 中的开球 $B_{\mathrm{X}}(x,r_x)$，令 $G=\bigcup\limits_{x\in G_1}B_{\mathrm{X}}(x,r_x)$，则 G 是 X 中的开集，并且

$$\begin{aligned}G\cap \mathrm{X}_1&=\Big(\bigcup_{x\in G_1}B_{\mathrm{X}}(x,r_x)\Big)\cap \mathrm{X}_1\\&=\bigcup_{x\in G_1}(B_{\mathrm{X}}(x,r_x)\cap \mathrm{X}_1)=\bigcup_{x\in G_1}B_{\mathrm{X}_1}(x,r_x)=G_1.\end{aligned}$$

(ii) 由于在距离空间中，开集的余集是闭集，闭集的余集是开集，根据(i) 即知(ii) 成立. ▌

注　当 X_1 是 X 的距离子空间时，X_1 中的开(闭) 集未必是 X 中的开(闭) 集.

定义 4　设 $A\subset \mathrm{X}$. 点集 A 称为是有界的，是指存在 X 中的球 $B(x_o,r)\supset A$.

定义 5　(i) 设 $M\subset \mathrm{X}$. 若 $A\subset \mathrm{X}$，$\bar{A}\supset M$，则称 A 在 M 中**稠密**.

(ii) 设 $A\subset \mathrm{X}$，若 $\bar{A}=\mathrm{X}$，则称 A 是 X 中的**稠密集**.

(iii) 设 $A\subset \mathrm{X}$，若 $\bar{A}$ 没有内点，则称 A 是 X 中的**稀疏集**.

例如，在 R^1 中有理点集在无理点集中稠密，有理点集是 R^1 中

的稠密集,Cantor 集是 R^1 中的稀疏集.

再例如,由 Weierstrass 多项式逼近定理知多项式的全体(作为$[a,b]$上的函数集)是 $C[a,b]$ 中的稠密集.

实数的全体(作为$[a,b]$($a<b$)上的常值函数集)是 $C[a,b]$ 中的稀疏集.

命题 2 (i) 设 $M,A\subset \mathbf{X}$. A 在 M 中稠密的充要条件是:对每个 $x\in M$ 恒存在$\{x_n\}\subset A$ 使 $x_n\to x$.

(ii) 设 $A\subset \mathbf{X}$. A 是 $\mathbf{X}$ 中稠密集的充要条件是:$\mathbf{X}$ 中的任何闭球 $\overline{B}(x,r)$ 总含有 A 中的点.

(iii) 设 $A\subset \mathbf{X}$. A 是 $\mathbf{X}$ 中稀疏集的充要条件是:对 $\mathbf{X}$ 中的任何闭球 $\overline{B}(x,r)$,都存在闭球 $\overline{B}(x_1,r_1)\subset\overline{B}(x,r)$ 使 $\overline{B}(x_1,r_1)$ 不含有 A 中的点.

证明 (i)、(ii) 显然成立. 下证(iii):

必要性. 假若 $\mathbf{X}$ 中存在闭球 $\overline{B}(x_0,r_0)$ 使 $\overline{B}(x_0,r_0)$ 中的任何闭球总含有 A 中的点,则 $\overline{A}\supset B(x_0,r_0)$,于是 A 不是稀疏集,必要性得证.

充分性. 假若 A 不是稀疏集,则 $\mathbf{X}$ 中存在闭球 $\overline{B}(x,r)\subset\overline{A}$,于是 $\overline{B}(x,r)$ 中任何闭球总含有 A 中的点. 充分性得证. ▌

7·3·2 连续映射

在 §7·3·2 我们总是设$(\mathbf{X},\rho)$,$(\mathbf{X}_1,\rho_1)$是距离空间,并且分别记作 $\mathbf{X}$、$\mathbf{X}_1$.

设 T 是 $\mathbf{X}$ 到 $\mathbf{X}_1$ 的映射,对于集合 $A\subset\mathbf{X}_1$,我们把集合$\{x\in X\mid T(x)\in A\}$ 称为 A(在 T 之下)的**原象**,记作 $T^{-1}(A)$.

映射 $T:\mathbf{X}\to\mathbf{X}_1$ 当 $\mathbf{X}_1$ 为实数域 R^1 或复数域 Z 时又称为(实值或复值)**泛函**.

定义 6 设 $T:\mathbf{X}\to\mathbf{X}_1$. 所谓 **$T$ 在点 $x_0\in\mathbf{X}$ 连续**,是指对于 $\mathbf{X}$ 中任意一收敛于 x_0 的点列$\{x_n\}_1^\infty$ 都有

$$Tx_n\to Tx_0\quad(\text{在 }\mathbf{X}_1\text{ 中}).$$

如果 T 在 X 的每个点都连续，则称 T 是 X 到 X_1 的**连续映射**（简称 **T 在 X 上连续**）.

例如，当 $x_0 \in X$ 固定时 $\rho(x_0, x)$ 就是 X 上的连续泛函.

事实上，由三角不等式知

$$|\rho(x_0, x) - \rho(x_0, y)| \leqslant \rho(x, y) \quad (\forall x, y \in X),$$

因而当 X 中 $x_n \to x$ 时

$$|\rho(x_0, x_n) - \rho(x_0, x)| \leqslant \rho(x_n, x) \to 0,$$

即 $\rho_1(x_0, x_n) \to \rho(x_0, x)$.

定理 1　设 $T: X \to X_1$，$x_0 \in X$. T 在点 x_0 连续的充要条件是：对任意 $\varepsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使当 $y \in X$ 且 $\rho(x_0, y) < \delta$ 时恒有 $\rho(Tx_0, Ty) < \varepsilon$.

证明　充分性. 设 T 满足定理所述（冒号后）的条件. 若在 X 中 $x_n \to x_0$，则存在 $N \in \mathbf{N}$ 使当 $n \geqslant N$ 时，$\rho(x_n, x_0) < \delta$，从而 $\rho_1(Tx_n, Tx_0) < \varepsilon$. 这就是说 $Tx_n \to Tx_0$. 所以 T 在 x_0 连续.

必要性. 假若不然，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使对任意自然数 n 都存在 $x_n \in X$ 使

$$\rho(x_0, x_n) < \frac{1}{n}, \quad \rho_1(Tx_n, Tx_0) \geqslant \varepsilon_0.$$

这就是说在 X 中 $x_n \to x_0$ 但在 X_1 中 Tx_n 不收敛于 Tx_0. 这与 T 在 x_0 连续矛盾. ∎

定理 2　(i) $T: X \to X_1$ 是连续映射的充要条件是：X_1 中每个开集 G 的原象 $T^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.

(ii) $T: X \to X_1$ 是连续映射的充要条件是：X_1 中每个闭集 F 的原象 $T^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

由定理 1 容易看出(i) 成立，由(i) 成立立即可知(ii) 成立.（详细证明留给读者作练习）

§7·4 压缩映象原理及其应用

在这一节,我们设X是一个完备的距离空间,T是一个映X中闭集F入F的映射,即当$x\in F$时,$Tx\in F$.

定理1 (Banach压缩映象原理).如果存在$\alpha\in[0,1)$,使

$$\rho(Tx,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,y),\quad \forall x,y\in F,\qquad (7\cdot4\cdot1)$$

则在F中有唯一的点x^*,满足

$$Tx^*=x^*.\qquad (7\cdot4\cdot2)$$

这样的x^*称为映射T的**不动点**.

证明 任取$x_0\in F$,作迭代序列

$$x_{n+1}=Tx_n,\quad n=0,1,2,\cdots\qquad (7\cdot4\cdot3)$$

由不等式(7·4·1)知

$$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\alpha\rho(x_n,x_{n-1}),$$

由此易得:

$$\rho(x_{n+1},x_n)\leqslant\alpha^n\rho(x_1,x_0),$$

从而

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+p},x_n)&\leqslant\rho(x_{n+p},x_{n+p-1})+\cdots+\rho(x_{n+1},x_n)\\&\leqslant(\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n)\rho(x_1,x_0)\\&\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).\end{aligned}\qquad (7\cdot4\cdot4)$$

因为$0\leqslant\alpha<1$,故$\{x_n\}$是X中一基本列,再由X的完备性及F的闭性知$x_n\to x^*\in F$.还可知

$$\rho(x_{n+1},Tx^*)=\rho(Tx_n,Tx^*)\leqslant\alpha\rho(x_n,x^*).$$

在上式两端令$n\to\infty$,即得$\rho(x^*,Tx^*)\leqslant0$,故$Tx^*=x^*$.

最后证明满足(7·4·2)之x^*的唯一性.

若有$\tilde{x}\in F$,使$T\tilde{x}=\tilde{x}$,则

$$\rho(x^*,\tilde{x})=\rho(Tx^*,T\tilde{x})\leqslant\alpha\rho(x^*,\tilde{x}).$$

由于 $\rho(x^*,\tilde{x})\geqslant 0, 0\leqslant\alpha<1$，所以 $\rho(x^*,\tilde{x})=0$，即 $x^*=\tilde{x}$，唯一性得证. ▌

注 1　若在(7·4·4)中命 $p\to\infty$，即得

$$\rho(x^*,x_n)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).$$

这样，我们得到了第 n 次迭代的误差估计.

注 2　条件(7·4·1)不能减弱为

$$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y),\quad \forall x,y\in F, x\neq y.$$

例如，设 $X=R^1, F=R^1$，

$$Tx=\frac{\pi}{2}+x-\arctan x,$$

那么

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty)&=|x-\arctan x-y+\arctan y|\\&=\left|1-\frac{1}{1+\xi^2}\right||x-y|\quad(\text{其中 }\xi\in(x,y)\text{ 或}(y,x))\\&=\frac{\xi^2}{1+\xi^2}|x-y|<\rho(x,y),\end{aligned}$$

但显然 T 在 F 没有不动点.

定理 2　如果有正整数 m 及常数 $\alpha\in[0,1)$ 存在，使

$$\rho(T^mx,T^my)\leqslant\alpha\rho(x,y),\quad \forall x,y\in F,\quad(7\cdot4\cdot5)$$

其中 T^m 表 T 的 m 次方，即 T 连续作用 m 次的结果，则 T 在 F 中具有唯一的不动点 x^*，且逐次迭代(7·4·3)收敛于 x^*.

证明　应用定理 1 于 T^m，知 T^m 有唯一不动点 $x^*\in F$，即 $T^mx^*=x^*$，两边用 T 作用之，即得 $T^m(Tx^*)=Tx^*$，故 Tx^* 也是 T^m 的不动点，由 T^m 不动点之唯一性，得 $Tx^*=x^*$，故 x^* 也是 T 的不动点. 此外，由于 T 的不动点也是 T^m 的不动点，由 T^m 不动点的唯一性，即知 T 的不动点是唯一的.

现在证明迭代序列(7·4·3)收敛于 x^*. 事实上，对 $s\in\{1,2,\cdots,m-1\}$ 令 $y_0=T^sx_0$，则序列

$$y_{n+1} = T^m y_n,\ n = 0,1,2,\cdots$$

收敛于 x^*,即

$$\lim_{n\to\infty} x_{nm+s} = x^* \quad (s = 0,1,\cdots,m-1),$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*. \ \blacksquare$$

下面我们举几个应用以上定理的例子.

例 7·4·1 微分方程解的存在唯一性问题.

考虑一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) & (7\cdot4\cdot6) \\ y|_{x=x_0} = y_0 & (7\cdot4\cdot7) \end{cases}$$

的解. 用 R 表矩形

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b.$$

设 $f(x,y)$ 在矩形 R 上连续,且关于 y 满足 Lipschitz 条件

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|, \quad (7\cdot4\cdot8)$$

记 $M = \max\limits_{x,y\in R} |f(x,y)|$,取正数

$$\delta < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right),$$

则方程(7·4·6)在闭区间$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$上有唯一的解满足初值条件(7·4·7).

证明 首先问题(7·4·6)~(7·4·7)等价于积分方程

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt. \quad (7\cdot4\cdot9)$$

令 C 表$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$上的连续函数空间,$F$ 表 C 中一切满足

$$\| y(x) - y_0 \| \leqslant b \quad (7\cdot4\cdot10)$$

的 $y(x)$ 所成的集. 显然 F 是 C 中的一个闭集. 今按下式定义一映射 T

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt. \quad (7\cdot4\cdot11)$$

则 T 映 F 入 F.

事实上,设 $y(x) \in F$,则

$$|Ty(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant M\delta \leqslant b,$$

故 $Ty(x) \in F$.

其次,对任意 $y_1(x), y_2(x) \in F$,有

$$\| Ty_1(x) - Ty_2(x) \| = \max_x \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\mathrm{d}t - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\mathrm{d}t\right| \leqslant \max_x \left|\int_{x_0}^{x} K|y_1(t) - y_2(t)|\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant K\delta \| y_1(x) - y_2(x) \|.$$

注意到 $K\delta < 1$,即知由(7·4·11)所定义的映射 T 满足定理1中的条件(7·4·1),从而 T 在 F 中有唯一不动点,即(7·4·9)有唯一解,也即问题(7·4·6)－(7·4·7)在$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$上有唯一解 $y(x)$. ▌

根据定理1及其注,问题(7·4·6)－(7·4·7)的解可由迭代序列

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\mathrm{d}t, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

取极限得到,其中 $y_0(x)$ 可取 F 中任一函数(例如取 $y_0(x) \equiv y_0$),而且有下列估计式

$$|y_n(x) - y(x)| \leqslant \frac{K^n\delta^n}{1 - K\delta} \| y_1(x) - y_0(x) \|.$$

例 7·4·2　Fredholm型线性积分方程解的存在唯一性问题.

考察 Fredholm 型方程

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b k(x, y)\varphi(y)\mathrm{d}y = f(x), \qquad (7·4·12)$$

其中 $f(x) \in L^2[a,b]$, $k(x,y)$ 可测且满足

$$\int_a^b\int_a^b |k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = M < +\infty.$$

λ 是参数. 如果

$$|\lambda| < M^{-\frac{1}{2}}, \qquad (7·4·13)$$

则方程(7・4・12)在 $L^2[a,b]$ 中有唯一解 $\varphi(x)$.

证明 令 $X=F=L^2[a,b]$ 及

$$T\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y, \quad (7\cdot4\cdot14)$$

显然 T 映 F 入 F. 方程(7・4・12)在 $L^2[a,b]$ 中的解等价于由(7・4・14)所定义的映射 T 的不动点. 利用 Schwarz 不等式,对任意 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in F$ 有

$$\begin{aligned}
&\|T\varphi_1(x)-T\varphi_2(x)\|\\
&=|\lambda|\left\{\int_a^b\left|\int_a^b k(x,y)(\varphi_1(y)-\varphi_2(y))\mathrm{d}y\right|^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant|\lambda|\left\{\int_a^b\mathrm{d}x\left(\left[\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_a^b|\varphi_1(y)-\varphi_2(y)|^2\mathrm{d}y\right]^{\frac{1}{2}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&=|\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b|k(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\|\\
&=|\lambda|M^{\frac{1}{2}}\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\|.
\end{aligned}$$

注意到 $|\lambda|M^{\frac{1}{2}}<1$,根据定理 1,$T$ 在 $L^2[a,b]$ 中有唯一不动点 $\varphi(x)$,即方程(7・4・12)在 $L^2[a,b]$ 中有唯一解 $\varphi(x)$. ▌

例 7・4・3 Volterra 型线性积分方程解的存在唯一性问题. 设方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x) \quad (7\cdot4\cdot15)$$

其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,而 $k(x,y)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,则对于任何 λ,方程(7・4・15)恒有唯一的连续解 $\varphi(x)$.

证明 利用定理 2. 令 $F=X=C[a,b]$,

$$T\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y. \quad (7\cdot4\cdot16)$$

显然,T 映 $C[a,b]$ 入 $C[a,b]$,(7・4・15)在 $C[a,b]$ 中的解等价于(7・4・16)所定义的映射 T 的不动点.

记 $M=\max\limits_{a\leqslant x,y\leqslant b}|k(x,y)|$,则对任意 $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)\in F$ 有

$$|T\varphi_1(x)-T\varphi_2(x)|=|\lambda|\left|\int_a^x k(x,y)(\varphi_1(y)-\varphi_2(y))\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant |\lambda|(x-a)M\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\|,$$

$$|T^2\varphi_1(x)-T^2\varphi_2(x)| = |\lambda|\left|\int_a^x k(x,y)(T\varphi_1(y)-T\varphi_2(y))\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant |\lambda|\int_a^x M|\lambda|(y-a)M\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\|\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}|\lambda|^2M^2(x-a)^2\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\|,$$

利用归纳法，容易证明对于自然数 m 有

$$|T^m\varphi_1(x)-T^m\varphi_2(x)|$$

$$\leqslant \frac{1}{m!}|\lambda|^mM^m(x-a)^m\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\|,$$

从而

$$\|T^m\varphi_1(x)-T^m\varphi_2(x)\|$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^mM^m(b-a)^m}{m!}\|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\|.$$

注意到对任意 u 有 $\frac{u^m}{m!}\to 0$，故可取一 m，使

$$\frac{|\lambda|^mM^m(b-a)^m}{m!}<1. \tag{7·4·17}$$

对此 m，不等式(7·4·17)表明 T 满足定理 2 中的条件(7·4·5)，由定理 2 即知 T 在 $C[a,b]$ 中有唯一不动点，也即方程(7·4·15)在 $C[a,b]$ 中有唯一解 $\varphi(x)$. ▌

压缩映象原理可以应用于各种方程的解的存在唯一性问题，例如还可以用来证明数学分析中的隐函数存在唯一性定理(参见[5]).

§7·5　距离空间的完备化

7·5·1　距离空间的完备化

距离空间的完备性在泛函分析中有很重要的意义，正如 R^1 的

完备性在数学分析中具有很重要的意义一样.因此,我们需要研究将不完备的距离空间完备化的可能性.正如在数学分析中将无理数(它作为有理数的极限)补入到有理数集而使有理数集完备化一样,对于一般的距离空间我们可以把 Cauchy 序列作为一个新的点添入原来的空间而使之完备化.

定义 1 设 X,Y 为两个距离空间,其中的距离分别用 ρ_1,ρ_2 表示.如果存在映 X 到 Y 上的一一映射 φ,使

$$\rho_2(\varphi x,\varphi y)=\rho_1(x,y)\ (\forall x,y\in X),$$

则称 X 与 Y **等距**,而 φ 称为 X 到 Y 的一个**等距映射**.

显然,如果只限于讨论有关距离的性质(如收敛性,完备性等),这时空间是由什么元素组成的并不重要.因此,两个等距的距离空间可以不加区别,即可以把它们看作是相等的.

定义 2 设 X_0 为距离空间,X 为完备的距离空间.如果 X 中有一个稠密子空间 X_1(即$\overline{X_1}=X$)与 X_0 等距,则称 X 为 X_0 的**完备化空间**.

定理 1 对于任一不完备的距离空间 X_0,必存在它的完备化空间 X.

* **证明** 考虑 X_0 中所有可能的基本列$\{x_n\}$,两个基本列$\{x_n\},\{y_n\}$ 称为等价的,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$.我们把所有互相等价的基本列归入一类,这样我们就得到许多类,用 X 表一切等价类所成之集(即把每一类看作 X 的一个元素).现在,我们按下法在 X 中引入距离.设 $\tilde{x},\tilde{y}\in X$,在 $\tilde{x},\tilde{y}$ 中分别取一基本列$\{x_n\},\{y_n\}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$ 存在有限.

事实上,我们有

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(x_m,y_m)+\rho(y_m,y_n),$$

从而

$$\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_m,y_n),\tag{7·5·1}$$

同理，

$$\rho(x_m,y_m)-\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_m,x_n)+\rho(y_n,y_m),\quad(7\cdot5\cdot2)$$

于是，由(7·5·1)，(7·5·2)得

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x_m,y_m)|$$
$$\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(y_n,y_m)\to0,\qquad(\text{当 } n,m\to\infty),$$

故 $\rho(x_n,y_n)$ 是一基本列，由柯西收敛准则，即知 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$ 存在有限.

令

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n),\qquad(7\cdot5\cdot3)$$

容易证明 $\rho(\tilde{x},\tilde{y})$ 与 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 的选取无关.

事实上，若另取 $\{x_n'\}\in\tilde{x}$，$\{y_n'\}\in\tilde{y}$，则由

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_n')+\rho(x_n',y_n')+\rho(y_n',y_n)$$

知

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}\rho(x_n',y_n'),$$

同理，

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n',y_n')\leqslant\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n),$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n',y_n'),$$

因此，$\rho(\tilde{x},\tilde{y})$ 有明确意义，现在证明这样定义的 $\rho(\tilde{x},\tilde{y})$ 确是 X 上的距离，即满足距离的三条公理.

$\rho(\tilde{x},\tilde{y})=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\geqslant0.$　又

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0$$

$\Leftrightarrow\{x_n\},\{y_n\}$ 等价(即，$\{x_n\},\{y_n\}$ 属于同一类).

因此，

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y})=0\Leftrightarrow\tilde{x}=\tilde{y}.$$

距离公理(ii) 显然满足.

下证 $\rho(\tilde{x},\tilde{y})$ 满足距离公理(iii).

设 $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}\in \mathbf{X}$. 任取 $\{x_n\}\in\tilde{x},\{y_n\}\in\tilde{y},\{z_n\}\in\tilde{z}$, 则

$$\begin{aligned}\rho(\tilde{x},\tilde{y}) &= \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)\\ &\leqslant \lim_{n\to\infty}[\rho(x_n,z_n)+\rho(z_n,y_n)]\\ &= \lim_{n\to\infty}\rho(x_n,z_n)+\lim_{n\to\infty}\rho(z_n,y_n)\\ &= \rho(\tilde{x},\tilde{z})+\rho(\tilde{z},\tilde{y}).\end{aligned}$$

下面,我们来证明 $\mathbf{X}$ 是完备的. 设 $\{\tilde{x}_n\}$ 是 $\mathbf{X}$ 中任一基本列,即 $\lim\limits_{n,m\to\infty}\rho(\tilde{x}_n\,\tilde{x}_m)=0$. 在每一 $\tilde{x}_n$ 中取一基本列 $\{x_k^n\}$,对每一自然数 n,可取一 k_n,使当 $k>k_n$ 时

$$\rho(x_k^n,x_{k_n}^n)<\frac{1}{n}. \tag{7·5·4}$$

现在,我们证明 $\{x_{k_n}^n\}$ 是一基本列,我们把只含一个元素的序列称为常驻列. 由 $\mathbf{X}_0$ 中元素 x 所构成的常驻列所在的类记作 x^*(因为常驻列是基本列,它必属于某等价类). 我们有

$$\rho(\tilde{x}_n,x_{k_n}^{n*})=\lim_{k\to\infty}\rho(x_k^n,x_{k_n}^n)\leqslant\frac{1}{n}, \tag{7·5·5}$$

$$\begin{aligned}\rho(x_{k_n}^n,x_{k_m}^m) &= \rho(x_{k_n}^{n*},x_{k_m}^{m*})\\ &\leqslant \rho(x_{k_n}^{n*},\tilde{x}_n)+\rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}_m)+\rho(\tilde{x}_m,x_{k_m}^{m*})\\ &\leqslant \frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\rho(\tilde{x}_n\,\tilde{x}_m),\end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n,m\to\infty}\rho(x_{k_n}^n,x_{k_m}^m)=0,$$

故 $\{x_{k_n}^n\}$ 是一基本列,它所在的类记为 $\tilde{x}$. 又

$$\begin{aligned}\rho(\tilde{x}_n,\tilde{x}) &\leqslant \rho(\tilde{x}_n,x_{k_n}^{n*})+\rho(x_{k_n}^{n*},\tilde{x})\\ &\leqslant \frac{1}{n}+\rho(x_{k_n}^{n*},\tilde{x})=\frac{1}{n}+\lim_{m\to\infty}\rho(x_{k_n}^n,x_{k_m}^m).\end{aligned}$$

因为$\{x_{k_n}^n\}$是基本列，所以，对任意给定的$\varepsilon>0$存在N，使$\frac{1}{N}<\frac{\varepsilon}{2}$且当$n>N$时有

$$\lim_{m\to\infty}\rho(x_{k_n}^n, x_{k_m}^m)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当$n>N$时有$\rho(\widetilde{x}_n,\widetilde{x})<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\rho(\widetilde{x}_n,\widetilde{x})=0,$$

于是X的完备性得证.

现在证明，X_0与X中一个稠子空间X_1等距. 令X_1表X中一切含有常驻列的类所组成的集合.

现在，对任一$x\in X_0$，令x与x^*对应，其中x^*表含常驻列$\{x,x,\cdots\}$的类. 显然，这样的对应是$1-1$的且保持距离不变. 因此，X_0与X_1等距.

余下的只要说明X_1在X中稠密. 事实上，设$\widetilde{x}\in X$，在$\widetilde{x}$中任取一基本列$\{x_n\}$，那么，对任意给定的$\varepsilon>0$，存在n，使当$m>n$时，$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，从而

$$\rho(\widetilde{x},x_n^*)=\lim_{m\to\infty}\rho(x_m,x_n)\leqslant\varepsilon,$$

这正说明X_1在X中稠密. ▌

还可证明一个距离空间的完备化空间在等距意义下是唯一的：设Y也是X_0的完备化空间，它也有一子空间Y_1，Y_1在Y中稠密且与X_0等距. 于是Y_1必然与X_1等距. $X_1\to Y_1$的等距映射用φ_0表示. φ_0^{-1}就是$Y_1\to X_1$的一个等距映射.

对每一$\widetilde{x}\in X$，取

$$\widetilde{x}_n\in X_1(n=1,2,\cdots),\ \widetilde{x}_n\to\widetilde{x}_n(n\to\infty),$$

令

$$\varphi(\widetilde{x})=\lim_{n\to\infty}\varphi_0(\widetilde{x}_n)=\lim_{n\to\infty}y_n=y\in Y,$$

φ:X → Y 显然是 $1-1$ 的,且由 φ_0 是等距的容易看出 φ 是等距的.

例 7·5·1 设 R_0 为一切有理数按 $\rho(x,y)=|x-y|$ 所成之距离空间,它是不完备的.显然,它的完备化空间就是一切实数按 $\rho(x,y)=|x-y|$ 所成之距离空间,即一维欧氏空间.

例 7·5·2 设 $P[a,b]$ 为$[a,b]$上一切多项式按距离

$$\rho(P,Q)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)-Q(x)|$$

所成之距离空间,它也是不完备的.显然 $P[a,b]\subset C[a,b]$.由于任何连续函数都可以用多项式来一致逼近,故 $P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密,又 $C[a,b]$ 是完备的,故 $P[a,b]$ 的完备化空间就是 $C[a,b]$.

7·5·2 完备距离空间的两个性质

定理 2 设 X 是完备的距离空间,$B_n=\overline{B}(x_n,r_n)$ 是 X 中一列以 x_n 为中心以 r_n 为半径的闭球,若 $B_n\supset B_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 且 $r_n\to 0(n\to\infty)$,则必有(唯一的)$x^*\in$ X,使 $x^*\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$.

证明 对每一 $n\geqslant 1$,当 $m,k>n$ 时,$x_m,x_k\in B_n$,所以

$$\rho(x_m,x_k)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(x_n,x_k)\leqslant 2r_n\to 0,$$

故$\{x_n\}$是 X 中基本列,有极限 $x^*\in$ X.

又因为当 $m>n$ 时,$B_m\subset B_n$,故 $x_m\in B_n$.B_n 是闭集,所以

$$x^*=\lim_{m\to\infty}x_m\in B_n\quad(n=1,2,\cdots),$$

即 $x^*\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. ▌

定理 3 完备的距离空间不能表示成可列个稀疏集的并集.

证明 用反证法.设 X 为完备的距离空间,M_n 是 X 中一串稀疏集合,X $=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$.

任取 X 中一闭球 $\overline{B}_1=\overline{B}(x_1,r_1)$,因 M_1 是稀疏集,由定义,存在闭球 $\overline{B}_2=\overline{B}(x_2,r_2)\subset\overline{B}_1$,使 $r_2\in(0,\frac{r_1}{2}]$ 且 $\overline{B}_2\cap M_1=\varnothing$.类

似的,存在闭球$\overline{B}_3=\overline{B}(x_3,r_3)\subset\overline{B}_2,r_3\in(0,\frac{r_2}{2}],\overline{B}_3\cap M_2=\varnothing$.
把这种方法继续进行下去,必有一个闭球序列:
$\overline{B}_1\supset\overline{B}_2\supset\overline{B}_3\supset\cdots\supset\overline{B}_n\supset\overline{B}_{n+1}\supset\cdots,\overline{B}_{n+1}\cap M_n=\varnothing$,

$$\frac{1}{2}r_1\geqslant r_2,\frac{1}{2}r_2\geqslant r_3,\cdots,\frac{1}{2}r_n>r_{n+1},\cdots,$$

故$r_n\to 0(n\to\infty)$,由定理2,存在$x^*\in X$,使$x^*\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\overline{B}_n$,所以,对每一$n$,$x^*\in\overline{B}_{n+1}$,而$\overline{B}_{n+1}\cap M_n=\varnothing$,故$x^*\overline{\in}M_n(n=1,2,\cdots)$,这与$x^*\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n$矛盾. ▌

定义3　距离空间X中的点集称为**第一纲集**,是指它可以表示成可列个稀疏集的并;而X中不是第一纲集的点集称为**第二纲集**.

由此,定理3即是说:完备的距离空间是第二纲集.

§7·6　可分距离空间

定义1　距离空间X称为**可分的**,是指X中存在一个有限或可列的点集$\{x_n\}$,$\{x_n\}$在X中稠密.距离空间X中的点集A称为**可分的**,是指A作为X的距离子空间是可分的(即A中存在一个至多可列的点集$\{x_n\}$,$\{x_n\}$在A中稠密).

例7·6·1　空间R^n是可分的,因为坐标为有理数的点(即有理点)的全体是R^n中的可列稠密集.

例7·6·2　空间$l^p(p\geqslant 1)$是可分的.

证明　作l^p中的点集

$A=\{(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)\mid$ 诸ξ_i为实数$,n\in\mathbb{N}\}$,

$B=\{(\eta_1,\cdots,\eta_n,0,0,\cdots)\mid$ 诸η_i为有理数$,n\in\mathbb{N}\}$.

对每个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$,取$x_n=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)\in A$,则

$$\| x-x_n \|^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p \to 0 \quad (n\to\infty),$$

即 $x_n \to x$. 又对每个 x_n,显然可取 $y_n=(\eta_1,\cdots,\eta_n,0,0,\cdots)\in B$,使 $\| x_n-y_n \| < \frac{1}{n}$. 所以 $y_n \to x$. 这说明 B 在 l^p 中稠密. B 显然是可列集,故 l^p 可分. ▌

在下面的例子中 P 表示(一元)多项式的全体,P_0 表示有理系数(一元)多项式的全体. 由 §1·4 知 P_0 是可列集.

例 7·6·3 $C[a,b]$ 是可分的. 事实上,P 在 $C[a,b]$ 中稠密,作为 $C[a,b]$ 的子集 P_0 在 P 中稠密,故 P_0 在 $C[a,b]$ 中稠密.

例 7·6·4 $L^p[a,b](p\geqslant 1)$ 是可分的. 这是因为:作为 $L^p[a,b]$ 的子集 P_0 在 P 中稠密,而由 §5·5 知 P 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.

下面举两个不可分距离空间的例子.

例 7·6·5 有界数列空间 m 不是可分的.

证明 作 m 中的点集

$$D=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots) \mid \xi_i\in\{0,1\}, i=1,2,\cdots\},$$

由 §1·5 知 D 不可列. 用反证法证明 m 不可分:假若 m 可分,则存在可列子集 $\{x_n\}$,它在 m 中稠密,从而 $D\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}B(x_n,\frac{1}{3})$. 由 D 不可列知 D 中至少有两个不同的点 x'、x'' 含于 $\{B(x_n,\frac{1}{3})\}_1^{\infty}$ 中的某同一个球 $B(x_{n_0},\frac{1}{3})$ 中,于是

$$\rho(x',x'')\leqslant\rho(x',x_{n_0})+\rho(x'',x_{n_0})<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

但 D 中两个不同的点间的距离为 1. 出现的矛盾说明 m 不可分. ▌

例 7·6·6 本质有界可测函数空间 M 不是可分的. 这可以类似于例 7·6·5 来证明(留作习题).

§7·7　距离空间中集合的列紧性

定义1　设X为一距离空间，$M\subset X$，如果M中任一序列都存在收敛子列，则称M是**相对紧集(或列紧集)**. 如果M同时是闭的，则称M为**紧集(或自列紧集)**. 如果空间X是紧的，则称X为**紧距离空间**.

例如，由 Bolzano -Weierstrass 定理知，R^n 中的有界集是相对紧集，R^n 中的有界闭集为紧集，但 R^n 不是紧空间.

定义2　设X是距离空间，$M\subset X$，$N\subset X$，$\varepsilon>0$，如果对于每一$x\in M$，都有$y\in N$，使$\rho(x,y)<\varepsilon$，则称N是M的一个**ε－网**.

例如，整数集合就是 R^1 的一个$\dfrac{2}{3}$－网.

定义3　设X是距离空间，$M\subset X$，如果M对任意$\varepsilon>0$都有由有限个点组成的ε－网存在，则称M为**全有界的**.

显然，全有界集合必是有界集，反之不然.

定理1　(Hausdorff) 设X是距离空间，$M\subset X$.

(i) 若M是相对紧集，则M是全有界集.

(ii) 当X完备时，若M是全有界集，则M是相对紧集.

证明　(i) 设M是相对紧集. 如果M不是全有界的，必存在$\varepsilon_0>0$，使M没有有限的ε_0－网. 任取$x_1\in M$，则必有$x_2\in M$，使$\rho(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon_0$(否则，单元素集$\{x_1\}$就是$M$的一个$\varepsilon_0$－网). 由假设$\{x_1,x_2\}$不是$M$的$\varepsilon_0$－网，故必有$x_3\in M$，使

$$\rho(x_3,x_1)\geqslant\varepsilon_0,\rho(x_3,x_2)\geqslant\varepsilon_0.$$

这样一直推下去，必存在M中的一个点列$\{x_n\}$，当$n\neq m$时$\rho(x_n,x_m)\geqslant\varepsilon_0$. 显然，$\{x_n\}$中没有收敛子列，这与$M$是相对紧集矛盾.

(ii) 设X是完备的，$M\subset X$全有界. 首先证明，对于任意的$\varepsilon>0$，M中的任一点列$\{x_n\}$必有子列$\{x_{n_i}\}$，使

$$\sup_{i,j}\rho(x_{n_i},x_{n_j})\leqslant\varepsilon.$$

事实上，由于 M 全有界，故必有有穷的 $\frac{1}{2}\varepsilon$ — 网 $\{x_1',x_2',\cdots,x_k'\}$ 存在，即 M 中的点全含于 k 个半径为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的球中，故至少有一个球中含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项 $\{x_{n_i}\}$，显然，$\{x_{n_i}\}$ 中的元素间的距离不超过 ε，即

$$\sup_{i,j}\rho(x_{n_i},x_{n_j})\leqslant\varepsilon.$$

现在设 $\{x_n\}$ 是 M 中任一点列，由上段所证，它有一个子列 $\{x_n^1\}$，使其中任意两个元素的距离不超过 1. 对 $\{x_n^1\}$，又有一个子列 $\{x_n^2\}$，它的任意两个元素间的距离不超过 $\frac{1}{2}$. 这样一直继续下去，我们可得一族子列 $\{x_n^k\}$：

$$\{x_n\}\supset\{x_n^1\}\supset\{x_n^2\}\supset\cdots\supset\{x_n^k\}\supset\{x_n^{k+1}\}\supset\cdots$$

$$\sup_{n,m}\rho(x_n^k,x_m^k)\leqslant\frac{1}{k}.$$

考虑"对角线"序列 $\{x_n^n\}$，则当 $m>n$ 时 $\rho(x_m^m,x_n^n)\leqslant\frac{1}{n}$，因此 $\{x_n^n\}$ 是一基本列，又 X 是完备的，故 $\{x_n^n\}$ 是 $\{x_n\}$ 中的一个收敛子列，从而 M 是相对紧集. ▌

系 1 相对紧集必是有界的.

在一般的距离空间中，有界集未必是相对紧的. 比如，考察 l^2 中一列元素 $x_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$（其中 1 是第 n 项），$\{x_n\}$ 是有界集，但 $\rho(x_n,x_m)=\sqrt{2}(n\neq m)$，故 $\{x_n\}$ 就不是相对紧集.

定理 2 (Hausdorff) 设 X 为一完备的距离空间，$M\subset$ X，如果对任何 $\varepsilon>0$，都存在 M 的一个相对紧的 ε — 网，则 M 必是相对紧集.

证明 由定理 1，我们只需证明，对于任意 $\varepsilon>0$，M 有有穷的 ε — 网.

设 N 是 M 的一个相对紧的 $\frac{\varepsilon}{2}-$ 网，因 N 是相对紧的，由定理1，它是全有界的，因此有有穷的 $\frac{\varepsilon}{2}-$ 网 $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. 对任意 $x \in M$，存在 $y \in N$，使 $\rho(x,y) < \frac{\varepsilon}{2}$，对此 y，存在 y_i，使 $\rho(y,y_i) < \frac{\varepsilon}{2}$，所以 $\rho(x,y_i) < \varepsilon$. 因此，$\{y_1, \cdots, y_n\}$ 是 M 的一个有穷 $\varepsilon-$ 网，故 M 是全有界的. ▌

定理 1 与定理 2 给出了关于集合列紧性的一般判别法，应用它们，可得出各种具体的距离空间中集合列紧性的判别条件. 下面我们来讨论两个重要空间 $C[a,b]$ 与 $L^p[a,b]$ 中集合列紧性的条件.

定理 3　(Arzela) 集合 $M \subset C[a,b]$ 相对紧的充分必要条件是

(i) 集合 M 中的函数一致有界，即存在常数 K，使得一切 $x(t) \in M$，皆有 $|x(t)| \leqslant K \quad (a \leqslant t \leqslant b)$；

(ii) 集合 M 中的函数等度连续，即对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$，使得当 $t_1, t_2 \in [a,b]$，$|t_1 - t_2| < \delta$ 时，对任意 $x(t) \in M$ 有 $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.

证明　必要性：设 M 是 $C[a,b]$ 中的相对紧集，由定理 1 的系，M 是 $C[a,b]$ 中的有界集，因此，条件(i) 满足. 下证(ii). 任给 $\varepsilon > 0$，由定理 1，存在 M 的一个有穷的 $\varepsilon/3-$ 网 $\{x_1(t), \cdots, x_n(t)\}$，由于 $x_i(t)(i = 1, \cdots, n)$ 在 $[a,b]$ 连续，故一致连续，从而存在 $\delta_i > 0$，使当 $t_1, t_2 \in [a,b]$，$|t_1 - t_2| < \delta_i$ 时有

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \varepsilon/3.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$. 对任一 $x(t) \in M$，存在 $x_i(t)$，使

$$\rho(x, x_i) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - x_i(t)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

于是当 $t_1,t_2\in[a,b]$，$|t_1-t_2|<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}|x(t_1)-x(t_2)|&\leqslant|x(t_1)-x_i(t_1)|\\&+|x_i(t_1)-x_i(t_2)|+|x_i(t_2)-x(t_2)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

充分性：根据定理 2，只要证明对于任何 $\varepsilon>0$，都有 M 的相对紧 ε－网存在.

任给 $\varepsilon>0$，根据(ii)，有 $\delta>0$，使当 $t_1,t_2\in[a,b]$，$|t_1-t_2|<\delta$ 时对所有的 $x(t)\in M$ 有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$. 取自然数 n，使 $\dfrac{b-a}{n}<\delta$；把区间$[a,b]n$ 等分，记 $h=\dfrac{b-a}{n}$. 这时显然当 t_1,t_2 同属于某个小区间

$$[a+kh,a+(k+1)h](k=0,1,\cdots,n-1)$$

时，对所有的 $x(t)\in M$ 都有 $|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon$. 现在，对每一 $x(t)\in M$，按下式作一函数 $x_h(t)$，

$$x_h(t)=\begin{cases}x(a+kh), & \text{当 } t=a+kh,k=0,1,\cdots,n;\\ \lambda x(a+kh)+(1-\lambda)x(a+(k+1)h), & \\ & \text{当 } t=a+\lambda kh+(1-\lambda)(k+1)h\\ & =a+kh+(1-\lambda)h,\\ & k=0,1,\cdots,(n-1),\ \lambda\in(0,1).\end{cases}$$

显然，$x_h(t)$ 的图形是一条折线，因此 $x_h(t)\in C[a,b]$.

如果 $t=a+kh$，则 $x_h(t)=x(t)$，

如果 $t\in(a+kh,a+(k+1)h)$，则有 $\lambda\in(0,1)$ 使

$t=a+kh+(1-\lambda)h$，此时

$$|x(t)-x(a+kh)|<\varepsilon,\quad |x(t)-x(a+(k+1)h)|<\varepsilon,$$

从而

$$\begin{aligned}&|x(t)-x_h(t)|\\&=|x(t)-\lambda x(a+kh)-(1-\lambda)x(a+(k+1)h)|\\&\leqslant\lambda|x(t)-x(a+kh)|\\&+(1-\lambda)|x(t)-x(a+(k+1)h)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，对所有 $t \in [a,b]$ 皆有 $|x(t)-x_h(t)| < \varepsilon$，故

$$\rho(x,x_h) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - x_h(t)| < \varepsilon,$$

故诸 $x_h(t)$ 所成之集 N 成为 M 的一个 ε － 网. 下面证明 N 是相对紧集.

首先，

$$|x_h(t)| \leqslant |x(t) - x_h(t)| + |x(t)| < \varepsilon + K,$$

故诸 $x_h(t)$ 一致有界，特别它们在 $n+1$ 个顶点上的函数值一致有界. 现在设 $\{x_h^m(t)\}$ 是 N 中任一序列，则存在它的一个子列 $\{x_h^{m_i}(t)\}$ 使得在 $n+1$ 个顶点上的函数值一致收敛，设 $x_h^{m_i}(a+kh)$ 收敛于 x_k. 作连续函数

$$x^*(t) = \begin{cases} x_k, & \text{当 } t = a+kh,\ k = 0,1,\cdots,n; \\ \lambda x_k + (1-\lambda)x_{k+1}, & \text{当 } t = a+kh+(1-\lambda)h, \\ \lambda \in (0,1),\ k = 0,1,\cdots,n-1. \end{cases}$$

对任一 $t \in [a,b]$，必有 k，使 $t \in [a+kh, a+(k+1)h]$，于是

$$\begin{aligned} |x_h^{m_i}(t) - x^*(t)| &= |\lambda x_h^{m_i}(a+kh) + (1-\lambda)x_h^{m_i}(a+(k+1)h) \\ &\quad - \lambda x^*(a+kh) - (1-\lambda)x^*(a+(k+1)h)| \\ &\leqslant \lambda |x_h^{m_i}(a+kh) - x_k| + (1-\lambda)|x_h^{m_i}(a+(k+1)h) - x_{k+1}| \\ &\leqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |x_h^{m_i}(a+kh) - x_k| \to 0, \quad (\text{当 } i \to \infty), \end{aligned}$$

因此 $\rho(x_h^{m_i}, x^*) \to 0$，故 N 是相对紧集. ▌

注　Arzela 定理有着广泛的应用，特别可用它来证明微分方程解的存在性，关于这方面的应用，读者可参考 И, Г. Петровскнй 著“常微分方程论讲义”.

下面讨论 $L^p[a,b](p>1)$ 中集合列紧性的条件.

定义 4　设 $x(t) \in L^p[a,b](p>1)$，将 $x(t)$ 的定义范围扩充到 $[a,b]$ 之外：当 $t \overline{\in} [a,b]$ 时，令 $x(t) = 0$. 令

$$x_h(t) = \frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(s)\mathrm{d}s \quad (h>0),$$

函数 $x_h(t)$ 称为 $x(t)$ 的**斯捷克洛夫**(Стеклов) **函数**.

引理 1 $x_h(t)\in C[a,b]$.

事实上,令 $F(t)=\int_{-\infty}^{t}x(s)\mathrm{d}s=\int_{a}^{t}x(s)\mathrm{d}s$,

则

$$x_h(t)=\frac{1}{2h}[F(t+h)-F(t-h)],$$

即知 $x_h(t)$ 是连续的.

引理 2 $\|x_h\|\leqslant\|x\|$,即

$$\left(\int_a^b|x_h(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\leqslant\left(\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}.$$

证明 设 $q=\dfrac{p}{p-1}$,从而 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,那么

$$\begin{aligned}\int_a^b|x_h(t)|^p\mathrm{d}t&=\int_a^b\left(\frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h}x(s)\mathrm{d}s\right|\right)^p\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{(2h)^p}\int_a^b\mathrm{d}t\left(\int_{t-h}^{t+h}\mathrm{d}s\right)^{p/q}\left(\int_{t-h}^{t+h}|x(s)|^p\mathrm{d}s\right)\\&=\frac{1}{2h}\int_a^b\mathrm{d}t\int_{-h}^{h}|x(t+\tau)|^p\mathrm{d}\tau\\&=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}\tau\int_a^b|x(t+\tau)|^p\mathrm{d}t\\&\leqslant\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}\tau\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t\\&=\int_a^b|x(t)|^p\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

即 $$\|x_h\|\leqslant\|x\|.$$ ▌

引理 3 $\lim\limits_{h\to0^+}\|x_h-x\|=0$.

证明 (1°) 设 $x(t)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,则对任一 $t\in(a,b)$,当 $h>0$ 充分小时,有 $[t-h,t+h]\subset[a,b]$,于是由积分中值定理:

$$x_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}x(s)\mathrm{d}s=x(\xi),$$

其中 $\xi \in (t-h, t+h)$，由此可知，在 (a,b) 中每一点 t 有 $x_h(t) \to x(t)$ (当 $h \to 0^+$).

又 $x(t)$ 连续，故有界：存在 $B > 0$，使 $|x(t)| \leqslant B$，从而有 $|x_h(t)| \leqslant B$. 由 Lebesgue 有界收敛定理知：

$$\lim_{h \to 0^+} \int_a^b |x_h(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t = 0,$$

即
$$\lim_{h \to 0^+} \| x_h - x \| = 0.$$

(2°) 现在设 $x(t)$ 是 $L^p[a,b]$ 中任一函数. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$，可取连续函数 $y(t)$，使 $\| x - y \| < \frac{\varepsilon}{3}$. 注意到 $x(t) - y(t)$ 的 Стеклов 函数是 $x_h(t) - y_h(t)$，由引理 2 知

$$\| x_h(t) - y_h(t) \| \leqslant \| x - y \| < \frac{\varepsilon}{3},$$

从而

$$\begin{aligned} \| x_h - x \| &\leqslant \| x_h - y_h \| + \| y_h - y \| + \| y - x \| \\ &< \| y_h - y \| + \frac{2}{3}\varepsilon. \end{aligned}$$

由 (1°) 中所证知存在 $\delta > 0$，当 $0 < h < \delta$ 时，$\| y_h - y \| < \frac{1}{3}\varepsilon$，从而当 $0 < h < \delta$ 时，$\| x_h - x \| < \varepsilon$，即

$$\lim_{h \to 0^+} \| x_h - x \| = 0. \ \blacksquare$$

定理 4 (Колмогоров) 集合 $M \subset L^p[a,b]$ $(p > 1)$ 为相对紧集的充分必要条件是

(i) M 是 $L^p[a,b]$ 中的有界集；

(ii) 对于 M 中的一切 $x(t)$，当 $h \to 0^+$ 时，$\| x_h - x \|$ 一致趋于零.

证明　必要性. 条件(i) 是显然的，下证条件(ii). 由 M 的紧性和定理 1，对任给 $\varepsilon > 0$，必有有穷 $\frac{\varepsilon}{3}$ — 网存在，设为 $x^1(t), x^2(t)$,

$\cdots, x^n(t)$. 由引理 3,对每一 $i(=1,2,\cdots,n)$,有 $\delta_i > 0$ 存在,使当 $0 < h < \delta_i$ 时,恒有

$$\| x_h^i - x^i \| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对任何 $x(t) \in M$,都有某 $x^i(t)$,使 $\| x - x^i \| < \frac{\varepsilon}{3}$,

令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n)$,则当 $0 < h < \delta$ 时,

$$\| x_h - x \| \leqslant \| x_h - x_h^i \| + \| x_h^i - x^i \| + \| x^i - x \|$$
$$\leqslant \| x - x^i \| + \| x_h^i - x^i \| + \| x^i - x \| < \varepsilon.$$

充分性. 由条件(ii),集合 $M_h = \{x_h(t) \mid x(t) \in M\}$ 当 h 充分小时,就成为 M 的一个 ε — 网. 因此,根据定理 2,要证 M 的列紧性,只需证明 M_h 的列紧性就行了. 利用定理 3,只需证明 M_h 一致有界且等度连续(因为在 $C[a,b]$ 中的相对紧集必是 $L^p[a,b]$ 中的相对紧集). 事实上,设 $\| x \| \leqslant K$ 对 $\forall x(t) \in M$,则

$$|x_h(t)| \leqslant \frac{1}{2h}\left(\int_{t-h}^{t+h} \mathrm{d}s\right)^{1/q}\left(\int_{t-h}^{t+h} |x(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{1}{(2h)^{1/p}}\left(\int_a^b |x(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{1/p} \leqslant (2h)^{-1/p} K,$$

故诸 $x_h(t)$ 一致有界. 此外,有

$$|x_h(t_1) - x_h(t_2)| = \frac{1}{2h}\left|\int_{t_1-h}^{t_1+h} x(s)\mathrm{d}s - \int_{t_2-h}^{t_2+h} x(s)\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{2h}\left(\left|\int_{t_1-h}^{t_2-h} x(s)\mathrm{d}s\right| + \left|\int_{t_1+h}^{t_2+h} x(s)\mathrm{d}s\right|\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{h}|t_1 - t_2|^{1/q}\left(\int_a^b |x(s)|^p \mathrm{d}s\right)^{1/p}$$
$$\leqslant |t_1 - t_2|^{1/q} h^{-1} K,$$

故诸 $x_h(t)$ 等度连续. ▌

关于 $L^p[a,b]$ 中集的列紧性,除了上述的 Колмогоров 定理外,还有如下的

定理 5 (Riesz) 集合 $M \subset L^p[a,b]$ $(p > 1)$ 是相对紧集的充

分必要条件是

(i) M 在 $L^p[a,b]$ 中有界;

(ii) 对于 M 中的一切 $x(t)$,当 $\tau\to 0$ 时,$\|x(t+\tau)-x(t)\|$ 一致趋于零(规定当 $t\overline{\in}[a,b]$ 时,$x(t)=0$).

证明　必要性.(i) 显然,下证(ii).对任意 $\varepsilon>0$,取 M 的一个有限的 $\frac{\varepsilon}{3}$-网 $x_1(t),\cdots,x_n(t)$,对每一 $i(1\leqslant i\leqslant n)$ 作一连续函数 $y_i(t)$ 使

$$\|x_i(t)-y_i(t)\|<\frac{\varepsilon}{9}.$$

对每一 $y_i(t)$,存在 $\delta_i>0$,使当 $|s|<\delta_i$ 时

$$|y_i(t-s)-y_i(t)|<\frac{\varepsilon}{9(b-a)^{1/p}},$$

那么当 $|s|<\delta=\min\{\delta_1,\cdots,\delta_n\}$ 时

$$\|y_i(t-s)-y_i(t)\|<\frac{\varepsilon}{9},$$

从而当 $|s|<\delta$ 时,

$$\begin{aligned}\|x_i(t-s)-x_i(t)\|&\leqslant\|x_i(t-s)-y_i(t-s)\|\\&+\|y_i(t-s)-y_i(t)\|+\|y_i(t)-x_i(t)\|<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

现在对任一 $x(t)\in M$,取 $x_i(t)$,使 $\|x(t)-x_i(t)\|<\frac{\varepsilon}{3}$.当 $|s|<\delta$ 时

$$\begin{aligned}\|x(t-s)-x(t)\|&\leqslant\|x(t-s)-x_i(t-s)\|\\&+\|x_i(t-s)-x_i(t)\|+\|x_i(t)-x(t)\|\\&\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon+\frac{1}{3}\varepsilon=\varepsilon.\end{aligned}$$

充分性.我们证明,在定理 5 的条件下定理 4 的条件也满足.由

$$\begin{aligned}
|x_h(t)-x(t)| &= \left|\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}x(s)\mathrm{d}s-x(t)\right| \\
&= \frac{1}{2h}\left|\int_{t-h}^{t+h}x(s)\mathrm{d}s-\int_{-h}^{h}x(t)\mathrm{d}s\right| \\
&= \frac{1}{2h}\left|\int_{-h}^{h}(x(t+s)-x(t))\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2h}(2h)^{1/q}\left[\int_{-h}^{h}|x(t+s)-x(t)|^p\mathrm{d}s\right]^{1/p} \\
&= (2h)^{-1/p}\left[\int_{-h}^{h}|x(t+s)-x(t)|^p\mathrm{d}s\right]^{1/p}
\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}
\|x_h(t)-x(t)\|^p &\leqslant \int_a^b(2h)^{-1}\int_{-h}^{h}|x(t+s)-x(t)|^p\mathrm{d}s\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\mathrm{d}s\int_a^b|x(t+s)-x(t)|^p\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

由此即知定理 4 的条件(ii) 满足. ▌

注 L^p 中点集列紧性的上述两个判别法有着广泛的应用,特别在讨论有关偏微分方程的问题时经常要用到它.

§7·8 关于赋范线性空间的若干概念

7·8·1 空间中的点集·线性同构·范数等价

在 §7·8·1 我们总是设 E 是数域 K 上的赋范线性空间.

设 $\{x_i\}_1^n\subset$ E. 若当 K 中的 n 个数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 不全为 0 时 $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ 必不为 θ,则称元素 $x_1,\cdots,x_n$ **线性无关**;否则,称**线性相关**;和式 $\sum\limits_{i=1}^n\alpha_ix_i$ 称为 $x_1,\cdots,x_n$ 的**线性组合**. 设 $A\subset$ E,若 A 中任意有限个元素都线性无关,则称 A 中的所有元素线性无关,或称 A 是一个**线性无关的集**.

设 L 是 E 中某非空集合,如果

$$x_1,\cdots,x_n \in \mathsf{L} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \mathsf{L} \quad (\forall a_i \in K),$$

则称 L 是 E 的一个**线性子空间**，简称做子空间，如果子空间 L 又是 E 中闭集，则称 L 是 E 的**闭线性子空间**.

显然，如果 E 完备，则 E 的闭子空间也完备.

线性子空间的一个平移称做**线性流形**. 即，若 L 是 E 的子空间，$x_0 \in$ E，集合 A $= \{x + x_0 \mid x \in \mathsf{L}\}$ 就叫做一个**线性流形**. 集合 A 也写作 L $+ x_0$. 闭子空间的平移称做**闭线性流形**.

设 $M \subset$ E 为一个非空集合，集合 $\{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \mid x_i \in M, a_i \in K, n \in \mathsf{N}\}$ 显然构成 E 的一个线性子空间，且是包含 M 的最小子空间，称为**由 M 所决定(生成)的子空间**，记作 L(M).

显然，L(M) 的闭包就是包含 M 的最小闭子空间，称为**由 M 决定(生成)的闭子空间**，以 $\overline{\mathsf{L}(M)}$ 表示之.

如果 M 有无穷多个元素，一般来说 $\overline{\mathsf{L}(M)}$ 与 L(M) 是不相等的.

例如，设 E $= C[0,1]$，$M = \{x^n \mid n = 1,2,\cdots\} \subset$ E，显然，L(M) 就是多项式的全体，而 $\overline{\mathsf{L}(M)} = C[0,1]$，故 L($M$) 是 $\overline{\mathsf{L}(M)}$ 的真子集.

由 E 中有限个线性无关的元素 $x_1,\cdots,x_n$ 所生成的子空间 G 叫做 E 的**有限维子空间**. 对此 G，显然 G 中线性无关元的个数不能大于 n，并且，如果 $1 \leqslant r < n$，$x_1^*,\cdots,x_r^*$ 是 G 中一组线性无关元，那么，必有 $x_{r+1}^*,\cdots,x_n^* \in$ G，使得 $x_1^*,\cdots,x_n^*$ 是线性无关的，进而 L($x_1^*,\cdots,x_n^*$) $=$ G，于是我们把 n 称为空间 G **的维数**. 此时，G 中任一元素 x 都可以唯一地表示成 $x_1,\cdots,x_n$ 的线性组合

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,$$

此 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 叫做 G 的一个**基底**，而 $\{a_1,\cdots,a_n\}$ 叫做元素 x 关于基底 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 的**坐标**.

设 $x_0 \in E$，$x_0 \neq 0$，称集合 $L\{x_0\} = \{\alpha x_0 \mid \alpha \in R^1\}$ 为 E 中一条过原点的**直线**. 设 $x_1, x_2 \in E$，称集合 $\{\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \mid \alpha \in [0,1]\}$ 为以 x_1, x_2 为端点的**直线段**. 设 $D \subset E$，若当 $x_1, x_2 \in D$，$\alpha \in [0,1]$ 时 $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in D$，则称 D 是一个**凸集**. 例如 E 中的开球、闭球都是凸集，E 的线性子空间也是凸集. 以零元 θ 为中心以 1 为半径的闭球称为 E 的**单位球**.

设 $A \subset E$，$B \subset E$，点集 $\{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ 称为 A 与 B 的**线性和**，记作 $A + B$. 设 E_1, E_2 是 E 的两个线性子空间，若 $E_3 = E_1 + E_2$ 且对任意 $x_3 \in E_3$ 都存在唯一的 $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ 使 $x_3 = x_1 + x_2$，则称 E_3 是 E_1 与 E_2 的**线性直接和**(简称**直和**)，记作 $E_3 = E_1 \oplus E_2$.

设 E_1, E_2 都是数域 K 上的赋范线性空间. 若映射 $V: E_1 \to E_2$ 是一一的，并且对任意 $x, y \in E_1$，$\alpha, \beta \in K$ 恒有

$$V(\alpha x + \beta y) = \alpha Vx + \beta Vy$$

$$(V(\alpha + \beta y) = \bar{\alpha} Vx + \bar{\beta} Vy),$$

则称 V 是 E_1 到 E_2 的**线性同构映射(共轭线性同构映射** —— 与上面的括号相应). 若 $V: E_1 \to E_2$ 即是(共轭)线性同构映射又是等距映射，就称为**(共轭)线性同构等距映射**(或简称为**等距(共轭)线性同构**). 这样的映射显然是保范的(即对 $\forall x \in E_1$，$\|Vx\| = \|x\|$). 若 E_1, E_2 间存在着这样的映射，就称 E_1 与 E_2 是**等价的赋范线性空间**. 当限于讨论与线性运算、范数有关的问题(如元素间的线性无关性、点集的闭性等)时，等价的赋范线性空间可以看成是同一个空间，而不加以区别.

设在线性空间 E 上按不同的方式引入了两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$. 若 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 所导出的距离是等价的(即所决定的收敛是相同的)，则称这**两个范数等价**.

命题 1 线性空间 E 上两个范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价的充要条件是：存两个正实数 a 与 b 使

$$a\|x\|_2 \leqslant \|x\|_1 \leqslant b\|x\|_2 \quad (\forall x \in \mathrm{E}). \quad (7\cdot8\cdot1)$$

证明　充分性显然.下证必要性:假若(7·8·1)不成立,譬如(7·8·1)右边的不等式不成立,则对任意自然数 n 都存在 x_n 使

$$\|x_n\|_1 > n\|x_n\|_2.$$

令 $\tilde{x}_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}$,则 $\|\tilde{x}_n\|_1 = 1$,而

$$\|\tilde{x}_n\|_2 = \left\|\frac{x_n}{\|x_n\|_1}\right\|_2 = \frac{1}{\|x_n\|_1}\|x_n\|_2$$

$$< \frac{1}{\|x_n\|_1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\|x_n\|_1 = \frac{1}{n} \to 0.$$

于是$\{\tilde{x}_n\}$按 $\|\cdot\|_1$ 不收敛于θ,按 $\|\cdot\|_2$ 收敛于θ,从而 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 不等价. ▌

*7·8·2　商空间

设 E_0 是赋范线性空间 E 的一个闭子空间.对 E 中任意两元素 x,y,如果 $x-y\in \mathrm{E}_0$,我们就称 x 与 y 等价,记作 $x\sim y$.

容易验证,关系"$\sim$"具有

反身性:$x\sim x$;

对称性:$x\sim y \Rightarrow y\sim x$;

传递性:$x\sim y, y\sim z \Rightarrow x\sim z$.

利用等价关系 $\sim$ 把 E 中元素分成一些等价类.元素 x 所在的等价类记作 $\tilde{x}$. 两个等价类 $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ 作为 E 的子集、或者 $\tilde{x}=\tilde{y}$,或者 $\tilde{x}\cap\tilde{y}=\varnothing$.等价类的全体记作 E/E_0.在 E/E_0 中定义线性运算如下:

$$\tilde{x}+\tilde{y} = \widetilde{x+y};$$

$$\alpha\tilde{x} = \widetilde{\alpha x} \quad \alpha\in K,$$

这样定义的线性运算有明确意义,即它与等价类中所取代表元素无关.比如,我们讨论加法运算.

如果 $\tilde{x}=\widetilde{x_1}$，$\tilde{y}=\widetilde{y_1}$，那么 $x-x_1\in E_0$，$y-y_1\in E_0$，

从而$(x+y)-(x_1+y_1)=x-x_1+y-y_1\in E_0$，

即 $\widetilde{x+y}=\widetilde{x_1+y_1}$.

类似地也可以讨论数乘运算.

容易看出，按照我们所规定的线性运算，E/E_0 成一线性空间.

现在，我们在 E/E_0 中定义范数.

设 $\tilde{x}\in E/E_0$，令

$$\|\tilde{x}\|=\inf_{y\in\tilde{x}}\|y\|, \tag{7·8·2}$$

显然

$$\|\tilde{x}\|\geqslant 0,\ \|\tilde{0}\|=0,\ \|\alpha\tilde{x}\|=|\alpha|\,\|\tilde{x}\|;$$

如果 $\|\tilde{x}\|=0$，则有 $y_n\in\tilde{x}$，$\|y_n\|\to 0$，而 $z_n=x-y_n\in E_0$，E_0 是闭集，故 $x=\lim\limits_{n\to\infty}z_n\in E_0$，即 $\tilde{x}=\tilde{0}$.

最后证明

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|\leqslant\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|.$$

由 $\|\tilde{x}\|$ 的定义，对每个自然数 n，存在 $x_n\in\tilde{x}$，$y_n\in\tilde{y}$，使得

$$\|x_n\|\leqslant\|\tilde{x}\|+\frac{1}{n},\ \|y_n\|\leqslant\|\tilde{y}\|+\frac{1}{n}.$$

注意到 $x_n+y_n\in\widetilde{x_n+y_n}=\widetilde{x_n}+\widetilde{y_n}=\tilde{x}+\tilde{y}$，因此

$$\begin{aligned}\|\tilde{x}+\tilde{y}\|&\leqslant\|x_n+y_n\|\leqslant\|x_n\|+\|y_n\|\\&\leqslant\|\tilde{x}\|+\frac{1}{n}+\|\tilde{y}\|+\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 即得

$$\|\tilde{x}+\tilde{y}\|\leqslant\|\tilde{x}\|+\|\tilde{y}\|.$$

于是 E/E_0 成为赋范线性空间，称为 E 关于 E_0 的商空间. 今后凡说商空间 E/E_0 中的范数都是按(7·8·2)式定义的.

定理 1　设 E 是 *Banach* 空间，E_0 是 E 的闭子空间，则 E/E_0 也是 Banach 空间.

证明　只需证明 E/E_0 是完备的. 设 $\{\tilde{x}_n\}$ 是 E/E_0 中的基本列. 显然可取一自然数列 $\{n_k\}$，使当 $n,m \geqslant n_k$ 时

$$\|\tilde{x}_n - \tilde{x}_m\| < \frac{1}{2^k},$$

特别还可使

$$\|\tilde{x}_{n_k} - \tilde{x}_{n_{k+1}}\| < \frac{1}{2^k}.$$

在 $\tilde{x}_{n_1}$ 中任取一 x_{n_1}，由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} > \|\tilde{x}_{n_1} - \tilde{x}_{n_2}\| &= \inf_{x\in\tilde{x}_{n_1},\, y\in\tilde{x}_{n_2}} \|x-y\| \\ &= \inf_{x\in\tilde{x}_{n_1},\, y\in\tilde{x}_{n_2}} \|x_{n_1} - (y - x + x_{n_1})\| \\ &= \inf_{y'\in\tilde{x}_{n_2}} \|x_{n_1} - y'\|,\end{aligned}$$

因此存在 $x_{n_2} \in \tilde{x}_{n_2}$，使

$$\|x_{n_1} - x_{n_2}\| \leqslant \frac{1}{2},$$

利用归纳法，不难得出，存在一元素列 $\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k} \in \tilde{x}_{n_k}$，使

$$\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\| \leqslant \frac{1}{2^k}, \quad k = 1,2,\cdots$$

于是，对于 $l > k$ 有

$$\|x_{n_l} - x_{n_k}\| \leqslant \sum_{i=0}^{l-k-1} \|x_{n_{k+i}} - x_{n_{k+i+1}}\| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+i}} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

故 $\{x_{n_k}\}$ 是一基本列. 由于 E 完备，因此存在 $x \in E$，使 $\|x_{n_k} - x\| \to 0$，从而

$$\|\tilde{x}_{n_k} - \tilde{x}\| \to 0.$$

由于$\{\tilde{x}_{n_k}\}$是基本列$\{\tilde{x}_n\}$的一个子列,故有

$$\|\tilde{x}_n-\tilde{x}\|\to 0.$$

因此,E/E_0是完备的. ▌

§7·9　无限维赋范线性空间的特征

引理1　设E是有限维赋范线性空间,$\{x_1,\cdots,x_n\}$为E中一个基底,则必有常数M存在,使得对于任何$x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\in E$,皆有

$$|\alpha_i|\leqslant M\|x\|\quad(i=1,\cdots,n).\tag{7·9·1}$$

证明　令

$$f(x)=f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\|x\|,$$

则$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$是$n$元连续函数.令

$$F=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\mid|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|=1\},$$

则F是R^n中的有界闭集,且

当$(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in F$时,　　$x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\neq 0,$

故

$$f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\|x\|>0,$$

从而f在集合F上达到正的下确界m.

现在设$x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\neq 0$,则$\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|>0$,令

$$\tilde{x}=\frac{x}{\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|}=\sum_{i=1}^{n}\widetilde{\alpha_i}x_i,$$

则$\sum\limits_{i=1}^{n}|\widetilde{\alpha_i}|=1$,即$(\widetilde{\alpha_1},\cdots,\widetilde{\alpha_n})\in F$,从而

$$\|\tilde{x}\|=f(\widetilde{\alpha_1},\cdots,\widetilde{\alpha_n})\geqslant m>0,$$

即

$$\| x \| \geqslant m \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

故若令 $M = \dfrac{1}{m}$，即知(7·9·1) 成立. ▌

引理 2　(Riesz) 设 E_0 是赋范线性空间 E 的一个闭真子空间，则对于任何 $d \in (0,1)$，都存在 $x_d \in E$，$\| x_d \| = 1$，使对一切 $x \in E_0$ 都有

$$\| x_d - x \| \geqslant d.$$

证明　取 $x_1 \in E \backslash E_0$，由于 E_0 是闭集，$x_1 \overline{\in} E_0$，故

$$\rho = \rho(x_1, E_0) = \inf_{x \in E_0} \| x_1 - x \| > 0.$$

因 $\dfrac{\rho}{d} > \rho$，故有 $x_0 \in E_0$ 使 $\| x_1 - x_0 \| < \dfrac{\rho}{d}$.

令 $x_d = \dfrac{x_1 - x_0}{\| x_1 - x_0 \|}$，则 $\| x_d \| = 1$.

对任意 $x \in E_0$，有 $x_0 + \| x_1 - x_0 \| x \in E_0$，从而

$$\| x_d - x \| = \left\| \frac{x_1 - x_0}{\| x_1 - x_0 \|} - x \right\|$$

$$= \left\| \frac{x_1}{\| x_1 - x_0 \|} - \frac{x_0 + \| x_1 - x_0 \| x}{\| x_1 - x_0 \|} \right\|$$

$$= \frac{\| x_1 - (x_0 + \| x_1 - x_0 \| x) \|}{\| x_1 - x_0 \|} \geqslant \frac{\rho}{\| x_1 - x_0 \|} \geqslant d.$$ ▌

定理 1　赋范线性空间 E 是有限维的充分必要条件是：E 中任一有界集都是相对紧集.

证明　必要性：设 E 是有限维的，以 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 表 E 中一个基底. 设 S 是 E 中一个有界集，即存在一个正常数 β，使对任一 $x \in S$ 有 $\| x \| \leqslant \beta$. 任取 S 中一序列 $y_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m)} x_i$，$(m = 1, 2, \cdots)$，则 $\| y_m \| \leqslant \beta$，由引理 1，存在 $M > 0$，使

$$|\alpha_i^{(m)}| \leqslant M \| y_m \| \leqslant M\beta,$$

故对任何 i,数列$\{\alpha_i^{(m)}\}$ 都是有界的,从而,对此 n 个数列,必可选出一个自然数列$\{m_k\}$,使得对所有的 $i=1,2,\cdots,n$,$\{\alpha_i^{(m_k)}\}$ 收敛,设

$$\alpha_i^{(m_k)} \to \alpha_i \quad \text{当 } k \to \infty,$$

则
$$y_{m_k} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{(m_k)} x_i \to \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \mathrm{E},$$

故 S 是相对紧集.

充分性:用反证法.设E不是有限维的,在E中任取一点 x_1,使 $\| x_1 \| = 1$,并令 E_1 表由 x_1 所产生的子空间(显然是一维的).由假定,E_1 是 E 的真子空间.由引理 2 必有 $x_2 \in \mathrm{E}$,$\| x_2 \| = 1$,使 $\rho(x_2, x) \geqslant \frac{1}{2}(\forall x \in \mathrm{E}_1)$,特别 $\| x_2 - x_1 \| \geqslant \frac{1}{2}$;又令 E_2 表由$\{x_1, x_2\}$ 所产生的子空间,它也是E的真子空间,从而又有 $x_3 \in \mathrm{E}$,$\| x_3 \| = 1$,使 $\rho(x_3, \mathrm{E}_2) \geqslant \frac{1}{2}$,特别 $\| x_3 - x_1 \| \geqslant \frac{1}{2}$,$\| x_3 - x_2 \| \geqslant \frac{1}{2}$;这样可以继续进行下去,即得一元素列$\{x_n\}$,满足:$\| x_i \| = 1$,且当 $i \neq j$ 时 $\| x_i - x_j \| \geqslant \frac{1}{2}$,于是,有界序列$\{x_n\}$ 没有收敛子列,此与 E 的任一有界集是相对紧集矛盾. ▌

习　题　七

1. 试证:距离空间中收敛列的极限是唯一的.

2. 试证:距离空间 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x^* \in X$ 的充分必要条件是$\{x_n\}$的任一子列收敛于 x^*.

3. 设 x,y,z,w 是距离空间 X 中的任意四个点,证明:

(i) $|\rho(x,z)-\rho(y,z)| \leqslant \rho(x,y)$

(ii) $|\rho(x,z)-\rho(y,w)| \leqslant \rho(x,y)+\rho(z,w)$

4. $\rho(x,y)=(x-y)^2$ 是定义在实数集合上的一个距离吗?

5. 若$\{x_n\}$,$\{y_n\}$是距离空间 X 中的两个基本列,证明:$a_n=\rho(x_n,y_n)$ 收敛.

6. 试证:距离空间 X 中任一子集的闭包是闭集.

7. 试证:对距离空间 X 中点集 A 及 $\varepsilon>0$,$\{x\,|\,\rho(x,A)<\varepsilon\}$ 是开集;$\{x\,|\,\rho(x,A)\leqslant\varepsilon\}$ 是闭集.

8. 设 $\rho(x,y)$ 是空间 X 上的距离,证明:

$$\widetilde{\rho}(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

也定义了 X 上元素间的距离.

9. 试证:任一离散空间必是完备的.

10. 设 X 是距离空间,闭集 $A,B\subset X$ 不相交,试证:必有定义在全空间上的连续泛函 $f(x)$,使得:$0\leqslant f(x)\leqslant 1(\forall x\in X)$,且

$$x\in A\Rightarrow f(x)=0;x\in B\Rightarrow f(x)=1.$$

11. 设 A 是赋范线性空间 E 的有限子集,证明:

$$\overline{\mathrm{L}(A)}=\mathrm{L}(A).$$

12. 证明:距离空间中开球是开集,闭球是闭集.

13. 证明:赋范线性空间中,开球的闭包是闭球,闭球的内部是开球.

14. 试证:按$C[a,b]$中范数,$C^m[a,b]$是$C[a,b]$的非闭的子空间.

15. 以R^m表R^n的m维子空间,证明R^n/R^m是$n-m$维赋范线性空间.

16. 试用纲定理证明:[0,1]中无理数的全体不能表示成可数个闭集的并.

17. 试证:任一赋范线性空间中的单位球是凸集.

18. 试证:有限维线性空间上的所有范数都是等价的.

19. 设E是实赋范线性空间,$\{x_1,\cdots,x_n\}\subset$ E是线性无关的n个元,$x\in$ E,证明:存在n个实数$\lambda_1',\cdots,\lambda_n'$使得

$$\begin{aligned}&\| x-(\lambda_1'+\cdots+\lambda_n') \|\\ &= \inf_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \| x-(\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n) \|.\end{aligned}$$

20. 设X是距离空间,证明$A\subset$ X是稀疏集的充分必要条件是$\overline{X\backslash\overline{A}}=$ X.

21. 证明:全有界集必可分.

22. 证明:$C^m[0,1]$按$C[0,1]$距离的完备化空间为$C[0,1]$.

23. 证明$l^p(p\geqslant 1)$是完备的.

24. 证明$F[a,b]$上连续函数的全体$C[a,b]$按下式定义距离

$$\rho(x,y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,\mathrm{d}t \quad \forall\, x,y\in C[a,b]$$

所得的距离空间是不完备的,而$L^1[a,b]$恰是这个距离空间的完备化空间.

25. 试验证 §7·2例7·2·5中的空间$C^m[a,b]$是Banach空间,并证明$C^m[a,b]$中元素列依范数收敛等价于函数列及其各阶导数一致收敛.

26. 试验证 §7·2例7·2·6中空间m是Banach空间.

27. 设X$=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)\mid$ 诸$\xi_i\in R^1,n\in$ N$\}$,对$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in$ X,令$\rho(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n-\eta_n|$,

证明：ρ是X上的一个距离，从而X成一距离空间；并说明X不是完备的，求出它的完备化空间.

28. 证明 §7·1 例7·1·3中的空间s是完备的.

29. 试证：完备距离空间的闭子空间也是完备的.

30. 试证：距离空间的完备子空间必是闭的.

31. 试证：距离空间X是完备的充分必要条件是：闭集串A_n满足$A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \cdots$

$$d_n = \sup_{x,y \in A_n} \rho(x,y) \to 0 (n \to \infty) \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing.$$

32. 设E是完备的距离空间，$A_n(n=1,2,\cdots)$是E中一串稠密的开集，证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$也是E的稠密集.

33. 设X，X_1是二距离空间，且X是紧的. 又设$T:X \to X_1$是连续映射，证明值域$T(X)$是X_1中的紧集.

34. 试证：相对紧集的闭包是紧的.

35. 试证：紧距离空间上的连续泛函是一致连续的.

36. 设X是紧距离空间，X_1是完备的距离空间，证明：X到X_1的连续映射的全体$C(X \to X_1)$在距离$\rho(x,y) = \sup\limits_{t \in X} \rho_{X_1}(x(t), y(t))$下是完备的距离空间.

37. 试证：R^n中集合M列紧的充分必要条件是M有界；$M \subset R^n$是自列紧的充分必要条件是M为有界闭集.

38. 试证：$C[a,b]$中函数集合M相对紧的充分必要条件是：(1) 对每一$t \in [a,b]$，存在$K = K(t) < +\infty$，使$|x(t)| \leqslant K(t)(\forall x \in M)$；(2) M中函数等度连续.

39. 试证：任一包含无穷多个元素的离散距离空间不是紧距离空间.

40. 设$k(x,y)$是$[0,1]\times[0,1]$上连续函数，且

$$\int_0^1\int_0^1 k^2(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < 1,$$

试证,对任意$[0,1]$上的连续函数$g(x)$,方程

$$\int_0^1 k(x,y)f(y)\mathrm{d}y - f(x) = g(x)$$

有唯一的连续解.

41. 设M是Banach空间X中的有界闭凸集,$T:M\to M$满足:$\| Tx-Ty \| \leqslant \| x-y \|$ $(\forall x,y\in M)$.证明,对任意$\varepsilon>0$,必有$x_\varepsilon \in M$,使得

$$\| Tx_\varepsilon - x_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon.$$

42. 设M是紧距离空间,$T:M\to M$满足

$$\rho(Tx,Ty) < \rho(x,y) \quad \forall x,y\in M, x\neq y,$$

试证:必有唯一的$x^*\in M$,使$Tx^* = x^*$.

43. 在R^n中定义

$$\rho_1(x,y) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\xi_k - \eta_k|$$

其中$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,则$\rho_1(\cdot,\cdot)$是$R^n$上的距离,从而$R^n$按$\rho_1$成一距离空间.

44. 设X是可分的距离空间.$\{G_c | c\in J\}$为X的一个开集复盖,则从$\{G_c\}$中可取出可列个集组成X的一个复盖.

45. 设$f(x)$是由距离空间X到距离空间X_1的连续映射,A在X中稠密,证明:$f(A)$在$f(X)$中稠密.

46. 举例说明全有界集不一定是列紧的.

47. 设F_1,F_2是距离空间X中两个紧子集,则存在$x_0\in F_1$,$y_0\in F_2$,使$\rho(F_1,F_2)=\rho(x_0,y_0)$.

48. 证明:$L^p(R^1)(p\geqslant 1)$可分.

49. 证明:$l^p(p\geqslant 1)$中的子集A列紧的充要条件是:

(i) 存在$K>0$,使得对一切$x=(\xi_i)\in A$有$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\leqslant K$;

(ii) 对任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N>0$,使得当$n>N$时,对一切$x=(\xi_i)\in A$有$\sum\limits_{i=n}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon$.

50. 在$C[a,b]$中，集$\{f \mid 当t \in B时, f(t)=0\}$必为闭集，而集$\{f \mid 当t \in B时 |f(t)| < a\}(a>0)$为开集的充要条件是$B$是$[a,b]$中闭集.

51. 证明：空间$\mathrm{M}[a,b]$不可分.

52. 证明：空间m与$C(0,1)$的一个子空间等距线性同构.

53. 设$\mathrm{X}_i(i=1,2,\cdots)$是一列Banach空间，令

$$\mathrm{X} = \{x=(x_i) \mid x_i \in X_i, \sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^p < \infty\}(p>1),$$

加法与数乘运算按通常数列的加法与数乘定义，令$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \| x_i \|^p\right)^{1/p}$，证明：X是Banach空间.

54. 设$V[a,b]$表$[a,b]$上右连续的有界变差函数全体，在$V[a,b]$中定义范数$\|x\| = |x(a)| + \overset{b}{\underset{a}{V}}(x)$，证明：$V[a,b]$是Banach空间.

55. 设X是可分的距离空间，证明：X至多具有连续势.

56. 设E是赋范线性空间，A是E中有界集，证明：A全有界的充要条件是对任何$\varepsilon>0$，都存在E的有限维子空间M_ε，使A中每点与M_ε的距离都小于ε.

57. 在距离空间中，证明一个点集为紧集的充要条件是该点集的任何开集复盖都存在着有限子复盖.（提示：参照§2·5定理2的Lebesgue证法）

58. 设X为完备的距离空间，A:X→X在开球$B(x_0,r)(r>0)$内适合$\rho(Ax,Ay)<\theta\rho(x,y)(x\neq y)$，其中$0<\theta<1$，在闭球$\overline{B}(x_0,r)$上连续，且$\rho(x_0,Ax_0)\leqslant\theta(1-\theta)r$. 证明：$A$在$\overline{B}(x_0,r)$中有唯一的不动点.

59. 证明可分距离空间的子空间是可分的.

第八章　线性算子

§8·1　线性算子的基本性质

定义1　设 E_1,E_2 为赋范线性空间,$D\subset \mathsf{E}_1$,我们把由 D 到 E_2 的映射 T(记作 $T:D\to \mathsf{E}_2$)称为**算子**. D 称为算子 T 的**定义域**,记作 $D(T)$,象集 $\{y\mid y=Tx,x\in D(T)\}$ 称为 T 的**值域**,记作 $R(T)$.

如果 T 把 $D(T)$ 中任一有界集映成有界集,则称 T 为**有界算子**.

如果 $D(T)$ 是 E_1 的子空间,且对任何 $x,y\in D(T)$,$\alpha,\beta\in K$ 有

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty,$$

则称 T 为**线性算子**.

在 §7·3,我们曾定义了映射的连续性,一般地说,连续性与有界性是两个互不包含的概念,但在后面我们将会看到,对于线性算子,这两个概念是等价的.

命题1　设 T 是线性算子,则 T 有界的充分必要条件是:存在常数 $M\geqslant 0$,使得

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|,\quad \forall x\in D(T).\qquad (8\cdot1\cdot1)$$

证明　充分性显然,下证必要性. 用反证法,设不存在常数 M 使(8·1·1)式成立,则对每一个自然数 n,有 $x_n\in D(T)$,使

$$\|Tx_n\|>n\|x_n\|,\quad n=1,2,\cdots\qquad (8\cdot1\cdot2)$$

由于 T 是线性算子,显然有 $x_n\neq 0$,令 $x_n'=\dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ 则

$$\| x_n' \| = 1, \quad x_n' \in D(T),$$

由 T 的线性性质得 $\| Tx_n' \| \geqslant n$,故$\{Tx_n'\}$ 是无界集,这与 T 把 $D(T)$ 中有界集映成有界集矛盾. ▌

例 8·1·1　设 $x = (x_1, \cdots, x_m) \in R^m$,命

$$y_i = f_i(x_1, \cdots, x_m), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

则　$f(x) = (f_1(x_1, \cdots, x_m), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_m))$ 为 $R^m \to R^n$ 的一个算子.

例 8·1·2　设给出了无穷矩阵(a_{ij}),$i, j = 1, 2, 3, \cdots$ 满足条件

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty, \quad \text{其中 } q > 1, \qquad (8 \cdot 1 \cdot 3)$$

设 $x = (x_1, x_2, \cdots) \in l^p$,令

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad y = (y_1, y_2, \cdots), \qquad (8 \cdot 1 \cdot 4)$$

定义 $Tx = y$,则 T 是映整个 l^p($p = \dfrac{q}{q-1}$) 入 l^q 的有界线性算子.

证明　由条件(8·1·3),利用 Hölder 不等式知(8·1·4) 中级数绝对收敛,

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\Big)^{1/q} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \Big| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j \Big|^q\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \Big| \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\Big)^{1/q} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\Big)^{1/p} \Big|^q\Big)^{1/q}$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\Big)^{1/q} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\Big)^{1/p} = M \| x \|,$$

其中　$M = \Big(\sum\limits_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\Big)^{1/q}$, 故

$$Tx \in l^p, \| Tx \| \leqslant M \| x \|.$$

又 T 显然是线性的. ▌

例 8·1·3　考察 Урысон 算子

$$y = Tx : y(t) = \int_a^b k(t, s, x(s)) \mathrm{d}s,$$

其中三元函数 $k(t,s,u)$ 定义在 $a\leqslant t,s\leqslant b,-\beta\leqslant u\leqslant\beta$ 上,且为 t,s,u 的连续函数,则 T 是映 $C[a,b]$ 中闭球 $\overline{B}(0,\beta)$ 入空间 $C[a,b]$ 的非线性连续算子.

例 8·1·4 在 $C[0,1]$ 上考虑微分算子 D:

$$Dx=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t).$$

此算子定义在 $C[0,1]$ 中所有具有连续导函数的函数集合上(它显然是 $C[0,1]$ 中的一个真子集,且是一个线性子空间),其值域是整个 $C[0,1]$. 算子 D 显然是线性的,但 D 不是有界的.

事实上,考虑 $C[0,1]$ 中连续函数列 $x_n(t)=\sin n\pi t$, 则 $\|x_n\|=1$, 但

$$\|Dx_n\|=\|n\pi\cos n\pi t\|=n\pi,$$

故 D 不是有界的. 即 D 是一无界线性算子.

下面我们给出线性算子的一些简单性质.

定理 1 如果线性算子 T 在定义域 $D(T)$ 中某点 x_0 连续,则它必在整个定义域上连续.

证明 设 $y_0\in D(T),y_n\in D(T),y_n\to y_0$,因为

$$\begin{aligned}Ty_n&=T(y_n-y_0+x_0-x_0+y_0)\\&=T(y_n-y_0+x_0)-Tx_0+Ty_0,\end{aligned}$$

且 $y_n-y_0+x_0\to x_0$,由 T 在 x_0 连续,即得 $Ty_n\to Ty_0$. ▌

定理 2 线性算子 T 连续的充分必要条件是 T 有界.

证明 充分性. 因为 T 有界,故存在常数 M,使

$$\|Tx\|\leqslant M\|x\|\quad(\forall x\in D(T)),$$

故当 $x_n\to 0$ 时, $\|Tx_n\|\leqslant M\|x_n\|\to 0$,故 $Tx_n\to 0=T(0)$,即 T 在 0 点连续,由定理 1,T 在 $D(T)$ 连续.

必要性. 因为 T 在 $D(T)$ 连续,故在 0 点连续. 如果 T 无界,则对每一自然数 n,有 $x_n\in D(T)$,使 $\|Tx_n\|>n\|x_n\|$,令

$$x_n'=\frac{x_n}{n\|x_n\|},$$

则 $x_n' \to 0$，但 $\| Tx_n' \| > 1$，此与 T 在 0 点连续矛盾. ▌

定义 2（有界线性算子的范数）. 设 E_1, E_2 是两个赋范线性空间，$T: E_1 \to E_2$ 为有界线性算子，称

$$\| T \| = \inf\{M \mid \| Tx \| \leqslant M \| x \|, \forall x \in E_1\} \tag{8·1·5}$$

为 T 的范数.

定理 3　设 $T: E_1 \to E_2$ 为有界线性算子，则

$$\| T \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|}. \tag{8·1·6}$$

证明　按定义，我们有

$$\| Tx \| \leqslant \| T \| \, \| x \|, \quad \forall x \in E_1, \tag{8·1·7}$$

从而

$$\sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| \leqslant \| T \|. \tag{8·1·8}$$

又对任给 $\varepsilon > 0$，有 $x_\varepsilon \in E_1$ 使

$$\| Tx_\varepsilon \| > (\| T \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \|,$$

令 $x' = \dfrac{x_\varepsilon}{\| x_\varepsilon \|}$，则 $\| x' \| = 1$ 且

$$\| Tx' \| > \| T \| - \varepsilon, \tag{8·1·9}$$

从而　$\sup\limits_{\| x \| = 1} \| Tx \| \geqslant \| Tx' \| > \| T \| - \varepsilon.$

由 ε 的任意性即知

$$\sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| \geqslant \| T \|. \tag{8·1·10}$$

由(8·1·8)，(8·1·10) 即知

$$\| T \| = \sup_{\| x \| = 1} \| Tx \| = \sup_{x \neq 0} \frac{\| Tx \|}{\| x \|}. \ ▌$$

例 8·1·5　考察具有连续核的积分算子 T

$$y = Tx = \int_0^1 k(t,s) x(s) \mathrm{d}s. \tag{8·1·11}$$

由于 $k(t,s)$ 是双变元连续函数，故 T 是映 $C[0,1]$ 入 $C[0,1]$ 的线性算子. 下面，我们将说明 T 是有界的，并求出 T 的范数.

对任一 $x(t) \in C[0,1]$,我们有

$$\begin{aligned}\| Tx \| &= \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left|\int_0^1 k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |k(t,s)|\mathrm{d}s \cdot \|x\|,\end{aligned}$$

从而 T 是有界的,且

$$\| T \| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 |k(t,s)|\mathrm{d}s. \qquad (8\cdot 1\cdot 12)$$

又因 $\int_0^1 |k(t,s)|\mathrm{d}s$ 是 t 的连续函数,故它在 $[0,1]$ 上某点 t_0 处达到它的最大值,令

$$Z_0(s) = \operatorname{sign} k(t_0,s),$$

则 $Z_0(s)$ 是一可测函数,且 $|Z_0(s)| \leqslant 1$. 于是,根据鲁金(Lusin)定理,对每个自然数 n,存在连续函数 $x_n(s)$, $|x_n(s)| \leqslant 1$,使在 $[0,1]$ 上除去一个测度小于 $\frac{1}{2Mn}$ 的集 E_n 外(其中 $M = \max\limits_{0\leqslant t,s\leqslant 1} |k(t,s)|$)恒有 $x_n(s) = Z_0(s)$. 于是我们有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 k(t,s)Z_0(s)\mathrm{d}s - \int_0^1 k(t,s)x_n(s)\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant \int_0^1 |k(t,s)|\,|Z_0(s) - x_n(s)|\mathrm{d}s \\ &= \int_{E_n} |k(t,s)|\,|Z_0(s) - x_n(s)|\mathrm{d}s \\ &\leqslant 2M \cdot mE_n < \frac{1}{n},\end{aligned}$$

从而对任意 $t \in [0,1]$ 有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 k(t,s)Z_0(s)\mathrm{d}s\right| < \left|\int_0^1 k(t,s)x_n(s)\mathrm{d}s\right| + \frac{1}{n} \\ &\leqslant \| T \|\, \| x_n \| + \frac{1}{n},\end{aligned}$$

特别,

$$\left|\int_0^1 k(t_0,s)Z_0(s)\mathrm{d}s\right| = \int_0^1 |k(t_0,s)|\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \|T\| \|x_n\| + \frac{1}{n} \leqslant \|T\| + \frac{1}{n},$$

令 $n \to \infty$,即得

$$\int_0^1 |k(t_0, s)| \mathrm{d}s \leqslant \|T\|. \qquad (8 \cdot 1 \cdot 13)$$

由(8・1・12)、(8・1・13) 即得

$$\|T\| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 |k(t,s)| \mathrm{d}s. \ ▌$$

例 8・1・6　设 $q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 若(8・1・11) 式中 $k(t, s)$ 可测而且满足:

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^q \mathrm{d}t \mathrm{d}s \leqslant M < \infty,$$

则 $k(t,s)$ 所决定的算子 T 是 $L^p[0,1] \to L^q[0,1]$ 的线性有界算子,并且 $\|T\| \leqslant M^{1/q}$.

事实上,当 $x(t) \in L^p[0,1]$ 时

$$\begin{aligned} |Tx(t)| &= \left| \int_0^1 k(t,s)x(s) \mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |k(t,s)|^q \mathrm{d}s \right)^{1/q} \left(\int_0^1 |x(s)|^p \mathrm{d}s \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^1 |k(t,s)|^q \mathrm{d}s \right)^{1/q} \|x\|, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |Tx(t)|^q \mathrm{d}t \right)^{1/q} &\leqslant \left(\int_0^1 \int_0^1 |k(t,s)|^q \mathrm{d}s \mathrm{d}t \right)^{1/q} \|x\| \\ &\leqslant M^{1/q} \|x\|, \end{aligned}$$

所以 $Tx \in L^q[0,1]$,且有 $\|T\| \leqslant M^{1/q}$. ▌

§8・2　有界线性算子空间

8・2・1　空间 $\mathscr{B}(\mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2)$

设 $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ 为赋范线性空间,我们以 $L(\mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2)$ 表示由 E_1 到 E_2

的线性算子的全体,类似于函数的初等运算,我们也可以引入算子的初等运算.

设 $T_1, T_2 \in L(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$,$\alpha$ 是数,定义算子 $T_1+T_2, \alpha T_1$ 如下:对任何 $x \in \mathsf{E}_1$,命

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x;$$
$$(\alpha T_1)x = \alpha(T_1x),$$

这样所定义的 $T_1+T_2, \alpha T_1$ 显然都属于 $L(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$. 称 T_1+T_2 为算子 T_1 与 T_2 的和,αT_1 为数 α 与算子 T_1 的积. 容易知道,按照上述的线性运算,$L(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 成一线性空间.

我们以 $\mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 表由 E_1 到 E_2 的有界线性算子的全体,并记 $\mathscr{B}(\mathsf{E}) = \mathscr{B}(\mathsf{E} \to \mathsf{E})$. 显然,若 $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$,$\alpha$ 是数,则 $T_1 + T_2 \in \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$,$\alpha T_1 \in \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$,从而 $\mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 也是一线性空间.

定理 1 $\mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 按通常的线性运算及算子范数成为一赋范线性空间.

证明 $\mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 为一线性空间,已如前述. 我们只需验证上节所定义的算子范数满足范数的三条公理.

(i) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\| \geqslant 0$. 又

$$\|T\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = 0$$
$$\Leftrightarrow \|Tx\| = 0\ (\forall x \in \mathsf{E}_1) \Leftrightarrow T = 0.$$

(ii) $\|(T_1 + T_2)x\| = \|T_1x + T_2x\| \leqslant \|T_1x\| + \|T_2x\|$,两边在单位球面上取上确界即知

$$\|T_1 + T_2\| \leqslant \|T_1\| + \|T_2\|.$$

(iii) $\|\alpha T\| = |\alpha| \|T\|$ 是显然的. ▌

自然,$\mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 未必是完备的,但我们有

定理 2 若 E_2 是完备的,则 $\mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 也是完备的.

证明 设 $\{T_n\} \subset \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 是一基本列,即

$$\lim_{n,m\to\infty}\|T_n - T_m\| = 0,$$

于是对每一 $x\in \mathsf{E}_1$，

$$\|T_n x - T_m x\| \leqslant \|T_n - T_m\|\ \|x\| \to 0 \quad \text{当 } n,m\to\infty,$$

从而$\{T_n x\}$是 E_2 中的基本列，由于 E_2 完备，故 $T_n x$ 在 E_2 中收敛于一元素，于是，我们可定义一由 E_1 到 E_2 的算子 T

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x,\quad \forall x\in \mathsf{E}_1. \qquad (8\cdot2\cdot1)$$

显然，$(8\cdot2\cdot1)$ 式所定义的算子是线性算子，又由于$\{T_n\}$是基本列，故$\{\|T_n\|\}$有界，设 M 为$\{\|T_n\|\}$的一个上界，即

$$\|T_n\| \leqslant M,\quad n = 1,2,\cdots \qquad (8\cdot2\cdot2)$$

于是对任一 $x\in \mathsf{E}_1$ 有

$$\|T_n x\| \leqslant \|T_n\|\ \|x\| \leqslant M\|x\|,\quad n = 1,2,\cdots \qquad (8\cdot2\cdot3)$$

取极限即得

$$\|Tx\| \leqslant M\|x\|,\quad \forall x\in \mathsf{E}_1, \qquad (8\cdot2\cdot4)$$

故 T 是有界的，即 $T\in\mathscr{B}(\mathsf{E}_1\to\mathsf{E}_2)$. 最后证明：

$$\|T_n - T\| \to 0,\quad \text{当 } n\to\infty. \qquad (8\cdot2\cdot5)$$

任给 $\varepsilon > 0$，由假定，存在 N，使当 $n,m\geqslant N$ 时

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon,$$

从而对任何 $x\in \mathsf{E}_1$，$\|x\| = 1$ 有

$$\|T_n x - T_m x\| = \|(T_n - T_m)x\| < \varepsilon,$$

令 $m\to\infty$，即得当 $n > N$ 时

$$\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon \quad \forall x\in \mathsf{E}_1, \|x\| = 1,$$

从而

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1}\|T_n x - Tx\| \leqslant \varepsilon,$$

故 $\|T_n - T\| \to 0(n\to\infty)$ 成立. ▌

8·2·2　有界线性算子的乘积与逆算子

按通常的做法可以定义两个有界线性算子的乘积：$(AB)x = A(Bx)$. 类似地可定义任意有限个有界线性算子的乘积 $AB\cdots C$ 及

幂 A^n. 我们还规定 $A^0 = I$, I 为恒等算子. 由

$$\|(AB)x\| \leqslant \|A\| \|Bx\| \leqslant \|A\| \|B\| \|x\|$$

可知

$$\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|.$$

类似地有

$$\|A_1A_2\cdots A_n\| \leqslant \|A_1\| \|A_2\| \cdots \|A_n\|$$

及

$$\|A^n\| \leqslant \|A\|^n.$$

由此不难推出,若 $A_n \to A$, 则 $A_nB \to AB$, $BA_n \to BA$.

命题 1 设 E 是 Banach 空间, $A \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$, $\|A\| < 1$, 则 $(I-A)^{-1}$ 存在且属于 $\mathscr{B}(\mathrm{E})$, 并有

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n \quad \text{(按算子范数收敛)}.$$

证明 因为 $\|A\| < 1$, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n$ 收敛. 由

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} A^{n+i}\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|A^{n+i}\| \leqslant \sum_{i=1}^{p} \|A\|^{n+i}$$

知部分和序列 $\sum_{i=0}^{n} A^i$ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{E})$ 中基本列,由定理 2 知 $\mathscr{B}(\mathrm{E})$ 是完备空间,故存在 $B \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$ 使

$$B = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} A^i = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

易知

$$(I-A)B = (I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - A\sum_{n=0}^{\infty} A^n = I,$$

$$B(I-A) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A^n\right)(I-A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = I.$$

所以 $(I-A)^{-1} = B \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$. ▌

例 8·2·1 设 $K(x,y) \in C([a,b]\times[a,b])$,

$$M = \max_{a \leqslant x, y \leqslant b} |K(x,y)| < (b-a)^{-1}.$$

利用命题 1 可以证明积分方程

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y + f(x) \qquad (8 \cdot 2 \cdot 6)$$

对每一固定的 $f(x) \in C[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中有唯一解，此解为

$$\varphi_0(x) = \int_a^b R(x,y) f(y)\mathrm{d}y + f(x),$$

其中 $R(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(x,y)$　（一致收敛），

$$K^{(n)}(x,y) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n-1} K(x,x_1)K(x_1,x_2)\cdots$$

$$\cdots K(x_{n-1},y)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

命题 2　设 $\mathsf{E}_1, \mathsf{E}_2$ 是 Banach 空间，若 $A \in \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$，$A^{-1}$ 存在且属于

$$\mathscr{B}(\mathsf{E}_2 \to \mathsf{E}_1), \quad B \in \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$$

且

$$\| B - A \| < \| A^{-1} \|^{-1},$$

则 B^{-1} 存在且属于 $\mathscr{B}(E_2 \to E_1)$，并有

$$\| B^{-1} - A^{-1} \| \leqslant \frac{\| B - A \| \, \| A^{-1} \|^2}{1 - \| B - A \| \, \| A^{-1} \|}.$$

证明　由 $B = A - (A-B) = A(I - A^{-1}(A-B))$ 及

$$\| A^{-1}(A-B) \| \leqslant \| A^{-1} \| \, \| A - B \| < 1$$

即知 B^{-1} 存在且属于 $\mathscr{B}(\mathsf{E}_2 \to \mathsf{E}_1)$. 此时

$$B^{-1} = (I - A^{-1}(A-B))^{-1} A^{-1}.$$

然后利用命题 1 可得

$$B^{-1} - A^{-1} = \Big(\sum_{i=1}^{\infty} (A^{-1}(A-B))^i\Big) A^{-1}.$$

所以

$$\|B^{-1}-A^{-1}\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(\|A^{-1}\|\,\|A-B\|)^i\|A^{-1}\|$$
$$\leqslant \|B-A\|\,\|A^{-1}\|^2/(1-\|B-A\|\,\|A^{-1}\|). \blacksquare$$

例 8·2·2 设 $K(x,y)\in C([a,b]\times[a,b])$,考虑积分方程

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x) \quad (\text{简记为 } B\varphi=f). \tag{8·2·7}$$

由 Weierstrass 多项式逼近定理,$K(x,y)$ 可以用二元多项式 $P(x,y)$ 任意一致逼近. 作辅助积分方程

$$\varphi(x)-\int_a^b P(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=f(x) \quad (\text{简记为 } A\varphi=f). \tag{8·2·8}$$

(8·2·8) 的求解可化归为线性代数方程组的求解,且(8·2·8) 的解可以看成是(8·2·7) 的近似解. 若(8·2·8) 对任意 $f(x)\in C[a,b]$ 有唯一解,便可利用命题 2 来讨论(8·2·7) 的解的存在唯一性,并可估计(8·2·8) 的解作为(8·2·7) 的近似解的误差.

8·2·3 有界线性算子的强收敛

在空间 $\mathscr{B}(\mathrm{E}_1\to\mathrm{E}_2)$ 中,$\{T_n\}$ 按范数收敛于 T,即 $\|T_n-T\|\to 0$,它等价于在 E_1 的单位球上 $\{T_n x\}$ 一致收敛于 Tx,因此通常把 $\{T_n\}$ 按范数收敛于 T 称作 $\{T_n\}$ **一致收敛**于 T. 正如函数列可以定义种种不同意义的收敛,对于有界线性算子列 $\{T_n\}$ 也可以定义其他意义的收敛.

定义 1 设 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(\mathrm{E}_1\to\mathrm{E}_2)$,$T\in\mathscr{B}(\mathrm{E}_1\to\mathrm{E}_2)$,如果对每一 $x\in\mathrm{E}_1$ 皆有 $\|T_n x-Tx\|\to 0(n\to\infty)$,则称 $\{T_n\}$(作为有界线性算子列) **强收敛**于 T.

命题 3 设 $\{T_n\}\subset\mathscr{B}(\mathrm{E}_1\to\mathrm{E}_2)$,$T\in\mathscr{B}(\mathrm{E}_1\to\mathrm{E}_2)$,若 T_n 强收敛于 T,则 $\|T\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|$.

证明 设 $x\in\mathrm{E}_1$,则 $Tx=\lim_{n\to\infty}T_n x$,所以

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_n x\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|\,\|x\|,$$

因此 $\|T\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\|$. ▮

若有界线性算子列一致收敛则必强收敛,但其逆不真.

例 8·2·3　设 $f_0: l^2 \to R^1$ 为: $f_0(x) = 0 \quad (\forall x \in l^2)$. 又设 $f_n: l^2 \to R^1$ 为:

$$f_n(x) = \xi_n \quad (\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2).$$

显然诸 f_n 及 f_0 均为 l^2 到 R^1 的有界线性算子,并且 $\{f_n\}$ 强收敛于 f_0(因为对每个 $x \in l^2$, $f_n(x) \to 0$),但 $\{f_n\}$ 按范数不收敛于 f_0(因为 $\|f_n - f_0\| = \|f_n\| = 1$).

§8·3　共鸣定理及其应用

8·3·1　共鸣定理

定理 1　**(共鸣定理)** 设 E_1 为 Banach 空间, E_2 为赋范线性空间, $\{T_n\} \subset \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$, 如果对每一 $x \in \mathsf{E}_1$ 皆有

$$\sup_n \|T_n x\| < +\infty, \qquad (8·3·1)$$

则必有

$$\sup_n \|T_n\| < +\infty. \qquad (8·3·2)$$

证明　用反证法. 设 $\sup_n \|T_n\| = +\infty$, 则易知在任何闭球上 $\{\|T_n x\|\}$ 都无界. 事实上,设 $\{\|T_n x\|\}$ 在某闭球 $\overline{B}(x_0, r)$ 上有界,即

$$\|T_n x\| \leqslant M = \text{常数}, \ \forall x \in \overline{B}(x_0, r), \quad n = 1, 2, \cdots$$

对任何 $y \in \mathsf{E}_1$, $y \neq 0$, 令 $x = \dfrac{r}{\|y\|} y + x_0$, 则 $x \in \overline{B}(x_0, r)$, 从而

$$\|T_n x\| \leqslant M,$$

即

$$\left\| \frac{r}{\|y\|} T_n y + T_n x_0 \right\| \leqslant M, \qquad (8·3·3)$$

由假定 $\sup\limits_n \| T_n x_0 \| = A < +\infty$,从而由(8·3·3)得

$$\| T_n y \| \leqslant \frac{M+A}{r} \| y \| ,$$

由 $y \in \mathsf{E}_1$ 的任意性,即知

$$\| T_n \| \leqslant \frac{M+A}{r} < +\infty, \quad n = 1,2,\cdots$$

此与 $\sup\limits_n \| T_n \| = +\infty$ 矛盾.

现在,在 E_1 中任取一开球 $B_0 = B(x_0, r_0)$,在 B_0 上 $\{ \| T_n x \| \}$ 无界,从而必有 T_{n_1} 及 $x_1 \in B_0$,使

$$\| T_{n_1} x_1 \| > 1,$$

由 T_{n_1} 的连续性,有开球 $B_1 = B(x_1, r_1) \subset B_0$,使

$$\| T_{n_1} x \| > 1, \quad \forall x \in \overline{B}_1,$$

这里可取 $r_1 < \frac{1}{2} r_0$.类似的,$\{ \| T_n x \| \}$ 在 B_1 上无界故有 T_{n_2} 及 $x_2 \in B_1$,使

$$\| T_{n_2} x_2 \| > 2,$$

由 T_{n_2} 的连续性,又有 $B_2 = B(x_2, r_2) \subset B_1 (r_2 < \frac{1}{2} r_1)$ 使

$$\| T_{n_2} x \| > 2, \quad \forall x \in \overline{B}_2.$$

这样继续下去,我们可得 $\{T_n\}$ 的一个子列 $\{T_{n_k}\}$ 以及一串闭球 $\{\overline{B}_k\}$:$\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \cdots$ 且 $r_k \to 0$,并使

$$\| T_{n_k} x \| \geqslant k, \quad \forall x \in \overline{B}_k, \quad (k = 1,2,\cdots).$$

于是有唯一的一点 $x^* \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k$,从而

$$\| T_{n_k} x^* \| \geqslant k, \quad k = 1,2,\cdots$$

故 $\sup \| T_n x^* \| = +\infty$,此与假设矛盾. ▌

8·3·2 有界线性算子列强收敛的充要条件

定理 2 设 E_1、E_2 是两个 Banach 空间,$\{T_n\} \subset \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$. T_n 强收敛于某 $T \in \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$ 的充分必要条件是:

(i) $\{\|T_n\|\}$ 有界;

(ii) 存在 E_1 中的稠密集 D,使对每一 $x \in D$,序列 $T_n x$ 收敛.

证明　充分性.依条件,存在 $M>0$,使

$$\|T_n\| \leqslant M \quad n=1,2,\cdots \tag{8·3·4}$$

设 $x \in \mathsf{E}_1$.任给 $\varepsilon>0$,可取 $x' \in D$,使 $\|x-x'\|<\frac{\varepsilon}{4M}$,对此 $x' \in D$,可取自然数 N,使当 $n,m \geqslant N$ 时,

$$\|T_n x' - T_m x'\| < \frac{\varepsilon}{4},$$

从而当 $n,m \geqslant N$ 时

$$\begin{aligned}\|T_n x - T_m x\| &= \|T_n(x-x') - T_m(x-x') + T_n x' - T_m x'\| \\ &\leqslant (\|T_n\| + \|T_m\|)\|x-x'\| + \|T_n x' - T_m x'\| < \varepsilon,\end{aligned}$$

故 $\{T_n x\}$ 是 E_2 中基本列,从而收敛,令

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \quad \forall x \in \mathsf{E}_1,$$

则 $T:\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2$ 是线性算子,然后由

$$\|Tx\| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|T_n\| \|x\| \leqslant M\|x\|$$

知 $T \in \mathscr{B}(\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2)$.

必要性.(i) 由共鸣定理得出,(ii) 是显然的. ▌

8·3·3　共鸣定理应用举例

共鸣定理在数学上有着广泛的作用,下面给出几个应用的例子.

例 8·3·1　设 $p>1$, $g(t)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可测函数.如果对任何 $x(t) \in L^p[a,b]$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$,积分 $\int_a^b x(t)g(t)\mathrm{d}t$ 恒存在,那么 $g(t) \in L^q[a,b]$.

证明　对每个自然数 n,令 $g_n(t)=\begin{cases} g(t), & |g(t)| \leqslant n, \\ 0, & |g(t)|>n,\end{cases}$

则 $g_n(t)$ 是有界可测函数.作 $L^p[a,b]$ 上的线性泛函

$$F_n(x)=\int_a^b x(t)g_n(t)\mathrm{d}t \qquad (x(t)\in L^p[a,b]).$$

利用 Hölder 不等式，易知 $F_n(x)$ 是 $L^p[a,b]$ 上的有界线性泛函. 由题设易知 $|x(t)g(t)|$ 可积. 因为

$$|x(t)g_n(t)|\leqslant|x(t)g(t)|,$$

由积分控制收敛定理，

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\int_a^b x(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

由定理 1 即知$\{\|F_n\|\}$有界. 然后由

$$\begin{aligned}F_n(\operatorname{sign}g_n(t)|g_n(t)|^{q-1})&=\int_a^b|g_n(t)|^q\mathrm{d}t\\&\leqslant\|F_n\|\,\|\operatorname{sign}g_n(t)|g_n(t)|^{q-1}\|_{L^p}\\&=\|F_n\|\cdot\left(\int_a^b|g_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/p},\end{aligned}$$

即知

$$\left(\int_a^b|g_n(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}\leqslant\|F_n\|.$$

因此 $\left\{\int_a^b|g_n(t)|^q\mathrm{d}t\right\}$有界. 最后由

$$\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\int_a^b|g_n(t)|^q\mathrm{d}t<\infty$$

即得 $g(t)\in L^q[a,b]$. ▌

例 8·3·2 (机械求积的收敛性问题) 对于 $x(t)\in C[0,1]$,一般来说求$\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t$ 的精确值是困难的,往往只能求它的近似值. 对每个自然数 n,取$[0,1]$ 中一组分点

$$0\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}\leqslant 1$$

及相应的一组数

$$A_0^{(n)},A_1^{(n)},\cdots,A_n^{(n)},$$

用$\sum_{k=0}^{n}A_k^{(n)}x(t_k^{(n)})$ 作为$\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t$ 的近似值,即

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \approx \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t \quad \text{（机械求积分式）}.$$

首先我们可以选取$A_k^{(n)}(k=0,1,2,\cdots,n)$，使上式至少对次数$\leqslant n$的多项式$x(t)$都是精确地成立. 例如，只要取

$$\begin{aligned}&(A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \cdots, A_n^{(n)})\\ &= \left(1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n+1}\right)\begin{pmatrix}1 & t_0^{(n)} & t_0^{(n)^2} & \cdots t_0^{(n)^n}\\ 1 & t_n^{(n)} & t_n^{(n)^2} & \cdots t_n^{(n)^n}\end{pmatrix}^{-1}\end{aligned}$$

就可以使机械求积分式对次数$\leqslant n$的多项式都是精确成立的，此时，对任意多项式$x(t)$都有

$$\sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)}) \to \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t. \qquad (8\cdot 3\cdot 5)$$

现在的问题是，$(8\cdot 3\cdot 5)$能否对所有的$x(t)\in C[0,1]$都成立？记

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} x(t_k^{(n)})$$

显然，f_n是$C[0,1]$上的有界线性泛函，于是上面的问题即为在什么条件下才能对每一$x\in C[0,1]$，$f_n(x)$都收敛于$\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t$？

定理3　设上述机械求积公式对于次数$\leqslant n$的多项式都是精确成立的，那么要$(8\cdot 3\cdot 5)$对所有$x(t)\in C[0,1]$都成立的充分必要条件是存在常数M，使$\sum\limits_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|\leqslant M\quad(n=1,2,\cdots)$.

证明　由前面所述，$f_n(x)$是$C[0,1]$上的有界线性泛函. 由

$$|f_n(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|\,\|x\| \quad (\forall x\in C[0,1])$$

得

$$\|f_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n}|A_k^{(n)}|. \qquad (8\cdot 3\cdot 6)$$

其次可取$[0,1]$上的连续函数$x_n(t)$使适合

$$x(t_k^{(n)}) = \operatorname{sign} A_k^{(n)} (k = 0,1,\cdots,n) \text{ 且 } \| x_n \| = 1,$$

于是

$$f_n(x_n) = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant \| f_n \| \| x_n \| = \| f_n \|.$$

结合(8·3·6)即得

$$\| f_n \| = \sum_{k=0}^{n} |A_k^{(n)}|. \qquad (8 \cdot 3 \cdot 7)$$

利用(8·3·7)及共鸣定理即知定理的条件是必要的.

反之,设定理的条件满足,由于多项式全体在 $C[0,1]$ 中稠密,并注意到(8·3·7),根据定理2知必有$[a,b]$上的连续线性泛函 f 使

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x \in C[0,1].$$

因而当 $x(t)$ 是多项式时

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t.$$

然后由 f 的连续性及多项式全体在 $C[0,1]$ 中的稠密性即知,对任何 $x(t) \in C[0,1]$ 都有 $f(x) = \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t$ 即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_0^1 x(t)\mathrm{d}t.$$

亦即(8·3·5)对所有 $x \in C[0,1]$ 成立. ▌

系1 如果诸 $A_k^{(n)} \geqslant 0$,那么(8·3·5)对所有的 $x(t) \in C[0,1]$ 都成立.

证明 当 $A_k^{(n)} \geqslant 0$ 时

$$1 = \int_0^1 1\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)},$$

故有 M 存在,使定理中条件得到满足. ▌

例 8·3·3 (拉格朗日插值公式的发散问题)对每个自然数 n,在$[a,b]$内任取 n 个分点 $a \leqslant t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_n^{(n)} \leqslant b$,作多项式

$$l_k^{(n)}(t)=\frac{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(t-t_i^{(n)})}{\prod\limits_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(t_k^{(n)}-t_i^{(n)})},\quad n=1,2,\cdots\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

对 $x(t)\in C[a,b]$，作拉格朗日插值多项式

$$L_n x(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k^{(n)})l_k^{(n)}(t).$$

$L_n(n=1,2,\cdots)$ 可以看成是映 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子. L_n 显然是有界线性算子. 可以证明

$$\|L_n\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k^{(n)}(t)|.$$

在函数逼近论中已经证明上式右端大于 $\dfrac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$（可参见那汤松著《函数构造论》下册第一章），故 $\{\|L_n\|\}$ 无界，由共鸣定理可知，$L_n x(t)$ 不能在 $C[a,b]$ 中对每个 $x(t)$ 都收敛.

§8・4　开映射定理与逆算子定理・闭图像定理

在这一节中我们将介绍本节标题所列的几个关于 Banach 空间线性算子的基本定理. 这些定理在理论与应用上都是十分重要的.

8・4・1　开映射定理与逆算子定理

引理 1　设 M 是赋范线性空间 E 中稠密集，$y\in \mathrm{E}$，$y\neq 0$，则存在 $y_n\in M(n=1,2,\cdots)$ 使

(i) $y=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$，

(ii) $\|y_n\|\leqslant\dfrac{3}{2^n}\|y\|\quad(n=1,2,\cdots)$.

证明　任取 $y_1\in M$,使 $\|y-y_1\|\leqslant\frac{1}{2}\|y\|$,则

$$\|y_1\|\leqslant\frac{3}{2}\|y\|;$$

然后再取 $y_2\in M$,使

$$\|(y-y_1)-y_2\|\leqslant\frac{1}{2^2}\|y\|,$$

于是

$$\|y_2\|\leqslant\|y-y_1-y_2\|+\|y-y_1\|\leqslant\frac{3}{2^2}\|y\|.$$

一般地,利用 M 的稠密性,可选取 $y_n\in M$,使

$$\|(y-y_1-\cdots-y_{n-1})-y_n\|\leqslant\frac{\|y\|}{2^n},\quad(8\cdot4\cdot1)$$

于是

$$\begin{aligned}\|y_n\|&\leqslant\|y-y_1-\cdots-y_{n-1}\|+\|y-y_1-\cdots-y_n\|\\&\leqslant\frac{3}{2^n}\|y\|.\end{aligned}\quad(8\cdot4\cdot2)$$

由(8・4・1)即知 $y=\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}y_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 且 y_n 满足(ii). ▌

定理 1　(开映射定理) 设 E、F 是 Banach 空间,$T:\mathsf{E}\to\mathsf{F}$ 是线性有界算子,且 $T(\mathsf{E})=\mathsf{F}$,则存在常数 $K>0$,使对任意 $y\in\mathsf{F}$,存在 $x\in\mathsf{E}$ 满足 $Tx=y$ 且 $\|x\|\leqslant K\|y\|$.

证明　对每一自然数 n,令

$$M_n=\{y\in\mathsf{F}\mid \text{存在 } x\in\mathsf{E} \text{ 使 } Tx=y \text{ 且 } \|x\|\leqslant n\|y\|\}.$$

显然,M_n 具有如下性质:

(i) 当 $n\geqslant m$ 时,$M_m\subset M_n$;

(ii) 设 λ 是数,则 $\lambda M_n\subset M_n$;

(iii) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}M_n=\mathsf{F}$.

1°. 因 F 是完备空间,它是第二纲集,由(iii) 知必存在 n_0,M_{n_0}

不是稀疏集，即存在一个球 $B(y_0,r)\subset\overline{M}_{n_0}$，由(i)，可设 $y_0\in M_{n_0}$.

2°. 取 $n_1\geqslant 4n_0(1+\dfrac{2\|y_0\|}{r})$，下面证明 $\overline{M}_{n_1}=\mathrm{F}$.

设 $y\in\mathrm{F}$，$y\neq 0$，令 $z=\dfrac{r}{2}\cdot\dfrac{y}{\|y\|}$，则 $y_0+z\in B(y_0,r)$，由 1° 所证，存在

$$y_n'\in M_{n_0}\ (n=1,2,\cdots)$$

使

$$y_n'\to y_0+z\ (n\to\infty),$$

从而

$$z_n=y_n'-y_0\to z\ (n\to\infty).$$

因为 $\|z\|=\dfrac{r}{2}$，不失一般性可设

$$\frac{r}{4}<\|z_n\|=\|y_n'-y_0\|<r.$$

现在取 $x_n'\in\mathrm{E}(n=1,2,\cdots)$ 及 $x_0\in\mathrm{E}$ 使

$$Tx_n'=y_n',\qquad \|x_n'\|\leqslant n_0\|y_n'\|\quad (n=1,2,\cdots),$$
$$Tx_0=y_0,\quad \|x_0\|\leqslant n_0\|y_0\|,$$

则

$$T(x_n'-x_0)=y_n'-y_0=z_n,$$

且

$$\begin{aligned}\|x_n'-x_0\|&\leqslant\|x_n'\|+\|x_0\|\leqslant n_0\|y_n'\|+n_0\|y_0\|\\&\leqslant n_0(\|y_n'-y_0\|+\|y_0\|)+n_0\|y_0\|\leqslant n_0(r+2\|y_0\|)\\&=4n_0(1+\frac{2\|y_0\|}{r})\cdot\frac{r}{4}\leqslant n_1\|z_n\|,\end{aligned}$$

故

$$z_n\in M_{n_1}\ (n=1,2,\cdots).$$

令 $y_n=\dfrac{2}{r}\|y\|z_n$，则

$$y_n \to \frac{2}{r}\|y\| z = y,$$

由(ii), $y_n \in M_{n_1}$. 因 $y \in \mathsf{F}$ 是任意的, 故 $\overline{M}_{n_1} = \mathsf{F}$.

3°. 证明 $K = 3n_1$ 即合定理要求.

设 $y \in \mathsf{F}, y \neq 0$, 由 2° 并根据引理 1, 存在

$$y_n \in M_{n_1} (n = 1, 2, \cdots)$$

使

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \quad 且 \quad \|y_n\| \leqslant \frac{3}{2^n}\|y\|,$$

对每个 y_n, 可取 $x_n \in \mathsf{E}$ 使

$$Tx_n = y_n \text{ 且 } \|x_n\| \leqslant n_1 \|y_n\|,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n_1 \|y_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n} n_1 \|y\| = 3n_1\|y\|,$$

由 E 完备知

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in \mathsf{E}, \|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \leqslant 3n_1\|y\|$$

且

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y. \blacksquare$$

定理 2 (Banach 逆算子定理) 设有界线性算子 T 将 Banach 空间 E 一一对应地映成 Banach 空间 F, 则 T 的逆算子 T^{-1} 是有界线性算子.

证明 根据假定, T^{-1} 是存在的, 且是线性算子. 由定理 1, 存在常数 K 使当 $Tx = y$ 时 $\|x\| \leqslant K\|y\|$, 即 $\|T^{-1}y\| \leqslant K\|y\|$, 故 T^{-1} 是有界线性算子. $\blacksquare$

系 1 设 E 为线性空间, 它在范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 下均为 Banach 空间, 如果存在常数 $M_1 > 0$, 使得

$$\|x\|_1 \leqslant M_1 \|x\|_2 (\forall x \in \mathsf{E}),$$

则必存在 $M_2 > 0$，使得

$$\|x\|_2 \leqslant M_2 \|x\|_1 (\forall x \in \mathsf{E}).$$

证明留作习题.

4.2　闭图像定理

定义 1　设 E_1、E_2 是两个实(复)赋范线性空间，记

$$\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2 = \{(x,y) \mid x \in \mathsf{E}_1, y \in \mathsf{E}_2\},$$

在 $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$ 上定义线性运算如下：对任意的 $(x_1,y_1),(x,y) \in \mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$ 及实(复)数 α，定义

$$(x,y) + (x_1,y_1) = (x + x_1, y + y_1),$$

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y),$$

而对 $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$ 中元 (x,y) 定义其范数为

$$\|(x,y)\| = (\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}$$

或 $$\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|,$$

或 $$\|(x,y)\|_2 = \max\{\|x\|, \|y\|\},$$

容易验证 $\|\cdot\|$、$\|\cdot\|_1$、$\|\cdot\|_2$ 是彼此等价的范数)，则 $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$ 在此范数下成一赋范线性空间，称为 E_1 与 E_2 的**乘积赋范性线空间**，仍记作 $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$. 类似地可定义乘积赋范线性空间 $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2 \times \cdots \times \mathsf{E}_n$.

显然，如果 E_1、E_2 皆为 Banach 空间，那么 $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$ 也是 Banach 空间.

定义 2　设 E_1，E_2 是 Banach 空间，$D \subset \mathsf{E}_1$，$T: D \to \mathsf{E}_2$，令

$$G(T) = \{(x, Tx) \mid x \in D\} \subset \mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2,$$

$G(T)$ 叫做算子 T 的**图像**. 若 $G(T)$ 是 $\mathsf{E}_1 \times \mathsf{E}_2$ 中的闭集，则称 T 是**闭算子**.

引理 2　T 是闭算子的充分必要条件是：当 $x_n \in D = D(T)$，$x_n \to x_0 \in \mathsf{E}_1$，$Tx_n \to y_0 \in \mathsf{E}_2$ 时 $x_0 \in D(T)$ 且 $Tx_0 = y_0$.

证明留作习题.

定理 4 **(闭图像定理)** 设 E_1, E_2 是 Banach 空间, $D \subset E_1$, $T: D \to E_2$ 是线性算子, 若 T 是闭算子且 $D = D(T)$ 是 E_1 中闭子空间, 则 T 连续.

证明 因为 D 是 E_1 的一个闭子空间, 故它本身按 E_1 上范数可视为一个 Banach 空间, 又 T 是线性算子, 易知 $G(T)$ 是 $E_1 \times E_2$ 中一个线性子空间, 再由假定, $G(T)$ 是闭集, 故 $G(T)$ 是 $E_1 \times E_2$ 的一个闭子空间, 从而, 按 $E_1 \times E_2$ 上范数, $G(T)$ 也是一个 Banach 空间. 今定义线性算子 $A: G(T) \to D(T)$ 如下:

$$A(x, Tx) = x, \quad \forall (x, Tx) \in G(T),$$

则 A 是一一的.

事实上, 若 $x_1 = x_2$, 则 $Tx_1 = Tx_2$, 从而

$$(x_1, Tx_1) = (x_2, Tx_2).$$

A 显然有界, 于是, 根据逆算子定理, A 有有界逆

$$A^{-1}: D(T) \to G(T),$$

从而

$$\| (x, Tx) \| = \| A^{-1} x \| \leqslant \| A^{-1} \| \, \| x \| \quad \forall x \in D(T),$$

于是

$$\| Tx \| \leqslant \| (x, Tx) \| \leqslant \| A^{-1} \| \, \| x \| \quad \forall x \in D(T).$$

由此可知 T 有界. ▌

注 1 若 $D(T)$ 不是闭子空间, 则从 T 是闭算子推不出 T 连续.

例如, 令 $E_1 = E_2 = C[0,1]$, $\quad Tx = \dfrac{d}{dt} x(t)$,

$$D = D(T) = \{ x(t) \mid x(t) \text{ 在}[0,1]\text{上具有连续的导函数} \}.$$

我们已经知道, 上面所定义的微分算子不是连续线性算子. 下面我们证明 T 是闭算子.

事实上, 设

$$x_n \in D(T), x_n \to x_0 \in C[0,1],$$

$$Tx_n(t) = x_n'(t) \to y_0(t) \in C[0,1],$$

则由数学分析中已知的定理知 $x_0(t)$ 在$[0,1]$上连续可微且

$$x_0'(t) = y_0(t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$$

即 $Tx_0 = y_0$. 于是根据引理 2, T 是闭算子.

注 2　若线性算子 T 连续, $D(T)$ 是 Banach 空间 $\mathbf{E}_1$ 的闭子空间. 则易知 T 必是闭的.

由此可得: 若 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ 是 Banach 空间, $T: \mathbf{E}_1 \to \mathbf{E}_2$ 为线性算子, 则 T 连续的充分必要条件是 T 为闭算子.

闭图像定理常用于偏微分方程的理论中, 因为对于微分算子, 要直接验证它的连续性往往比较困难, 但要验证它是闭算子常较容易.

习 题 八

1. 设 $T_1,T_2,T_3,T_4:R^2\to R^2$ 分别由下式定义:

$T_1:(x_1,x_2)\longmapsto(x_1,0)$

$T_2:(x_1,x_2)\longmapsto(0,x_2)$

$T_3:(x_1,x_2)\longmapsto(x_2,x_1)$

$T_4:(x_1,x_2)\longmapsto(rx_1,x_2)$

试证它们是有界线性算子,求出它们的范数,并说明它们的几何意义.

2. 设 X,Y 是赋范线性空间,T:X→Y 是线性算子,试证:若 T 有界,则 T 的零子空间 $N(T)=\{x\in \mathrm{X}\mid Tx=0\}$ 是 X 的闭子空间.

3. 证明:若X是有限维的赋范线性空间,则线性算子 T:X→X 必是有界的.

4. 设 $D:C^1[0,1]\to C[0,1]$,$Dx(t)=x'(t)$,在

$$\|x(t)\|_C=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,\quad x(t)\in C[0,1]$$

$$\|x(t)\|_{C^1}=\|x(t)\|_C+\|x'(t)\|_C,\quad x(t)\in C^1[0,1]$$

所定义的范数下,D 是有界线性算子吗?试证之.

5. 设$\sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|<\infty$,在 l^1 中定义线性算子:

$$y=Tx=(\alpha_i\xi_i),\quad \forall x=(\xi_i)\in l^1$$

证明:T 是有界线性算子,且 $\|T\|=\sup\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|$.

6. 证明上题中的 T 存在有界逆的充要条件是$\inf\limits_{n\geqslant 1}|\alpha_n|>0$.

7. 设 $p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,无穷阵$(\alpha_{ij})$适合条件:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^q\Big)^{\frac{p}{q}}<\infty,$$

作算子 T 如下：$y = Tx, x = (\xi_i) \in l^p, y = (\eta_k)$：

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\,\xi_j \quad (k = 1,2,3,\cdots)$$

证明：T 是 l^p 到 l^p 的有界线性算子.

8. 设 E 是 Banach 空间，证明：$\mathscr{B}(\mathrm{E})$ 中可逆算子的全体是 $\mathscr{B}(\mathrm{E})$ 中的开集.

9. 设 A、$B \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$，$A^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$，证明：若 $AB = BA$. 则 $A^{-1}B = BA^{-1}$.

10. 举例说明共鸣定理中空间 E_1 完备的条件不能去掉.

11. 证明 Гелфанд 引理：设 E 是 Banach 空间，$p(x)$ 是 E 上泛函，满足条件：

(i) $p(x) \geqslant 0$；

(ii) $\alpha \geqslant 0$ 时，$p(\alpha x) = \alpha p(x)$；

(iii) $p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2)$；

(iv) 当 $x_n \in \mathrm{E}, x_n \to x \in \mathrm{E}$ 时，$p(x) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} p(x_n)$，

证明：必存在 $M > 0$，使对一切 $x \in \mathrm{E}$ 都有 $p(x) \leqslant M\|x\|$.

12. 设(η_i)为一数列，证明：若对一切$(\xi_i) \in l^q (1 < q < \infty)$级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \eta_i$ 收敛，则$(\eta_i) \in l^p \quad (p = \dfrac{q}{q-1})$.

13. 证明 §8・4 引理 2.

14. 设 T 是由 Banach 空间 E 到赋范线性空间 F 的线性算子，令 $M_n = \{x \in \mathrm{E} \mid \|Tx\| \leqslant n\|x\|\}, n = 1,2,\cdots$ 证明：总有 M_{n_0} 在 E 中稠密.

15. 证明 §8・4 系 1.

16. 试用闭图像定理证明逆算子定理.

17. 举一个具有无界逆的有界线性算子的例.

第九章　线性泛函

§9·1　线性泛函的基本性质

（有界）线性泛函作为（赋范）线性空间到它的数域上的（有界）线性算子，具有某些特殊的性质.

定理1　设E是数域K上的线性空间，f是E上的非零线性泛函，记$N(f)=f^{-1}(0)$（$N(f)$称为f的**零子空间**），再设$x_0\in$ E，$f(x_0)\neq 0$，则对任意的$x\in$ E，存在唯一的$y\in N(f)$及$\alpha\in K$使

$$x=y+\alpha x_0. \tag{9·1·1}$$

证明　设$x\in$ E，取$\alpha=\dfrac{f(x)}{f(x_0)}$，然后令

$$y=x-\alpha x_0, \tag{9·1·2}$$

则$f(y)=0$，所以$y\in N(f)$，从而

$$x=y+\alpha x_0,\qquad y\in N(f),\alpha\in K.$$

下证唯一性. 事实上，若

$$x=y'+\alpha' x_0\quad (y'\in N(f),\alpha'\in K),$$

则必有

$$f(x)=f(y')+\alpha' f(x_0)=\alpha' f(x_0),$$

由此可知$\alpha'=\alpha$，从而$y'=y$. ▌

定理1是说对于E上的任一非零线性泛函f，E可以表示成f的零子空间与一个一维子空间的直和.

定理2　设E是赋范线性空间，f是E上线性泛函，则f连续

的充分必要条件是 f 的零子空间 $N(f)$ 是 E 的闭子空间.

证明　必要性. 设 f 是连续线性泛函，又设 $x_n \in N(f)$，$x_n \to x$，那么由 f 的连续性可得 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$，因此 $x \in N(f)$，所以 $N(f)$ 是闭集.

充分性. 设 $N(f)$ 是闭集，如果 f 不是有界线性泛函，则

$$\sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \infty.$$

因此必有点列 $x_n \in \mathsf{E}$，$\|x_n\| = 1\ (n = 1,2,\cdots)$ 使

$$|f(x_n)| \geqslant n.$$

令

$$y_n = \frac{x_1}{f(x_1)} - \frac{x_n}{f(x_n)},$$

则

$$\left\| y_n - \frac{x_1}{f(x_1)} \right\| = \left\| -\frac{x_n}{f(x_n)} \right\| = \frac{1}{|f(x_n)|} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

且 $f(y_n) = 0$，故 $y_n \in N(f)$，但是 $f\left(\dfrac{x_1}{f(x_1)}\right) = 1$，所以

$$\frac{x_1}{f(x_1)} \overline{\in} N(f),$$

此与 $N(f)$ 是闭集矛盾. 因此 f 是有界的. ▌

设 E 是数域 K 上的赋范线性空间，我们把定义在 E 上取值于 K 的有界线性泛函的全体(即 $\mathscr{B}(\mathsf{E} \to \mathsf{K})$) 记作 E^*，称为 E 的共轭空间，因为数域 K 是完备的，所以由 §8·2 定理 2 知 E^* 是 Banach 空间.

§9·2　有界线性泛函的延拓

我们自然要问，在一般的赋范线性空间中，是否存在非零的连续线性泛函，这一节的目的之一就是要解决这个问题.

9·2·1 Zorn 引理

定义 1 一个非空集合 X 称做**有序集**(简称为**序集**),是指对 X 中的某些元之间定义了一个**序关系**"$\leqslant$",它满足

1) 对任意的 $x \in X$,都有 $x \leqslant x$(自反性);

2) 对任意的 $x,y \in X$,如果 $x \leqslant y, y \leqslant x$,则 $x = y$(反对称性);

3) 对任意的 $x,y,z \in X$,如果 $x \leqslant y, y \leqslant z$,则 $x \leqslant z$(传递性).

设 $M \subset X$(X 是序集,下同),如果对任意的 x、$y \in M$,关系 $x \leqslant y$ 与 $y \leqslant x$ 中至少有一个成立,则称 M 为 X 的**全序子集**. 设 $x^* \in X, M \subset X$,如果对任意的 $x \in M$ 都有 $x \leqslant x^*$ ($x^* \leqslant x$),则称 x^* 为 M 的**上界**(相应地,**下界**). 设 $x^* \in X$,如果不存在 $x \in X$ 使 $x^* \leqslant x$($x \leqslant x^*$),则称 x^* 为**极大元**(相应地,**极小元**).

Zorn 引理 如果序集 X 的每个全序子集都有上界(下界),那么序集 X 中必有极大元(极小元).

这个引理实际上与下面的**选择公理**等价:

Zermelo 选择公理 设 $S = \{M_\alpha | \alpha \in I\}$ 是由两两不相交的非空集 M_α 所组成的集族,那么存在集合 L 具有性质:

1) $L \subset \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$;

2) 对每个 M_α,$L \cap M_\alpha$ 恰含一个元.

上述引理与公理等价性的证明比较难,我们把它略去.

9·2·2 线性空间上的线性泛函的延拓

定义 1 设 E 为线性空间,$p(x)$ 为定义在 E 上的非负值泛函.

(i) 如果 $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$($\forall x, y \in$ E),则称 $p(x)$ 是**次可加泛函**;

(ii) 如果 $p(\alpha x) = \alpha p(x)$($\forall x \in$ E,$\alpha > 0$),则称 $p(x)$ 是**正齐性泛函**;

如果具有(i)(ii)两个性质,则称 $p(x)$ 是**次可加正齐性泛函**.

例 9·2·1 设 E 是赋范线性空间,$k \geqslant 0$,则 $p(x) = k\|x\|$ 是一个次可加正齐性泛函.

* **例 9·2·2** 设 M 为实赋范线性空间 E 的一个以 0 为内点的凸子集,则"Minkowski"泛函 $p(x)$:

$$p(x) = \inf\{\alpha \mid \alpha > 0, \alpha^{-1}x \in M\} \qquad (9 \cdot 2 \cdot 1)$$

是一个次可加正齐性连续泛函.

由定义容易看出,当 $x \in M$ 时 $p(x) \leqslant 1$,当 $x \in M^{\circ}$ 时 $p(x) < 1$,当 $x \overline{\in} M$ 时 $p(x) \geqslant 1$.

定义 2 设 f, g 分别是定义在 $D(f)$、$D(g) \subset$ E 上的线性泛函,称 f 是 g 的一个**线性延拓**,如果

1) $D(f) \supset D(g)$

2) $x \in D(g) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

定理 1 设 E 为实线性空间.若在 E 的子空间 E_0 上定义了一个线性泛函 f_0,满足 $f_0(x) \leqslant p(x)$,$(\forall x \in E_0)$,这里 $p(x)$ 为 E 上一个次可加正齐性泛函,那么必存在一个定义在整个 E 上的线性泛函 f,满足

1) $f(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in E$;

2) $x \in E_0 \Rightarrow f(x) = f_0(x)$.

* **证明** 若 $E_0 = E$,则定理的结论是平凡的.现在设 $E_0 \neq E$.

1°. 我们证明,在 $E_0 \neq E$ 时,f_0 必可线性延拓成 f_1,使得

$$f_1(x) \leqslant p(x) \quad \forall x \in D(f_1); \qquad (9 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$x \in D(f_0) \Rightarrow f_1(x) = f_0(x); \qquad (9 \cdot 2 \cdot 3)$$

$$D(f_0) \subsetneqq D(f_1) \subset E \qquad (9 \cdot 2 \cdot 4)$$

取 $x_0 \in E \setminus E_0$,令

$$E_1 = \{\alpha x_0 + y \mid \alpha \in R^1, y \in E_0\}.$$

对任意的 $y', y'' \in E_0$,有

$$f_0(y') - f_0(y'') = f_0(y' - y'') \leqslant p(y' - y'')$$
$$= p(y' + x_0 - y'' - x_0) \leqslant p(y' + x_0) + p(-y'' - x_0),$$

因此

$$-f_0(y'') - p(-y'' - x_0) \leqslant p(y' + x_0) - f_0(y').$$

y', y'' 既是 E_0 中任意的两点,那么就有

$$\sup_{y \in E_0}\{-p(-y - x_0) - f_0(y)\} \leqslant \inf_{y \in E_0}\{p(y + x_0) - f_0(y)\},$$

从而存在实数 c 满足

$$\sup_{y \in E_0}\{-p(-y - x_0) - f_0(y)\} \leqslant c \leqslant \inf_{y \in E_0}\{p(y + x_0) - f_0(y)\}$$

于是,对任意 $y \in E_0$ 有

$$c + f_0(y) \geqslant -p(-y - x_0); \tag{9·2·5}$$
$$c + f_0(y) \leqslant p(y + x_0). \tag{9·2·6}$$

在 E_1 上定义泛函 f_1:

$$f_1(\alpha x_0 + y) = \alpha c + f_0(y),$$

则 f_1 为 f_0 在 E_1 上的线性延拓.(9·2·3)(9·2·4) 显然满足.

下面证明(9·2·2) 也满足.设 $x = \alpha x_0 + y, \alpha \neq 0$.当 $\alpha < 0$ 时,注意到(9·2·5):

$$f_1(x) = \alpha c + f_0(y) = \alpha\left[c + f_0\left(\frac{1}{\alpha}y\right)\right]$$
$$\leqslant -\alpha p\left(-\frac{1}{\alpha}y - x_0\right) = p(y + \alpha x_0) = p(x).$$

当 $\alpha > 0$ 时,注意到(9·2·6):

$$f_1(x) = \alpha c + f_0(y) = \alpha\left[c + f_0\left(\frac{1}{\alpha}y\right)\right]$$
$$\leqslant \alpha p\left(\frac{1}{\alpha}y + x_0\right) = p(y + \alpha x_0) = p(x).$$

无论哪种情况,(9·2·2) 都满足.

2°. 设 G 为 f_0 的满足

$$g(x) \leqslant p(x) \quad x \in D(g)$$

的线性延拓 $g(x)$ 的全体. 在 G 中引入序关系如下：

$$g_1, g_2 \in G, g_1 \leqslant g_2 \text{ 是指 } D(g_1) \subset D(g_2)$$

且

$$x \in D(g_1) \Rightarrow g_2(x) = g_1(x).$$

这样，G 成一序集. 今证 G 的每个全序子集都有上界. 事实上，设 M 为 G 的任意一个全序子集，令 $\mathsf{D} = \bigcup\limits_{g \in M} D(g)$ 那么，D 是 E 的一个线性子空间. 今在 D 上定义

$$f^*(x) = g(x), \quad \text{如果 } x \in D(g), g \in M.$$

由于 M 是全序的，$f^*(x)$ 的值与 g 的取法无关. 不难看出，f^* 是 D 上的线性泛函，且满足

$$f^*(x) \leqslant p(x), \tag{9·2·7}$$

从而 $f^* \in G$. 显然，f^* 是 M 的上界，因此，根据 Zorn 引理，G 本身有一个极大元 f. 如果 $D(f) \neq \mathsf{E}$，根据前面 1° 的讨论，必存在 f 的一个线性延拓 f_1，满足(9·2·2)且 $D(f) \subsetneqq D(f_1)$，这与 f 的极大性矛盾. 因此 $D(f) = \mathsf{E}$. ▌

由于复线性空间可以把它看作实线性空间，而复空间上线性泛函的实部和虚部都可以看作是实线性泛函，因此，定理 1 对于复空间仍然成立. 当然，它们的表现形式是有所不同的.

定义 3　非负值次可加泛函 $p(x)$ 称为**对称的**，如果 $\alpha \in K$ 时

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x). \tag{9·2·8}$$

* **定理 2**　设 $p(x)$ 是复线性空间 E 上的对称非负值次可加泛函，$f_0(x)$ 是定义在 E 的线性子空间 E_0 上的线性泛函，满足

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \quad \forall x \in \mathsf{E}_0 \tag{9·2·9}$$

那么，必存在一个定义在整个 E 上的线性泛函 $f(x)$，满足

1) $|f(x)| \leqslant p(x) \quad \forall x \in \mathsf{E}$;

2) $x \in \mathsf{E}_0 \Rightarrow f(x) = f_0(x)$.

证明　把 E 看作实空间，设

$$f_0(x)=\varphi_0(x)+i\psi_0(x),\ x\in E_0$$

其中 $\varphi_0(x)$,$\psi_0(x)$ 各表示 $f_0(x)$ 的实部与虚部. 把 E_0 也看作 E 的实线性子空间,那么,容易验证 φ_0,ψ_0 是 E_0 上的实线性泛函. 现在由

$$\begin{aligned} i[\varphi_0(x)+i\psi_0(x)] &= if_0(x)=f_0(ix) \\ &= \varphi_0(ix)+i\psi_0(ix) \end{aligned}$$

可得

$$\varphi_0(ix)=-\psi_0(x),\ \forall x\in E_0. \qquad (9\cdot2\cdot10)$$

根据(9·2·9)式,$\varphi_0(x)\leqslant p(x)$ ($\forall x\in E_0$),从而,按定理1,φ_0 可以延拓成全 E 上的实线性泛函 φ,满足 $\varphi(x)\leqslant p(x)$ ($\forall x\in E$). 令

$$f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix),\ \forall x\in E, \qquad (9\cdot2\cdot11)$$

则

$$x\in E_0\Rightarrow f(x)=\varphi(x)-i\varphi(ix)=\varphi_0(x)+i\psi_0(x)=f_0(x).$$

再由(9·2·11),我们有

$$\begin{aligned} f(ix) &= \varphi(ix)-i\varphi(-x)=\varphi(ix)+i\varphi(x) \\ &= i[\varphi(x)-i\varphi(ix)]=if(x), \end{aligned}$$

从而不难看出,对任意复数 α 及 x、$y\in E$ 有

$$f(\alpha x)=\alpha f(x),\ f(x+y)=f(x)+f(y).$$

因此,f 是 E 上线性泛函,余下的还要证明 f 满足 1).

如果 $f(x)=0$,条件 1) 自然满足. 当 $f(x)\neq0$ 时,设

$$\theta=\arg f(x)\quad(\text{此处}\ \arg f(x)\ \text{表}\ f(x)\ \text{的幅角}),$$

则

$$|f(x)|=e^{-i\theta}f(x)=f(e^{-i\theta}x)=\varphi(e^{-i\theta}x)\leqslant p(e^{-i\theta}x)=p(x).$$

这里我们用到 $f(e^{-i\theta}x)$ 的虚部为零及 $p(\alpha x)=|\alpha|p(x)$ 这一事实. ▌

9·2·3 连续线性泛函的保范延拓

定理 3 (Hahn—Banach) 设 E 是赋范线性空间,f_0 为定义在 E 的子空间 E_0 上的有界线性泛函,那么,必存在 E 上的有界线性泛

函 f,满足

1) $\|f\| = \|f_0\|_{E_0}$;

2) $x \in E_0 \Rightarrow f(x) = f_0(x)$.

证明　取 $p(x) = \|f_0\|_{E_0} \|x\|$,那么 $p(x)$ 是 E 上的非负值次可加对称泛函,且

$$|f_0(x)| \leqslant p(x) \quad (\forall x \in E_0).$$

由定理 1,2,f_0 可以延拓成全 E 上的线性泛函 f,满足

$$|f(x)| \leqslant p(x) = \|f_0\|_{E_0} \|x\|, \forall x \in E \tag{9·2·12}$$

从而,由算子范数的定义,有

$$\|f\| \leqslant \|f_0\|_{E_0}. \tag{9·2·13}$$

但由于 f 是 f_0 的延拓,范数不会减少,自然有 $\|f_0\|_{E_0} \leqslant \|f\|$,因此 $\|f\| = \|f_0\|_{E_0}$. ▌

系 1　设 E 是赋范线性空间,$x_0 \in E, x \neq 0$,则必有 E 上的连续线性泛函 f,使

$$f(x_0) = \|x_0\|, \|f\| = 1.$$

证明　在 $E_0 = L\{x_0\} = \{tx_0 | t \in K\}$ 上定义 f_0:

$$f_0(x) = f_0(tx_0) = t\|x_0\|,$$

则 $f_0(x_0) = \|x_0\|, \|f_0\|_{E_0} = 1$,然后利用定理 3,$f_0$ 可保持范数地延拓成 E 上的线性泛函 f,那么,f 满足定理的条件. ▌

系 2　设 E 是赋范线性空间,$x_0 \in E$,如果对任何 $f \in E^*$ 都有 $f(x_0) = 0$,则 $x_0 = 0$.

这是系 1 的直接结果.

系 3　设 E_0 是赋范线性空间 E 的子空间,$y_0 \in E$,若 $\rho(y_0, E_0) = d > 0$,那么必有 $f \in E^*$,满足

1) $f(x) = 0 \quad \forall x \in E_0$;

2) $f(y_0) = 1$;

3) $\|f\| = \dfrac{1}{d}$.

证明 在子空间 $\mathrm{E}_1=\{x+ty_0 \mid x\in \mathrm{E}_0, t\in K\}$ 上定义一个泛函 f_0:对 $y=x+ty_0$,令

$$f_0(x+ty_0)=t, \tag{9·2·14}$$

则条件 1),2) 显然满足,且对任一 $y=x+ty_0(t\neq 0)$ 有

$$|f_0(y)|=|t|=\frac{|t|\,\|y\|}{\|y\|}=\frac{\|y\|}{\left\|\frac{x}{t}+y_0\right\|}$$

$$=\frac{\|y\|}{\left\|y_0-\left(-\frac{x}{t}\right)\right\|}\leqslant\frac{1}{d}\|y\|,$$

从而

$$\|f_0\|_{\mathrm{E}_1}\leqslant\frac{1}{d} \tag{9·2·15}$$

另一方面,对任意的 $x\in\mathrm{E}_0$ 有

$$1=|f_0(x-y_0)|\leqslant\|f_0\|_{\mathrm{E}_1}\|x-y_0\|,$$

故

$$\|f_0\|_{\mathrm{E}_1}\geqslant\frac{1}{\|x-y_0\|},\quad \forall x\in\mathrm{E}_0,$$

所以

$$\|f_0\|_{\mathrm{E}_1}\geqslant\sup_{x\in\mathrm{E}_0}\frac{1}{\|x-y_0\|}=\frac{1}{d}, \tag{9·2·16}$$

结合(9·2·15),(9·2·16) 即得

$$\|f_0\|_{\mathrm{E}_1}=\frac{1}{d}.$$

然后利用定理 3 即得证. ▌

§9·3 某些空间上有界线性泛函的表示

9·3·1 有限维线性空间上线性泛函的表示

设 E^n 是 n 维线性空间. $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是它的一个基. f 是 E^n 上的

任一线性泛函，令 $c_i = f(e_i)(i = 1, \cdots, n)$，那么，对任一 $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in E^n$，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i c_i. \qquad (9 \cdot 3 \cdot 1)$$

反过来，对任一 n 元数组 $(c_1, \cdots, c_n)$ 可按 $(9 \cdot 3 \cdot 1)$ 定义 E^n 上的一个线性泛函，所以 $(9 \cdot 3 \cdot 1)$ 是 E^n 上线性泛函的一般表示形式.

9·3·2　$C[a,b]$ 上有界线性泛函的表示

定理 1　设 f 是 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函，则存在唯一的 $g(t) \in V_0[a,b]$，满足

1) $f(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d} g(t), \forall x(t) \in C[a,b]$;

2) $\| f \| = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)$.

其中 $V_0[a,b]$ 表 $[a,b]$ 上满足

$$g(a) = 0, g(t) = g(t+0) \quad (t \in (a,b))$$

的有界变差函数 $g(t)$ 的全体. $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)$ 表 $g(t)$ 的全变差.

证明　令 B 表 $[a,b]$ 上有界函数的全体. B 按通常函数的加法运算及数与函数的乘法运算成一线性空间. 对 $x(t) \in$ B，令

$$\| x \| = \sup_{t \in [a,b]} | x(t) |, \qquad (9 \cdot 3 \cdot 2)$$

则易验证 $(9 \cdot 3 \cdot 2)$ 所定义的 $\| \cdot \|$ 是 B 上的范数，在此范数下 B 是一 Banach 空间. 显然，$C[a,b]$ 是 B 的子空间（事实上它是 B 的闭线性子空间），设 f 是 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函，根据线性泛函的延拓定理，我们可以把 f 保持范数地延拓到 B 上，延拓后的泛函我们仍记作 f.

以 $X_\xi(t)$ 表 $[a,b]$ 上 $[a,\xi](a < \xi \leqslant b)$ 的特征函数，并简单地记作 X_ξ. 我们规定 $X_a = 0$. 置

$$g_1(\xi) = f(X_\xi),$$

按定义,我们有 $g_1(a)=0$. 我们证明 $g_1(\xi)$ 是有界变差函数. 任作一组分点

$$a=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n=b,$$

记 $\varepsilon_i=\operatorname{sign}[g_1(\xi_i)-g_1(\xi_{i-1})]$,那么

$$\sum_{i=1}^{n}|g_1(\xi_i)-g_1(\xi_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[g_1(\xi_i)-g_1(\xi_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i[f(X_{\xi i})-f(X_{\xi i-1})]=\sum_{i=1}^{n}f(\varepsilon_i(X_{\xi i}-X_{\xi i-1}))$$

$$=f(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(X_{\xi i}-X_{\xi i-1}))\leqslant\|f\|\ \|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(X_{\xi i}-X_{\xi i-1})\|$$

$$=\|f\|.$$

这就证明了 $g_1(\xi)$ 是有界变差函数且

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g_1)\leqslant\|f\|.\tag{9·3·3}$$

根据 §6·4 定理 6,存在 $g\in V_0[a,b]$,它满足:当 t 为 g_1 的连续点及 $t=a,b$ 时

$$g(t)=g_1(t)-g_1(a)=g_1(t)\text{ 且 }\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g_1).$$

设 $x(t)\in C[a,b]$,我们证明

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t).$$

根据连续函数的 Stieltjes 积分的性质,对任一族分点

$$a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_{m_n}^{(n)}=b,$$

只要 $\delta_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m_n}(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})\to0$,就有

$$\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}x(\xi_i^{(n)})[g(t_i^{(n)})-g(t_{i-1}^{(n)})],$$

其中 $\xi_i^{(n)}\in[t_{i-1}^{(n)},t_i^{(n)}]$. 注意到有界变差函数的不连续点的全体至多可数,因此,我们可以选取上述诸分点都是 $g_1(t)$ 的连续点,且 $\delta_n\to0$. 令

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{m_n} x(\xi_i^{(n)})(X_{t_i^{(n)}} - X_{t_{i-1}^{(n)}})$$

由 $x(t)$ 的一致连续性，阶梯函数 $x_n(t)$ 一致收敛于 $x(t)$，即在 B 中 $\| x_n - x \| \to 0 (n \to \infty)$，从而

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} x(\xi_i^{(n)}) f(X_{t_i^{(n)}} - X_{t_{i-1}^{(n)}}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} x(\xi_i^{(n)}) [g_1(t_i^{(n)}) - g_1(t_{i-1}^{(n)})] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m_n} x(\xi_i^{(n)}) [g(t_i^{(n)}) - g(t_{i-1}^{(n)})] = \int_a^b x(t) \mathrm{d}g(t), \end{aligned}$$

于是 $g(t)$ 满足定理的条件 1).

然后，由 §6·4 定理 5，

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t) \mathrm{d}g(t) \right| \leqslant \| x \| \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g),$$

即得 $\| f \| \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g)$. 上面已证 $\mathop{\mathrm{V}}_a^b(g) \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g_1) \leqslant \| f \|$，故得

$$\| f \| = \mathop{\mathrm{V}}_a^b(g). \qquad (9 \cdot 3 \cdot 4)$$

因此，定理中条件 2) 也满足.

最后，根据 §6·4 定理 6 易知满足上述条件的 $g(t)$ 是唯一的. ▌

注　任意给定 $g(t) \in \mathrm{V}_0[a,b]$，根据 §6·4 的有关定理，可知

$$f(x) = \int_a^b x(t) \mathrm{d}g(t)$$

定义了 $C[a,b]$ 上的一个有界线性泛函 f，因此定理 1 实际上给出了一个由 $C[a,b]$ 的共轭空间到 $\mathrm{V}_0[a,b]$ 的保范线性同构映射 V，在映射 V 的意义下我们可以把 $C[a,b]^*$ 与 $\mathrm{V}_0[a,b]$ 看作是一个空间，并记作 $C[a,b]^* = \mathrm{V}_0[a,b]$.

9·3·3 $L^p[a,b]$ 与 $l^p(p>1)$ 上有界线性泛函的表示

定理2 设 $f(x)$ 是 $L^p[a,b](p>1)$ 上的线性连续泛函,则存在唯一的 $y(t)\in L^q[a,b](\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ 满足

1) $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,\quad \forall\, x(t)\in L^p[a,b]$;

2) $\|f\| = \|y\| = \left(\int_a^b |y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}$.

* **证明** 不失一般性,仅就实 $L^p[0,1]$ 来证明本定理. 考虑 $L^p[0,1]$ 中 $[0,t)$ 的特征函数

$$u_t(\xi)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\xi<t;\\ 0, & t\leqslant\xi\leqslant 1.\end{cases}\tag{9·3·5}$$

则 $u_t(\xi)\in L^p[0,1]$,令

$$g(t)=f(u_t).\tag{9·3·6}$$

1°. 证明 $g(t)$ 绝对连续.

设 $\delta_i=(T_i,t_i)$ 为含于 $[0,1]$ 中任意一组互不相交的开区间 $(i=1,2,\cdots,n)$. 记 $\varepsilon_i=\mathrm{sign}(g(t_i)-g(T_i))$,则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n|g(t_i)-g(T_i)| &= \sum_{i=1}^n\varepsilon_i(g(t_i)-g(T_i))\\ &= \sum_{i=1}^n\varepsilon_i[f(u_{t_i})-f(u_{T_i})]\\ &= \sum_{i=1}^n f(\varepsilon_i(u_{t_i}-u_{T_i}))\leqslant \|f\|\ \left\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i(u_{t_i}-u_{T_i})\right\|\\ &= \|f\|\left(\int_a^b\left|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i(u_{t_i}-u_{T_i})\right|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\ &= \|f\|\left(\sum_{i=1}^n\int_{\delta_i}\mathrm{d}t\right)^{1/p}\\ &= \|f\|\left(\sum_{i=1}^n(t_i-T_i)\right)^{1/p},\end{aligned}$$

因此 $g(t)$ 在 $[0,1]$ 上绝对连续.

2°. 令 $y(t) = g'(t)$，则

$$g(t) = g(0) + \int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (9\cdot 3\cdot 7)$$

又因 $g(0) = f(u_0) = f(0) = 0$，故得

$$g(t) = \int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (9\cdot 3\cdot 8)$$

即

$$f(u_t) = \int_0^t y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 u_t(\xi)y(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \qquad (9\cdot 3\cdot 9)$$

从而对于任一阶梯函数

$$z(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i\left[u_{\frac{i}{n}}(t) - u_{\frac{i-1}{n}}(t)\right]$$

(其中 c_i 为常数)，有

$$f(z(t)) = \int_0^1 z(t)y(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (9\cdot 3\cdot 10)$$

3°. 对于任一有界可测函数 $x(t)$，存在一串一致有界的阶梯函数 $z_n(t)$，它几乎处处收敛于 $x(t)$. 依 Lebesgue 控制收敛定理并注意到(9・3・10)

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 z_n(t)y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t.$$

又由于 $z_n(t) \to x(t)$ a. e. 且 $z_n(t)$ 一致有界，故由 Lebesgue有界收敛定理

$$\| z_n(t) - x(t) \| = \left(\int_0^1 |z_n(t) - x(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p} \to 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(x), \qquad (9\cdot 3\cdot 11)$$

即对于有界可测函数 $x(t) \in L^p[0,1]$ 有

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (9\cdot 3\cdot 12)$$

4°. 下证 $y(t) \in L^q[0,1]$.

令 $x_n(t)=\begin{cases}|y(t)|^{q-1}\operatorname{sign}y(t), & \text{当}|y(t)|\leqslant n;\\ n^{q-1}\operatorname{sign}y(t), & \text{当}|y(t)|>n.\end{cases}$

于是诸 $x_n(t)(n=1,2,3,\cdots)$ 都是有界可测函数，从而根据上面的证明有

$$f(x_n)=\int_0^1 x_n(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

于是

$$\begin{aligned}|f(x_n)|&\geqslant f(x_n)=\int_0^1 x_n(t)y(t)\mathrm{d}t\\&=\int_0^1|x_n(t)||y(t)|\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1|x_n(t)||x_n(t)|^{\frac{1}{q-1}}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1|x_n(t)|^p\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{9·3·13}$$

另一方面

$$|f(x_n)|\leqslant\|f\|\cdot\|x_n\|=\|f\|\left(\int_0^1|x_n(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}.\tag{9·3·14}$$

由(9·3·13)(9·3·14)即得

$$\left(\int_0^1|x_n(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/q}\leqslant\|f\|,\tag{9·3·15}$$

但显然在[0,1]上几乎处处有

$$\lim_{n\to\infty}|x_n(t)|=|y(t)|^{q-1},$$

故由(9·3·15)，利用 Fatou 引理即得

$$\left(\int_0^1|y(t)|^{(q-1)p}\mathrm{d}t\right)^{1/q}\leqslant\|f\|,$$

即

$$\left(\int_0^1|y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}\leqslant\|f\|,\tag{9·3·16}$$

从而知 $y(t)\in L^q[0,1]$.

5°. 下证对任何 $x(t)\in L^p[0,1]$ 有 1) 式成立.

由于 $y(t)\in L^q[0,1]$，故积分$\int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t$ 存在；其次，存在有界可测函数列 $x_n(t)$，使

$$\|x_n-x\| = \left(\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\to 0,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x). \tag{9·3·17}$$

利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 [x_n(t)-x(t)]y(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \left(\int_0^1 |x_n(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_0^1 |y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}\to 0,\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x_n(t)y(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{9·3·18}$$

由(9·3·17)，(9·3·18) 即得

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t. \tag{9·3·19}$$

故定理条件 1) 得证.

6°. 由 Hölder 不等式，对任何 $x(t)\in L^p[0,1]$，

$$\begin{aligned}|f(x)| &= \left|\int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \left(\int_0^1 |y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_0^1 |x(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p},\end{aligned}$$

故

$$\|f\| \leqslant \left(\int_0^1 |y(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}. \tag{9·3·20}$$

再注意到(9·3·16) 即得

$$\| f \| = \left(\int_0^1 | y(t) |^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

7°. 最后证明唯一性. 设 $y^*(t) \in L^q[0,1]$ 也满足

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y^*(t)\mathrm{d}t, \forall x(t) \in L^p[0,1],$$

则对任一 $x(t) \in L^p[0,1]$ 有

$$\int_0^1 x(t)(y(t) - y^*(t))\mathrm{d}t = 0,$$

从而

$$\int_0^1 | y(t) - y^*(t) | \mathrm{d}t = 0,$$

所以 $y(t) = y^*(t)$ a. e. 即 $y = y^*$. ▌

注 任给 $y(t) \in L^q[a,b](\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1)$, 作

$$f(x) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t \quad \forall x(t) \in L^p[a,b],$$

由 Hölder 不等式可知 f 是 $L^p[a,b]$ 上的一个有界线性泛函, 再由定理 2, $\| f \| = \| y \|$. 所以定理 2 实际上给出了一个 $L^p[a,b]^*$ 到 $L^q[a,b]$ 的保范的线性同构映射. 在此映射意义下我们可以把它们看作同一个空间, 并记作

$$L^p[a,b]^* = L^q[a,b] \quad (\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1).$$

类似地可证

定理 2′ 设 f 是 $l^p(p>1)$ 上连续线性泛函, 则存在唯一的 $y = (\eta_i) \in l^q$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}) = 1$, 使

1) $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i, \quad \forall x = (\xi_i) \in l^p$;

2) $\| f \| = \| y \|_{l^p}$

定理 2′ 即是说 $l^{p*} \subset l^q(\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1)$. 我们很容易看出, 实际

上 $l^{p*}=l^q(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$.

9·3·4　$L^1[a,b]$ 与 l^1 上有界线性泛函的表示

定理 3　设 f 是 $L^1[a,b]$ 上的有界线性泛函，则存在唯一的 $y(t)\in \mathrm{M}[a,b]$，适合

1) $f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,\quad \forall x(t)\in L^1[a,b]$；

2) $\|f\|=\|y\|_{\mathrm{M}}$.

定理 3′　设 f 是 l^1 上的有界线性泛函，则存在唯一的 $y=(\eta_i)\in m$，适合

1) $f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i,\quad \forall x=(\xi_i)\in l^1$；

2) $\|f\|=\|y\|_m$.

定理 3 与定理 3′ 即是说 $L^{1*}\subset \mathrm{M}, l^{1*}\subset m$. 我们很容易看出，实际上 $L^{1*}=\mathrm{M}, l^{1*}=m$.

§9·4　共轭算子

定义 1　设 E_1、E_2 为赋范线性空间，$A:\mathrm{E}_1\to\mathrm{E}_2$ 为连续线性算子. 对 $\varphi\in\mathrm{E}_2^*$，令

$$f(x)=\varphi(Ax)\quad \forall x\in \mathrm{E}_1. \tag{9·4·1}$$

显然，$f\in\mathrm{E}_1^*$. 于是，利用(9·4·1)可诱导出一个算子 $A^*:\varphi\mapsto f$，称它为 A 的**共轭算子**.

定理 1　连续线性算子 A 的共轭算子 A^* 也是连续线性算子，且

$$\|A^*\|=\|A\|. \tag{9·4·2}$$

证明　A^* 是线性算子很明显，读者可自行验证. 下证 A^* 连续且有(9·4·2). 对任意的 $\varphi\in\mathrm{E}_2^*$，由(9·4·1)，

$$|f(x)| = |\varphi(Ax)| \leqslant \|\varphi\| \|Ax\|$$
$$\leqslant \|\varphi\| \|A\| \|x\|, \quad \forall x \in E_1,$$

所以 $\|f\| \leqslant \|A\| \|\varphi\|$，即 $\|A^*\varphi\| \leqslant \|A\| \|\varphi\|$，于是

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|, \tag{9·4·3}$$

由此可知 A^* 有界. 另一方面，对任一 $x \in E_1$，若 $Ax \neq 0$，根据 §9·2 系 1，存在 $\varphi \in E_2^*$，使 $\varphi(Ax) = \|Ax\|$，$\|\varphi\| = 1$，于是

$$\|Ax\| = \varphi(Ax) = (A^*\varphi)(x) \leqslant \|A^*\varphi\| \|x\|$$
$$\leqslant \|A^*\| \|\varphi\| \|x\| = \|A^*\| \|x\| \tag{9·4·4}$$

而当 $Ax = 0$ 时(9·4·4) 自然成立，故(9·4·4) 对所有 $x \in E_1$ 都成立，因此有

$$\|A\| \leqslant \|A^*\|. \tag{9·4·5}$$

结合(9·4·3)、(9·4·5) 即得(9·4·2). ▌

例 9·4·1 设 $k(t,s)$ 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的可测函数，$q > 1$ 且 $\int_0^1\int_0^1 |k(t,s)|^q \mathrm{d}t\mathrm{d}s = M < \infty$，

考察积分算子 A：

$$Ax(t) = \int_0^1 k(t,s)x(s)\mathrm{d}s \quad \forall x(t) \in L^p[0,1].$$

由 §8·1 知 $A: L^p[0,1] \to L^q[0,1]$ $(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1)$ 是有界线性算子，现在求 $A^*: L^q[0,1]^* \to L^p[0,1]^*$.

设 $f \in L^q[0,1]^*$，存在 $y(t) \in L^p[0,1]$ 使

$$f(x) = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t, \quad \forall x \in L^q[0,1].$$

于是对任一 $x(t) \in L^p[0,1]$ 有

$$(A^*f)(x) = f(Ax) = \int_0^1 Ax(t)y(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1\int_0^1 k(t,s)x(s)y(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^1 x(s)\left(\int_0^1 k(t,s)y(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^1 x(t)\left(\int_0^1 k(s,t)y(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t,$$

所以 $A^* f$ 可以由函数 $\int_0^1 k(s,t)y(s)\mathrm{d}s = g(t)$ 来表示，于是，如果把 f 与 $y(t)$ 看作等同、把 $A^* f$ 与 $g(t)$ 看作等同，则 A^* 可以写成

$$A^* y(t) = \int_0^1 k(s,t)y(s)\mathrm{d}s.$$

共轭算子具有下列简单性质：

(i) $(A+B)^* = A^* + B^*$；

(ii) $(\alpha A)^* = \alpha A^*$；

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$；

(iv) $(A^{-1})^* = A^{*-1}$.

§9·5　弱* 收敛与弱收敛·自反空间

9·5·1　E 到 E** 的自然嵌入映射

设 E 是赋范线性空间. 由于 E 的共轭空间 E* 也是赋范线性空间，所以 E* 也有共轭空间 E**，E** 又称为 E 的**二次共轭空间**. 下面我们来考察 E 与 E** 的关系.

对每个 $x \in$ E，作 E* 上的泛函 x^{**} 如下：

$$x^{**}(f) = f(x) \quad (\forall f \in \mathrm{E}^*).$$

显然 x^{**} 是 E* 上的线性泛函. 由于

$$|x^{**}(f)| = |f(x)| \leqslant \|x\| \cdot \|f\|,$$

所以 $x^{**} \in$ E**，并且

$$\|x^{**}\| \leqslant \|x\|. \tag{9·5·1}$$

我们称 x^{**} 为 E** 中与 x 相对应的元素，并且称映射

$$J: x \longmapsto x^{**} \quad (\forall x \in \mathrm{E})$$

为 E 到 E** 的**自然嵌入映射**.

命题 1 赋范线性空间 E 到 E^{**} 的自然嵌入映射 J 有如下性质:

(i) $J(\alpha x+\beta y)=\alpha Jx+\beta Jy \quad (\forall x、y\in E,\alpha,\beta\in K)$;

(ii) $\|Jx\| = \|x\| \quad (\forall x\in E)$;

从而 J 是 E 到 $J(E)$ 的线性同构且保范的对应.

证明 显然(i) 成立. 下证(ii) 成立:设 $x\in E$. 当 $x=\theta$ 时显然(ii) 成立. 当 $x\neq\theta$ 时由 Hahn－Banach 定理的系知存在

$$f_0\in E^*,\ \|f_0\| = 1,使\ f_0(x) = \|x\|.$$

记 $x^{**} = Jx$,则

$$x^{**}(f_0) = f_0(x) = \|x\|,$$

从而 $\|x^{**}\| \geqslant \|x\|$. 再由(9・5・1) 知 $\|x^{**}\| = \|x\|$,(ii) 得证. ▌

由于 J 是 E 到 J(E) 的线性同构且保范的对应,为了讨论问题方便,我们往往在此对应 J 的意义下把 E 与 J(E) 看成是同一空间,因此把 $J(E)\subset E^{**}$ 简记作 $E\subset E^{**}$,并说 E 是 E^{**} 的(赋范线性) 子空间,从而把 Jx 简记作 x,并说 x 是 E^* 上的一个有界线性泛函.

定义 1 设 E 是赋范线性空间,若 $E = E^{**}$ (即自然嵌入映射 $J: E\to E^{**}$ 是满射的),则称 E 是**自反空间**.

由 §9・3・3 的结论不难得知,$L^p,l^p(p>1)$ 都是自反空间. 但是,L^1,l^1 不是自反空间,$C[a,b]$ 也不是自反空间(这可以利用 §9・5・3 定理 1 来证明).

9・5・2 弱* 收敛与弱收敛

定义 2 设 E 是赋范线性空间,所谓 E^* 中的点列 $\{f_n\}$ **弱* 收敛**于 $f\in E^*$,是指对于每个 $x\in E$ 均有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

这时点 f 称为点列 $\{f_n\}$ 的**弱* 极限**,记作 $f_n \xrightarrow{弱^*} f$.

注 “$\{f_n\}$ 作为 E^* 中的点列弱* 收敛于 f”实际就是“$\{f_n\}$

作为E到数域 K 的有界线性算子序列强收敛于 f". 但是我们一般只采用前一个说法而不采用后一个说法. 有些书中,为了与弱* 收敛作对照,把 E^* 中点列按范数的收敛又称为强收敛.

在 E^* 中,若 $\{f_n\}$ 按范数收敛于 f,则 $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 f. 但其逆不真(见 §8·2 例 8·2·3). 由 §8·2 命题 3 可知,在 E^* 中若 $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 f,则 $\varliminf_{n\to\infty}\|f_n\| \geqslant \|f\|$.

由 §8·3 定理 2 立即可知

命题2 设E是Banach空间,$\{f_n\}\subset E^*$, $f\in E^*$,则 $\{f_n\}$ 弱* 收敛于 f 的充要条件是:

(i) $\{\|f_n\|\}$ 有界;

(ii) 对 E 中某稠密集 D 的一切元 x 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

定义 3 设 E 是赋范线性空间,所谓 E 中的点列 $\{x_n\}$ **弱收敛**于 $x\in E$,是指对于每个 $f\in E^*$ 均有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x).$$

这时点 x 称为点列 $\{x_n\}$ 的**弱极限**,记作 $x_n \xrightarrow{\text{弱}} x$.

注 "$\{x_n\}$ 作为 E 中的点列弱收敛于 x"也可以说是"$\{x_n\}$ 作为 E^{**} 中的点列弱* 收敛于 x". 有些书中,为了与弱收敛作对照,把 E 中点列按范数的收敛又称为强收敛.

由于 E^* 也是赋范线性空间,所以 E^* 中的点列也有弱收敛的概念. 由于 $E\subset E^{**}$,根据弱、弱* 收敛的定义立即知,E^* 中点列的弱收敛蕴涵弱* 收敛,但其逆不真.

由定义 3 后的注立即可知

命题 3 设 E 是赋范线性空间,$\{x_n\}\subset E$, $x\in E$,则 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x 的充要条件是:

(i) $\{\|x_n\|\}$ 有界;

(ii) 对 E^* 中某稠密集 D 的一切元 f 均有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

注 要特别注意,有某些赋范线性空间(例如 $C[a,b]$),其中

的点列$\{x_n\}$即使对每个$f\in \mathsf{E}^*$相应的$\{f(x_n)\}$都收敛，$\{x_n\}$也未必就弱收敛于E中的某元(参见[12]).

*9·5·3 可分赋范空间的某些性质

定理1 如果赋范线性空间E的共轭空间E^*是可分的，那么E也是可分的.

证明 E^*可分，故E^*中有一可数稠密集$\{g_n\}_1^\infty$. 不妨设诸$g_n\neq\theta$. 取$f_n=\|g_n\|^{-1}\cdot g_n$，则$\{f_n\}$是$\mathsf{E}^*$的单位球面

$$S=\{f\in \mathsf{E}^*\mid \|f\|=1\}$$

中的稠密集. 由$\|f_n\|=1$知可选取$x_n\in \mathsf{E}$，$\|x_n\|=1$，使

$$|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}.$$

设E_0是在E中由$\{x_n\}_1^\infty$生成的闭线性子空间，易知E_0是可分的. 下证$\mathsf{E}=\mathsf{E}_0$.

用反证法. 假若$\mathsf{E}_0\neq \mathsf{E}$，则存在$x_0\in \mathsf{E}$使$\rho(x_0,\mathsf{E}_0)=d>0$. 由Hahn－Banach定理的系知存在$f_0\in \mathsf{E}^*$使$\|f_0\|=1$且对每个$x\in \mathsf{E}_0$均有$f_0(x)=0$. 于是

$$\begin{aligned}\|f_n-f_0\| &= \sup_{\|x\|=1}|f_n(x)-f_0(x)|\\ &\geqslant |f_n(x_n)-f_0(x_n)|=|f_n(x_n)|>\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

对一切n均$\|f_n-f_0\|>\dfrac{1}{2}$而$f_0\in S$，这与$\{f_n\}$在S中稠密矛盾. 可见$\mathsf{E}=\mathsf{E}_0$可分. ▌

定理2 如果赋范线性空间E是可分的，那么其共轭空间E^*中的任一有界点列必含有弱*收敛子列(即E^*是局部弱*列紧的).

证明 由E可分知其中有一可数稠密集$\{x_n\}_1^\infty$. 设$\{f_n\}$是E^*中的有界点列，则$\{f_n(x_1)\}$是有界数列，因此可从$\{f_n\}$中选出子列$\{f_n^{(1)}\}_1^\infty$使$\{f_n^{(1)}(x_1)\}$收敛. 同理又可从$\{f_n^{(1)}\}$中选出子列$\{f_n^{(2)}\}_1^\infty$，使$\{f_n^{(2)}(x_2)$收敛. 如此类推. 由归纳法可得

$$f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \cdots$$

$$f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \cdots$$

$$\cdots\cdots$$

其中每一个序列都是前一个序列的子列.用对角线法取

$$f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \cdots, f_n^{(n)}, \cdots$$

显然对每个 x_n，数列 $f_1^{(1)}(x_n), f_2^{(2)}(x_n), f_3^{(3)}(x_n), \cdots$ 都收敛. 由 §8·3 定理 2 知$\{f_n^{(n)}\}$必弱*收敛于某个 $f \in \mathrm{E}^*$. 定理得证. ▍

*9·5·4　自反空间的某些性质

定理 3　如果赋范线性空间 E 是自反的，那么它的任意闭线性子空间 E_0 也是自反的.

证明　因为 $\mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}_0^{**}$，故要证明 $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_0^{**}$，只需证明：对于每个 $x_0^{**} \in \mathrm{E}_0^{**}$，必有一个 $x_0 \in \mathrm{E}_0$，使

$$x_0^{**}(f) = f(x_0) \quad (\forall f \in \mathrm{E}_0^*). \qquad (9 \cdot 5 \cdot 2)$$

对于任一 $\varphi \in \mathrm{E}^*$，φ 在 E_0 上的限制 $\varphi|_{\mathrm{E}_0}$ 仍是线性泛函，且

$$\| \varphi|_{\mathrm{E}_0} \| = \sup_{\substack{x \in \mathrm{E}_0 \\ \|x\|=1}} |\varphi|_{\mathrm{E}_0}(x)| \leqslant \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \|\varphi\|. \qquad (9 \cdot 5 \cdot 3)$$

作算子 $T: \mathrm{E}^* \to \mathrm{E}_0^*$ 使 $T\varphi = \varphi|_{\mathrm{E}_0} = f \in \mathrm{E}_0^*$. 由(9·5·3)知 T 是有界线性算子. 依 §9·4 定理 1，$T^*: \mathrm{E}_0^{**} \to \mathrm{E}^{**} = \mathrm{E}$ 也是有界线性算子.

由 §9·2 定理 3，对每一 $f \in \mathrm{E}_0^*$，必存在它在全 E 上的保范延拓 φ. 于是 $\varphi|_{\mathrm{E}_0} = f$，也即 $T\varphi = f$. 从而

$$x_0^{**}(f) = x_0^{**}(T\varphi) = (T^* x_0^{**})(\varphi) = \varphi(x_0),$$

其中我们令 $x_0 = T^* x_0^{**}$，因而

$$x_0 \in \mathrm{E}^{**} = \mathrm{E}.$$

如果我们再证出 $x_0 \in \mathrm{E}_0$，便知 $\varphi(x_0) = f(x_0)$，从而可得(9·5·2).

现在证明 $x_0 \in \mathrm{E}_0$. 用反证法. 若 $x_0 \in \mathrm{E} \backslash \mathrm{E}_0$，则由 Hahn－

Banach 定理的系，存在 $\varphi_0 \in \mathsf{E}^*$，使得

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \forall x \in \mathsf{E}_0; \quad \varphi_0(x_0) = 1.$$

这意味着 $T\varphi_0 = f_0 = 0$，从而

$$0 = x_0^{**}(f_0) = x_0^{**}(T\varphi_0) = (T^* x_0^{**})(\varphi_0) = \varphi_0(x_0) = 1.$$

这是不可能的. 因此 $x_0 \in \mathsf{E}_0$. ▌

定理 4 如果 E 是自反空间，那么 E 中的任一有界点列必含有弱收敛子列(即 E 是局部弱列紧的).

证明 设 $\{x_n\}$ 是 E 中的有界点列，记 $\{x_n\}$ 所生成的闭线性子空间为 E_0，则 E_0 可分. 由定理 3 知 E_0 也自反. 因而 E_0^{**} 可分，再由定理 1 知 E_0^* 也可分. 于是由定理 2 知 E_0^{**} 中任一有界点列必含有弱* 收敛子列.

设 J 是 E_0 到 E_0^{**} 的自然嵌入映射. 则 $\{Jx_n\}$ 是 E_0^{**} 中的有界点列，因而有子列 $\{Jx_{n_i}\}$ 弱* 收敛于某点 $x_0^{**} \in \mathsf{E}_0^{**}$. 记 $J^{-1}x_0^{**}$ 为 x_0，则 $x_0 \in \mathsf{E}_0$. 由弱* 收敛的定义知对每个 $f \in \mathsf{E}_0^*$ 均有 $(Jx_{n_i})(f) \to (Jx_0)(f)$，亦即 $f(x_{n_i}) \to f(x_0)$.

对任意 $\varphi \in \mathsf{E}^*$，显然 φ 在 E_0 上的限制 $\varphi|_{\mathsf{E}_0} \in \mathsf{E}_0^*$，所以

$$\varphi(x_{n_i}) = \varphi|_{\mathsf{E}_0}(x_{n_i}) \to \varphi|_{\mathsf{E}_0}(x_0) = \varphi(x_0).$$

这就是说在 E 中 $\{x_{n_i}\}$ 弱收敛于 x_0. 定理得证. ▌

* §9・6 凸集分离定理

作为 Hahn－Banach 定理的应用，在这一节中讲述几个有关凸集分离的定理. 在平面上，两个不相交的凸集 A 与 B，必有一条直线 l 分离 A 与 B. 即存在一直线 l，使 A，B 分别在 l 的两侧. 在三维欧氏空间，两个不相交的凸集 A，B，必存在一平面分离 A，B. 这一节中，我们要把这个事实推广到一般的赋范线性空间中去. 为了简单，我们只讨论实空间中的情形.

记平面上的点 $x=(x_1,x_2)$，则平面上直线的方程具有形式

$$ax_1+bx_2=r. \tag{9·6·1}$$

如果令

$$f(x)=f(x_1,x_2)=ax_1+bx_2,$$

那么 f 就是平面上的一个线性泛函，且(9·6·1)可写成

$$f(x)=r. \tag{9·6·2}$$

于是，一条直线 l 分离 A,B，可叙述成：存在一个 R^2 上的线性泛函 f，及一数 r，使

$$\begin{cases} f(x)\leqslant r, & \text{当 } x\in A; \\ f(x)\geqslant r, & \text{当 } x\in B. \end{cases} \tag{9·6·3}$$

定义 1 E_0 称为是赋范线性空间 E 的一个**极大子空间**，是指 E_0 是 E 的一个闭的真子空间，且对任一 $x_0\in\mathsf{E}\backslash\mathsf{E}_0$，$\mathsf{E}_0\cup\{x_0\}$ 生成整个 E. 极大子空间 E_0 的一个平移

$$L=\{x+x_0\,|\,x\in\mathsf{E}_0\}=\mathsf{E}_0+x_0$$

称为 E 的一个**超平面**.

定理 1 L 是赋范线性空间 E 的超平面的充分必要条件是存在一非零线性连续泛函 f 及实数 r 使

$$L=H_f^r, \tag{9·6·4}$$

其中 $H_f^r=\{x\in\mathsf{E}\,|\,f(x)=r\}$.

证明 设 L 是一超平面，则 $L=\mathsf{E}_0+x_0$，其中 E_0 是 E 的极大子空间，故存在一 E 上非零线性连续泛函 f，使对任一 $x\in\mathsf{E}_0$ 有 $f(x)=0$. 设 $f(x_0)=r$. 显然，$L\subset H_f^r$.

现在，设 $x\in H_f^r$，令 $y=x-x_0$，则

$$f(y)=f(x-x_0)=f(x)-f(x_0)=0,$$

由于 E_0 是 E 的极大子空间，故必 $y\in\mathsf{E}_0$，从而，$x=y+x_0\in L$，即 $H_f^r\subset L$，因此，$L=H_f^r$.

现在设(9·6·4)成立. 令 $\mathsf{E}_0=\{x\in\mathsf{E}\,|\,f(x)=0\}$. 显然，$\mathsf{E}_0$ 是 E 的真闭子空间. 现在设 $x_1\in\mathsf{E}\backslash\mathsf{E}_0$，则 $f(x_1)\neq 0$，对任一 $x\in\mathsf{E}$，令

$$z=x-\frac{f(x)}{f(x_1)}x_1,$$

则 $z \in \mathsf{E}_0, x = z + \dfrac{f(x)}{f(x_1)} x_1$，这说明 $\mathsf{E}_0 \cup \{x_1\}$ 生成 E，故 E_0 是极大子空间. 任取一 $x_0 \in L$，则 $f(x_0) = r$，从而 $L = \mathsf{E}_0 + x_0$. ▌

这样，所谓一个集合 $A \subset \mathsf{E}$ 在超平面 $L = H_f^r$ 一侧，可以用线性泛函描写成：

$$\text{存在 } f \in \mathsf{E}^* \text{ 及 } r \text{ 使 } x \in A \Rightarrow f(x) \geqslant r \quad (\text{或} \leqslant r).$$

定义 2 所谓一个超平面 L 分离集合 A、B，是指存在一个连续线性泛函 f 及实数 r 使得 $L = H_f^r$，且

$$\begin{cases} f(x) \leqslant r, & (\text{或} \geqslant r) \quad \forall x \in A; \\ f(x) \geqslant r, & (\text{相应地}, \leqslant r) \quad \forall x \in B. \end{cases}$$

如果上式中用“$>$”与“$<$”来分别代替“$\geqslant$”和“$\leqslant$”，那么，我们就说 $L = H_f^r$ **严格分离** A,B.

定理 2 设 E 是实赋范线性空间，A 为 E 的具有内点的非空凸子集，又设 $x_0 \overline{\in} A$，则必存在一个超平面 H_f^r 分离 A 与 x_0.

证明 不失一般性可设 0 为 A 的一个内点，那么它的 Minkowski 泛函 $p(x)$ 是一个非零连续正齐性次可加泛函，满足

$$p(x) \leqslant 1 \quad (\forall x \in A), \quad p(x_0) \geqslant 1.$$

首先在 E 的一维子空间 $\mathsf{E}_0 = \{\lambda x_0 \mid \lambda \in R^1\}$ 上定义一线性泛函 f_0：

$$f_0(x) = f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0),$$

由于 $p(x)$ 是非负的，故在 E_0 上显然有

$$f_0(x) \leqslant p(x).$$

根据 Hahn－Banach 定理，f_0 必可延拓到全 E 上，记作 f，满足

$$f(x) \leqslant p(x),$$

从而有

$$\left.\begin{aligned} f(x_0) = f_0(x_0) = p(x_0) \geqslant 1, \\ f(x) \leqslant p(x) \leqslant 1 \qquad \forall x \in A. \end{aligned}\right\} \tag{9·6·5}$$

因为 0 是 A 的内点，所以 f 显然连续. 由(9·6·5)H_f^r 分离 A 与 x_0. ▌

定理 3 设 A 和 B 为实赋范线性空间 E 的两个非空凸集，A 有内点，$A^\circ \cap B = \varnothing$($A^\circ$ 表 A 的内点的全体)，那么存在超平面 H_f^r

分离 A 与 B,即存在一个非零连续线性泛函 $f(x)$ 使得

$$\begin{cases} f(x) \geqslant r, & \forall x \in A; \\ f(x) \leqslant r, & \forall x \in B. \end{cases}$$

证明　在证明本定理时要用到下述结论:设 E 为赋范线性空间,M 为 E 的子集,$M+y$ 为 M 的一个平移,则 x 为 $M+y$ 内点的充分必要条件为 $x-y$ 为 M 的内点(留作习题).

现在我们来证明本定理.令

$$M = A^{\circ} - B = \{x-y \mid x \in A^{\circ}, y \in B\},$$

容易验证 M 是凸集,又可知 $M = \bigcup\limits_{y\in B}(A^{\circ}+(-y))$,而 $A^{\circ}+(-y)$ 是开集,故 M 是开集. 还不难得知,$0 \notin M$

事实上,假若 $0 \in M$,则存在 $x_0 \in A^{\circ}$ 及 $y_0 \in B$ 使 $0 = x_0 - y_0$,从而 $x_0 = y_0$,但这与 $A^{\circ} \cap B = \varnothing$ 的题设矛盾.

根据定理 2,存在超平面 $H_f^{r_0}$ 分离 M 与 0.亦即

$$\begin{cases} f(z) \geqslant r_0, & \forall z \in M; \\ f(0) \leqslant r_0. \end{cases}$$

即对于任一 $x \in A^{\circ}, y \in B$,

$$f(x) - f(y) \geqslant r_0,$$

$$0 \leqslant r_0.$$

x,y 既然是任意的,即得

$$\inf_{x\in A^{\circ}} f(x) \geqslant \sup_{y\in B} f(y),$$

于是可取 r 使

$$\inf_{x\in A^{\circ}} f(x) \geqslant r \geqslant \sup_{y\in B} f(y),$$

即得

$$\begin{cases} f(x) \geqslant r, & \forall x \in A^{\circ}; \\ f(x) \leqslant r, & \forall x \in B. \end{cases}$$

由于 f 连续,故得

$$\begin{cases} f(x) \geqslant r, & \forall x \in A; \\ f(x) \leqslant r, & \forall x \in B. \end{cases}$$ ∎

习　题　九

1. 设 f_1、f_2 是 E 上两个线性泛函,证明:若 $f_1^{-1}(0)=f_2^{-1}(0)$,则 $f_1=kf_2$.

2. 设 $\{x_n\}$ 是赋范线性空间 E 中一元素列,证明:$y\in\overline{L\{x_n\}}$ 的充分必要条件是:对任意 $f\in E^*$,若 $f(x_n)=0$ $(n=1,2,\cdots)$ 则 $f(y)=0$.

3. 设 $f\in E^*$, $\|f\|=1$, $N=\{x\in E\,|\,f(x)=0\}$,证明:对任意 $x\in E$, $|f(x)|=\rho(x,N)$.

4. 设 E 是赋范线性空间,又设当 f_1、$f_2\in E^*$, $\|f_1\|=\|f_2\|=1$, $f_1\neq f_2$ 时恒有 $\|f_1+f_2\|<2$,若 f_0 是定义在 E 的子空间 E_0 上的有界线性泛函,证明 f_0 的保范延拓是唯一的.

5. 记 $l_0^2=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots)\,|$ 只有有限个 $\xi_i\neq 0\}$, l_0^2 上元 $x=(\xi_i)$ 的范数定义为 $\|x\|=\left(\sum\limits_{i=1}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,试在 l_0^2 上造出一个无界的线性泛函.

6. 设 $f(x)$ 为 m 上的线性泛函:对 $\forall x=(\xi_i)\in m$ 有 $f(x)=\xi_{i_0}$ (i_0 为固定的自然数). 试证 f 是 m 上的有界线性泛函,并求出 f 的范数.

7. 设 $p>1$,试证 $l^{p*}=l^q$ $\quad\left(q=\dfrac{p}{p-1}\right)$.

8. 证明 §9·3 定理 3′.

9. 设 X 是赋范线性空间,$x_1,\cdots,x_n$ 是 X 中 n 个线性无关的元,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是一组数,证明:

(1) 存在 $f\in X^*$ 使 $f(x_i)=\alpha_i$ $\quad(1\leqslant i\leqslant n)$;

(2) 对(1)中的 f, $\|f\|\leqslant M$ 的充要条件是:对任何数 $t_1,\cdots,t_n$,都成立

$$\left|\sum_{i=1}^{n} t_i a_i\right| \leqslant M \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \right\| .$$

10. R^n 按范数 $\|x\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$ $(x=(\xi_i,\cdots,\xi_n))$ 成为赋范线性空间，问 R^n 的共轭空间是什么？

11. 证明：无穷维赋范线性空间的共轭空间是无穷维的.

12. 设 f 是定义在 $C[a,b]$ 上的线性泛函，且对一切 $x(t)\in C[a,b]$，$x(t)\geqslant 0$，都有 $f(x)\geqslant 0$，证明 f 是 $C[a,b]$ 上的连续线性泛函.

13. 设 $T: l^p \to l^p$ $(p>1)$ 定义为：$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$Tx=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$，求 T^*.

14. 证明：空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 的充要条件是：存在常数 M 使 $\|x_n\|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$，并且对任何 $t\in[a,b]$ 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(t)=x_0(t)$.

15. 证明：$l^p(p>1)$ 中点列 $x_n=(\xi_i^{(n)})$ 弱收敛于 $x=(\xi_i)$ 的充要条件是：存在常数 M 使 $\|x_n\|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$. 且

$$\lim_{n\to\infty}\xi_i^{(n)}=\xi_i \quad (i=1,2,\cdots).$$

16. 设 $\{f_n\}\subset L^p[0,1]$ $(p>1)$，f_n 依测度收敛于 $f\in L^p[0,1]$ 且 $\{\|f_n\|\}$ 有界，证明：f_n 弱收敛于 f.

17. 举例说明，在 $L^2[-\pi,\pi]$ 中弱收敛的函数列未必依测度收敛.

18. 设 c_0 是由一切收敛于 0 的数列组成的线性空间，$x=(\xi_i)\in c_0$ 的范数定义为 $\|x\|=\sup\limits_i|\xi_i|$，证明 c_0 是 Banach 空间，求出它的共轭空间.

19. 设 E_0 是赋范线性空间 E 的闭子空间，$\{x_n\}\subset E_0$，$x_n \xrightarrow{\text{弱}} x\in E$，证明：$x\in E_0$.

20. 证明：在 n 维欧氏空间 R^n 中弱收敛与强收敛等价.

21. 证明：l^1 中弱收敛与强收敛等价.

22. 试在 $L^p[0,1]$ $(1 < p < \infty)$ 中造一个弱收敛但不强收敛的点列.

23. 证明:任何有限维赋范线性空间都是自反的.

24. 证明:l^1 不是自反空间.

25. 证明:Banach 空间 E 自反的充要条件是 E^* 自反.

26. 设 E 不是自反空间,证明:$\mathrm{E},\mathrm{E}^*,\mathrm{E}^{**},\mathrm{E}^{***},\cdots$ 是互不相同的空间.

27. Banach 空间 E 称为**弱序列完备**的,是指:对每个 $f \in \mathrm{E}^*$,$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 存在 $\Rightarrow$ 存在 $x \in \mathrm{E}$ 使 x_n 弱收敛于 x. 证明

(i) 自反空间都是弱序列完备的;

(ii) l^1 是弱序列完备的.

28. 设 E 是实 Banach 空间,M 为 E 的一个非空闭凸集,$x_0 \overline{\in} M$;证明:存在超平面严格分离 M,x_0.

29. 设 M 为实 Banach 空间 E 中的非空闭凸集,$x_n \in M(n=1,2,\cdots)$,$x_n \xrightarrow{弱} x_0 \in \mathrm{E}$,证明:$x_0 \in M$.

30. 设 A、B 是实 Banach 空间 E 中两个凸集,$\rho(A,B) = d > 0$,证明:存在超平面分离 A,B.

第十章　全连续线性算子

§10·1　全连续算子的定义和性质

定义 1　设 E_1 和 E_2 是两个距离空间，如果算子 $A:E_1 \to E_2$ 把 E_1 中任一有界集映成 E_2 中的列紧集，则称 A 为一**紧算子**，连续的紧算子称作**全连续算子**.

显然，如果 E_1, E_2 是两个赋范线性空间，$A:E_1 \to E_2$ 是线性算子，那么 A 是紧算子与 A 是全连续算子是等价的. 事实上，由于列紧集是有界集，若 A 是紧算子，则把 E_1 中的有界集映成 E_2 中的有界集，从而 A 有界，因而连续.

但一般来说，连续算子未必是全连续的，例如，l^2 中的恒同算子 I 是连续的，但不是全连续的，因为 I 把 l^2 中的单位球映成 l^2 中的单位球，而 l^2 中的单位球不是列紧集.

从定义我们立即可得，线性算子 A 全连续的充分必要条件是：对 E_1 中任一有界序列 $\{x_n\}$，元素列 $\{Ax_n\}$ 都有收敛子列.

例 10·1·1　设 $E_1 = E_2 = C[a,b]$，于是，如果核 $k(t,s)$ 是正方形 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 上 的连续函数，那么，下式定义的积分算子

$$A:C[a,b] \to C[a,b], \quad Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s = y(t)$$

是全连续的. 简言之，具连续核的线性积分算子是连续函数空间上的全连续算子.

证明　设 $\{x(t)\}$ 是 $C[a,b]$ 中任一有界集，即存在常数 K，

$\|x(t)\| \leqslant K$. 我们证明$\{x(t)\}$的象集$\{y(t)\}$是列紧集. 根据 Arzela 定理,只需证明$\{y(t)\}$一致有界且等度连续.

$\{y(t)\}$之一致有界性很明显,事实上,设

$$M = \max_{a \leqslant t, s \leqslant b} |k(t,s)|,$$

则

$$|y(t)| = \left|\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right| \leqslant MK(b-a).$$

下面证明$\{y(t)\}$等度连续. 事实上,任给$\varepsilon > 0$,由于$k(t,s)$一致连续,知必有$\delta > 0$存在,使当$|t_1 - t_2| < \delta$时,对所有$s \in [a,b]$都有

$$|k(t_1,s) - k(t_2,s)| < \frac{\varepsilon}{K(b-a)},$$

从而

$$|y(t_1) - y(t_2)| = \left|\int_a^b (k(t_1,s) - k(t_2,s))x(s)\mathrm{d}s\right| < \varepsilon.$$

故$\{y(t)\}$等度连续. ▍

定理 1 E_1 是赋范线性空间,E_2 是 Banach 空间,$A_n: E_1 \to E_2$ ($n = 1,2,\cdots$) 为全连续线性算子,$A: E_1 \to E_2$ 为线性有界算子,如果 $\|A_n - A\| \to 0$ $(n \to \infty)$,那么 A 也是全连续的.

证明 只需证明对 E_1 中任一有界点集 M,$A(M)$ 为 E_2 中的列紧集. 为此,又只需证明,对任一 $\varepsilon > 0$,$A(M)$ 有列紧的 ε－网.

设 $\|x\| \leqslant K$ $(\forall x \in M)$,因 $\|A_n - A\| \to 0$,故存在 n_0,$\|A_{n_0} - A\| < \frac{\varepsilon}{K}$. 于是,对任一 $x \in M$,

$$\|A_{n_0}x - Ax\| \leqslant \|A_{n_0} - A\| \cdot \|x\| < \varepsilon.$$

即列紧集 $A_{n_0}(M)$ 是 $A(M)$ 的一个 ε－网. ▍

注 当 E_2 是 Banach 空间时,定理 1 表明 $\mathscr{B}(E_1 \to E_2)$ 中全连续线性算子的全体成一闭线性子空间.

例 10·1·2 $E_1 = E_2 = L^2[a,b]$,$k(t,s) \in L^2[a,b;a,b]$ 那么积

分算子 A:

$$y(t)=Ax(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

是全连续的,简言之,具平方可积核的线性积分算子是 L^2 空间上的全连续算子.

证明　设 $\left(\int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}=M<+\infty$,则

$$\|Ax\|=\left(\int_a^b\left|\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\int_a^b\int_a^b |k(t,s)|^2\mathrm{d}s\int_a^b |x(s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant M\|x\|,$$

故

$$\|A\|\leqslant M. \tag{10·1·1}$$

1°.　先设 $k(t,s)$ 是连续的,则

$$|Ax(t)|=\left|\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |k(t,s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |x(s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_a^b |k(t,s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|.$$

上式表明 A 把 $L^2[a,b]$ 中任一有界(依 $L^2[a,b]$ 中范数)集映成一致有界的函数集.

$$|Ax(t_1)-Ax(t_2)|=\left|\int_a^b (k(t_1,s)-k(t_2,s))x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant\left(\int_a^b |k(t_1,s)-k(t_2,s)|^2\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|.$$

由于 $k(t,s)$ 一致连续,因此上式表明 A 把 $L^2[a,b]$ 中的有界集映成之函数集等度连续,从而 A 把 $L^2[a,b]$ 中的有界集映成 $C[a,b]$ 中的列紧集,从而也映成 $L^2[a,b]$ 中的列紧集. 从而 A 全连续.

2°. 现在设 $k(t,s)\in L^2[a,b;a,b]$,由于连续函数集在 L^2 中稠密,故必存在 $[a,b;a,b]$ 上的连续函数列 $k_n(t,s)$,使

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\int_a^b |k_n(t,s)-k(t,s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t = 0. \qquad (10\cdot1\cdot2)$$

考虑算子 A_n:

$$A_n x(t) = \int_a^b k_n(t,s)x(s)\mathrm{d}s,$$

由 1° 所证 A_n 是全连续的，由(10・1・1)(10・1・2) 知：

$$\| A_n - A \| \leqslant \left(\int_a^b\int_a^b |k_n(t,s)-k(t,s)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{1/2} \to 0.$$

故由定理 1 即知 A 全连续. ▌

定理 2 全连续算子 $A:\mathsf{E}_1\to\mathsf{E}_2$ 的值域是可分的.

证明 令

$$B_n = \{x\in\mathsf{E}_1 \mid \|x\| < n\},$$

记 $G_n = A(B_n)$，由于 A 是全连续的，故 G_n 是列紧的，从而有可数稠集 T_n，$T=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n$ 也是可数集，显然 T 在 $G=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n$ 中稠密. 由于 $\mathsf{E}_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n$，故 A 的值域

$$A(\mathsf{E}_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty}A(B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}G_n = G,$$

即可数集合 T 在 A 的值域中稠密. ▌

定理 3 全连续算子 $A:\mathsf{E}_1\to\mathsf{E}_2$ 必将弱收敛列变成强收敛列.

证明 设 $x_n \xrightarrow{弱} x_0$，令 $Ax_n = y_n$，$Ax_0 = y_0$，我们证明

$$\| y_n - y_0 \| \to 0.$$

假若不然，则必有 $\varepsilon > 0$ 及子列 $\{y_{n_k}\}$ 存在，使

$$\| y_{n_k} - y_0 \| > \varepsilon \quad k = 1,2,3,\cdots \qquad (10\cdot1\cdot3)$$

由于 $\{x_{n_k}\}$ 弱收敛，故 $\{\|x_{n_k}\|\}$ 有界(§9・5 命题 3)，从而由 A 之全连续性知，$\{y_{n_k}\}$ 必有子列 $\{y_{n_{k_i}}\}$ 收敛于某元 $y_0'\in\mathsf{E}_2$. $y_{n_{k_i}}$ 也弱收敛于 y_0'，即

$$A x_{n_{k_i}} \xrightarrow{弱} y_0'. \qquad (10\cdot1\cdot4)$$

但另一方面，由于 $x_{n_k i} \xrightarrow{\text{弱}} x_0$，故对任一 $\varphi \in \mathsf{E}_2{}^*$，有

$$\varphi(Ax_{nki}) = A^*\varphi(x_{nki}) \to A^*\varphi(x_0) = \varphi(Ax_0),$$

即

$$Ax_{nki} \xrightarrow{\text{弱}} Ax_0 = y_0, \qquad (10\cdot1\cdot5)$$

于是，由(10・1・4)、(10・1・5)得 $y_0 = y_0'$，此与(10・1・3)矛盾. ▌

注　由上证明过程还可见，线性连续算子把弱收敛列变成弱收敛列. 由此也可看出，全连续性这个性质确比连续性强.

引理1　设 E 为赋范线性空间，$\varphi, \varphi_n \in \mathsf{E}^*$，$\{\|\varphi_n\|\}$ 有界，x，$x_n \in \mathsf{E}$，若 $\varphi_n \xrightarrow{\text{弱}^*} \varphi$，$x_n \to x$，则

$$\lim_{n\to\infty} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| = 0. \qquad (10\cdot1\cdot6)$$

证明　由假定 $\{\|\varphi_n\|\}$ 有界，设 $\|\varphi_n\| \leqslant M$，则

$$\begin{aligned}
|\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &\leqslant |\varphi_n(x_n) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \\
&\leqslant \|\varphi_n\| \, \|x_n - x\| + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \\
&\leqslant M\|x_n - x\| + |\varphi_n(x) - \varphi(x)| \to 0 \quad (\text{当 } n \to \infty). \ ▌
\end{aligned}$$

定理4　设 E_1，E_2 为赋范线性空间，则全连续线性算子 $A:\mathsf{E}_1 \to \mathsf{E}_2$ 的共轭线性算子 $A^*:\mathsf{E}_2{}^* \to \mathsf{E}_1{}^*$ 也是全连续线性算子.

证明　显然，我们只需证明，对 $\mathsf{E}_2{}^*$ 中任一有界序列 $\{\varphi_n\}$，必存在一个子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 使得 $\{A^*\varphi_{n_k}\}$ 强收敛于 $\mathsf{E}_1{}^*$ 中某元素 f.

由定理2，$G = A(\mathsf{E}_1)$ 是可分的，设 T 为 G 的一个可数稠集. 用对角线法，可选取 $\{\varphi_n\}$ 的一个子列 $\{\varphi_{n_k}\}$ 使对一切 $y \in T$，数列 $\{\varphi_{n_k}(y)\}$ 都收敛. 由 §8・3 定理2(注意，在充分性的证明过程中，并不要求 E_1 是 Banach 空间)，对一切 $y \in \overline{T} = \overline{G}$，$\{\varphi_{n_k}(y)\}$ 都收敛. 这意味着，$\varphi_{n_k}|_{\overline{G}}$ 弱*收敛于 G^* 中某元 φ_0. 依 Hahn－Banach 定理，φ_0 可保范地延拓到全 E_2，记作 φ. 设

$$f = A^*\varphi, \qquad (10\cdot1\cdot7)$$

则对任一 $x \in \mathrm{E}_1$ 有

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_{n_k}(Ax) = \varphi_0(Ax) = \varphi(Ax) = f(x). \tag{10·1·8}$$

下面,我们证明

$$\lim_{k\to\infty}\| A^*\varphi_{n_k} - f\| = 0. \tag{10·1·9}$$

事实上,若(10·1·9)不成立,则必存在 $\eta > 0$ 及$\{\varphi_{n_k}\}$的一个子列$\{\varphi_{n_{k_i}}\}$使得

$$\| A^*\varphi_{n_{k_i}} - f\| \geqslant \eta, \quad i = 1,2,3,\cdots \tag{10·1·10}$$

于是,对每一 i,存在 $x_i \in \mathrm{E}_1$, $\| x_i \| = 1$,使

$$|A^*\varphi_{n_{k_i}}(x_i) - f(x_i)| > \frac{1}{2}\eta, \tag{10·1·11}$$

即

$$|\varphi_{n_{k_i}}(Ax_i) - \varphi(Ax_i)| > \frac{1}{2}\eta. \tag{10·1·12}$$

为书写方便,记 $\tilde{\varphi}_i = \varphi_{n_{k_i}}|_{\overline{G}}$,此时,(10·1·12)成为:

$$|\tilde{\varphi}_i(Ax_i) - \varphi_0(Ax_i)| > \frac{1}{2}\eta. \tag{10·1·13}$$

由于$\{x_i\}$有界,故$\{Ax_i\}$有收敛子列$\{Ax_{i_m}\}$,设 $Ax_{i_m} \to y^* \in \overline{G}$,再注意到 $\tilde{\varphi}_i \xrightarrow{\text{弱}^*} \varphi_0 \in \overline{G}^*$,$\{\|\tilde{\varphi}_i\|\}$有界,则由引理1得

$$|\tilde{\varphi}_{i_m}(Ax_{i_m}) - \varphi_0(y^*)| \to 0, \quad 当\ m \to \infty. \tag{10·1·14}$$

但另一方面,利用(10·1·13),

$$\begin{aligned}
&|\tilde{\varphi}_{i_m}(Ax_{i_m}) - \varphi_0(y^*)| \\
\geqslant &|\tilde{\varphi}_{i_m}(Ax_{i_m}) - \varphi_0(Ax_{i_m})| - |\varphi_0(Ax_{i_m}) - \varphi_0(y^*)| \\
> &\frac{1}{2}\eta - \|\varphi_0\|\,\|Ax_{i_m} - y^*\|.
\end{aligned}$$

注意到 $\| Ax_{i_m} - y^* \| \to 0$,即知上式与(10・1・14)矛盾.因此(10・1・9)成立. ▌

§10・2 全连续线性算子方程的 Riesz—schauder 理论

在实 $L^2[a,b]$ 中考察 Fredholm 积分方程

$$x(t) - \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s = y(t) \qquad (10 \cdot 2 \cdot 1)$$

及其共轭方程

$$\varphi(t) - \int_a^b k(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s = f(t). \qquad (10 \cdot 2 \cdot 2)$$

其中假定实积分核 $k(t,s) \in L^2[a,b;a,b]$. 著名的 Fredholm 三定理如下所述:

Fredholm 第一定理 或是(i):对任何 $y(t) \in L^2[a,b]$,在 $L^2[a,b]$ 中方程(10・2・1)都有唯一的解 $x(t)$,

或是(ii):(10・2・1)所对应的齐次方程

$$x(t) - \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s = 0 \qquad (10 \cdot 2 \cdot 3)$$

在 $L^2[a,b]$ 中有非零解;二者必居其一且只居其一.

Fredholm 第二定理 (i) 如果(10・2・1)对任何 $y(t) \in L^2[a,b]$ 在 $L^2[a,b]$ 中都有唯一的解 $x(t)$,那么,对于任何 $f(t) \in L^2[a,b]$,方程(10・2・2)在 $L^2[a,b]$ 中也必有唯一解 $\varphi(t)$;反过来也成立.

(ii) 齐次方程(10・2・3)与其共轭齐次方程

$$\varphi(t) - \int_a^b k(s,t)\varphi(s)\mathrm{d}s = 0 \qquad (10 \cdot 2 \cdot 4)$$

都只有有限个线性无关的解,而且它们线性无关解的个数相同.

Fredholm 第三定理 如果齐次方程(10・2・5)有非零解,那么非齐次方程(10・2・1)($y(t)$ 固定)有解的充分必要条件是:对于共轭齐次方程(10・2・4)的任何解 $\varphi(t)$,$y(t)$ 都满足

$$\int_a^b \varphi(t)y(t)\mathrm{d}t = 0. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 5)$$

同样,方程(10・2・2)有解的充分必要条件是:对方程(10・2・3)的任何解 $x(t)$,$f(t)$ 都满足

$$\int_a^b x(t)f(t)\mathrm{d}t = 0. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 6)$$

注 当 $k(t,s) \in C[a,b;a,b]$ 时,把 $L^2[a,b]$ 换为 $C[a,b]$,上述三个定理仍然成立.

上述三个定理是 Fredholm 在本世纪初就连续核建立的.后来 Carleman 证明了对于平方可积核上述三个定理仍然成立.本世纪 30 年代,Riesz 与 Schauder 又把这些定理推广到一般的全连续算子方程.近来,人们又把此理论推广到各种线性拓扑空间中去.下面,我们介绍 Banach 空间中全连续线性算子方程的 Riesz－Schauder 理论.

下面,假设 E 是 Banach 空间,A:E → E 为全连续线性算子.

考察算子方程

$$x - Ax = y, \qquad (10 \cdot 2 \cdot 7)$$

及其共轭算子方程

$$\varphi - A^* \varphi = f. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 8)$$

我们有下面三个定理:

定理 1 或是(i):对任何 $y \in$ E,非齐次方程(10・2・7)在 E 中都具有唯一的解 x,或是(ii):对应的齐次方程

$$x - Ax = 0 \qquad (10 \cdot 2 \cdot 9)$$

在 E 中有非零解;二者必居其一且仅居其一.

定理 2 (i)如果方程(10・2・7)对任何 $y \in$ E 在 E 中都具有

唯一解 x，那么对任一 $f \in \mathsf{E}^*$ 方程(10・2・8)在 E^* 中也必具有唯一的解 φ，反过来也成立.

(ii) 齐次方程(10・2・9)与其共轭方程

$$\varphi - A^* \varphi = 0 \qquad (10 \cdot 2 \cdot 10)$$

都只具有有限个线性无关的解，并且它们线性无关的解的个数相同.

定理 3　如果齐次方程(10・2・9)在 E 中有非零解，那么，非齐次方程(10・2・7)(对固定的 $y \in \mathsf{E}$)在 E 中有解的充分必要条件是：对于方程(10・2・10)的任何解 φ 都有

$$\varphi(y) = 0. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 11)$$

同样，方程(10・2・8)(对于固定的 $f \in \mathsf{E}^*$)在 E^* 中有解的充分必要条件是：对于方程(10・2・9)的任何解 x 都有

$$f(x) = 0. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 12)$$

注　我们注意到，当 $\mathsf{E} = L^2[a,b]$，A 表具实平方可积核 $k(t,s)$ 的线性积分算子

$$Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s$$

时，上述三个定理就变成前面所列的 Fredholm 三个定理.

我们通过证明一些引理，逐步实现上述三个定理的证明.

引理 1　如果对任何 $y \in \mathsf{E}$，方程(10・2・7)在 E 中都有解，那么方程(10・2・9)在 E 中只有零解.

证明　记 $T = I - A$，其中 I 表不变算子. 假定(10・2・9)在 E 中有非零解 x_1，即 $x_1 \neq 0$ 满足

$$Tx_1 = x_1 - Ax_1 = 0.$$

令

$$\mathsf{E}_n = \{x \mid x \in \mathsf{E}, T^n x = 0\}, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

显然 E_n 是 E 的闭子空间且

$$\mathsf{E}_1 \subset \mathsf{E}_2 \subset \cdots \subset \mathsf{E}_{n-1} \subset \mathsf{E}_n \subset \cdots$$

由假设,(10・2・7) 对任何 $y \in \mathsf{E}$ 都有解,故必存在一点列 $\{x_n\}_2^\infty \subset \mathsf{E}$,使

$$Tx_2 = x_1, Tx_3 = x_2, \cdots, Tx_n = x_{n-1}, \cdots$$

于是对所有 $n = 2,3,\cdots$

$$T^n x_n = T^{n-1} x_{n-1} = \cdots = T_1 x_1 = 0,$$

$$T^{n-1} x_n = x_1,$$

即 $x_n \in \mathsf{E}_n, x_n \overline{\in} \mathsf{E}_{n-1}$. 由此可知 E_{n-1} 是 E_n 的真子空间. 于是根据 Riesz 引理,存在 $y_n \in \mathsf{E}_n$, $\| y_n \| = 1$,使

$$\rho(y_n, \mathsf{E}_{n-1}) \geqslant \frac{1}{2}, \quad (n = 2,3,\cdots).$$

由于当 $n > m$ 时,$y_m + Ty_n - Ty_m \in \mathsf{E}_{n-1}$,故

$$\| Ay_n - Ay_m \| = \| y_n - (y_m + Ty_n - Ty_m) \| \geqslant \frac{1}{2}.$$

因此 $\{Ay_n\}$ 不含收敛子列,此与 A 的全连续性矛盾. ▌

系 1 如果对任何 $y \in \mathsf{E}$ 方程(10・2・7) 在 E 中都有解,那么它的解必唯一.

证明 设 x_1, x_2 是方程(10・2・7) 的解,则 $\tilde{x} = x_1 - x_2$ 就是方程(10・2・9) 的解,由定理 1,(10・2・9) 只有零解,故 $\tilde{x} = 0$,即 $x_1 = x_2$. ▌

系 2 如果对任何 $f \in \mathsf{E}^*$,方程(10・2・8) 在 E^* 中都有解,那么,它的解必唯一;并且,此时方程(10・2・10) 在 E^* 中只有零解.

证明 对 A^* 应用引理 1 及其系 1 即得. ▌

引理 2 $T = I - A$ 的值域 $\mathsf{G} = T(\mathsf{E})$ 是 E 的闭子空间,从而 G 按 E 中范数也成一 Banach 空间.

证明 显然,我们只需证明 G 是 E 中闭集.

设 $y_n = Tx_n \to y_0$,我们要证存在 $x_0 \in \mathsf{E}$,使 $y_0 = Tx_0$. 令

$$\mathsf{N} = \{x \mid x \in \mathsf{E}, Tx = 0\},$$

则 N 是 E 的一个闭线性子空间. 然后令

$$\alpha_n = \rho(x_n, \mathrm{N}),$$

如果 α_n 中有无穷多个数等于 0，那么 $\{x_n\}$ 中就相应地有一子列 $\{x_{n_k}\} \subset \mathrm{N}$. 从而

$$y_{n_k} = 0, k = 1,2,\cdots$$

因此 $y_0 = 0$，此时只需取 $x_0 = 0$. 于是不失一般性，可设 $\alpha_n > 0$. 于是存在 $w_n \in \mathrm{N}$，使

$$\alpha_n \leqslant \| x_n - w_n \| \leqslant \left(1 + \frac{1}{2}\right)\alpha_n, \quad (n = 1,2,\cdots). \tag{10·2·13}$$

首先，我们证明 $\{\alpha_n\}$ 有界. 如果不然，则有 $\{\alpha_n\}$ 的一个子列

$$\alpha_{n_k} \to \infty \quad (\text{当 } k \to \infty),$$

令 $z_{nk} = \dfrac{x_{nk} - w_{nk}}{\| x_{nk} - w_{nk} \|}$，则 $\| z_{nk} \| = 1$，且

$$Tz_{nk} = \frac{Tx_{nk}}{\| x_{nk} - w_{nk} \|} = \frac{y_{nk}}{\| x_{nk} - w_{nk} \|},$$

由 $y_{n_k} \to y_0$，得 $Tz_{nk} \to 0$.

然后，由 A 全连续及 $\{z_{nk}\}$ 有界，可知存在一个子列 $\{z_{n_{k_i}}\}$ 使

$$Az_{nki} \to z_0 \in \mathrm{E},$$

从而

$$z_{nki} = Tz_{nki} + Az_{nki} \to z_0.$$

于是 $Tz_0 = \lim\limits_{k\to\infty} Tz_{nki} = 0$，故 $z_0 \in \mathrm{N}$. 令 $u_{nk} = z_{nk} - z_0$，则

$$u_{nki} \to 0 \quad (\text{当 } i \to \infty). \tag{10·2·14}$$

另一方面，由于

$$\begin{aligned} & x_{nk} - w_{nk} - \| x_{nk} - w_{nk} \| z_0 = \| x_{nk} - w_{nk} \| (z_{nk} - z_0) \\ & = \| x_{nk} - w_{nk} \| u_{nk} \end{aligned}$$

及 $w_{nk} + \| x_{nk} - w_{nk} \| z_0 \in \mathrm{N}$,　$\rho(x_n, \mathrm{N}) = \alpha_n$，即知

$$\begin{aligned} \alpha_{nk} & \leqslant \| x_{nk} - w_{nk} - \| x_{nk} - w_{nk} \| z_0 \| \\ & = \| x_{nk} - w_{nk} \| \| u_{nk} \| \leqslant \frac{3}{2}\alpha_{nk} \| u_{nk} \|. \end{aligned}$$

因此得出 $\| u_{nk} \| \geqslant \frac{2}{3}$,此与(10·2·14)矛盾.故$\{\alpha_n\}$有界.

令$\tilde{x}_n = x_n - w_n$,由(10·2·13)即知$\{\tilde{x}_n\}$有界,且$T\tilde{x}_n = y_n$.由A全连续,可取$\{\tilde{x}_n\}$的一个子列$\{\tilde{x}_{nk}\}$使$\{A\tilde{x}_{n_k}\}$收敛于某$y^*\in$ E.于是

$$\tilde{x}_{nk} = T\tilde{x}_{nk} + A\tilde{x}_{nk} \to y_0 + y^* \in \mathrm{E},$$

令$x_0 = y_0 + y^*$,即得

$$Tx_0 = \lim_{k\to\infty} T\tilde{x}_{nk} = \lim_{k\to\infty} y_{nk} = y_0,$$

故$y_0 \in$ G. ▌

系 3 存在常数$M>0$,使对每一$y\in T(\mathrm{E})$,存在$x\in$ E,使$Tx = y$;且

$$\| x \| \leqslant M \| y \|. \qquad (10·2·15)$$

证明 由引理2,G$=T(\mathrm{E})$是一Banach空间,把T看作是E到G的算子,然后根据§8·4定理1,即知(10·2·15)成立. ▌

引理 3 对固定的$y\in$ E,(10·2·7)有解的充分必要条件是:对(10·2·10)的任何解$\varphi\in \mathrm{E}^*$,都有$\varphi(y)=0$.

证明 必要性.设(10·2·7)有解x,φ为(10·2·10)的任一解,则

$$\begin{aligned}\varphi(y) &= \varphi(x - Ax) = \varphi(x) - \varphi(Ax)\\ &= \varphi(x) - A^*\varphi(x) = (\varphi - A^*\varphi)(x) = 0.\end{aligned}$$

充分性.设对某$y\in$ E,方程(10·2·7)无解,即$y\overline{\in} T(\mathrm{E}) =$ G,由引理2,G是E的闭子空间,从而$\rho(y,\mathrm{G}) = d > 0$,根据Hahn-Banach定理的系,存在$\varphi\in \mathrm{E}^*$,使

$$\varphi(y) = 1, \varphi(z) = 0, \quad (\forall z \in \mathrm{G}),$$

于是,对一切$x\in$ E,都有$\varphi(Tx) = 0$,即:

$$\begin{aligned}0 &= \varphi(x - Ax) = \varphi(x) - \varphi(Ax)\\ &= \varphi(x) - A^*\varphi(x) = (\varphi - A^*\varphi)(x).\end{aligned}$$

由$x\in$ E之任意性,即知$\varphi - A^*\varphi = 0$,即φ是方程(10·2·10)的

解，但 $\varphi(y)=1\neq 0$. ▌

引理 4　对固定的 $f\in \mathrm{E}^*$，方程(10·2·8)有解的充分必要条件是：对方程(10·2·9)的任何解 x，都有 $f(x)=0$.

证明　必要性. 设(10·2·8)有解 φ，则对(10·2·9)的任一解 x，有

$$f(x)=(\varphi-A^*\varphi)(x)=\varphi(x)-A^*\varphi(x)$$
$$=\varphi(x)-\varphi(Ax)=\varphi(x-Ax)=\varphi(0)=0.$$

充分性. 设对(10·2·9)的任何解 x，f 都满足 $f(x)=0$. 我们在子空间 $\mathrm{G}=T(\mathrm{E})$ 上定义一个泛函 φ：

$$\varphi(y)=f(x)\quad \forall\, y=Tx, x\in \mathrm{E},\qquad (10\cdot 2\cdot 16)$$

则 $\varphi(y)$ 的值与 x 的选取无关.

事实上，若 $Tx_1=Tx_2=y$，则 $T(x_1-x_2)=0$，即 x_1-x_2 是(10·2·9)的解，故 $f(x_1-x_2)=0$，即 $f(x_1)=f(x_2)$.

φ 显然是线性的. 再根据系 3，存在 $M>0$，对每一 $y\in \mathrm{G}$，存在 $x\in \mathrm{E}$，使

$$Tx=y\quad 且\ \|x\|\leqslant M\|y\|.$$

于是

$$|\varphi(y)|=|f(x)|\leqslant \|f\|\,\|x\|\leqslant M\|f\|\,\|y\|,$$

故 φ 是 G 上的有界线性泛函. 根据 Hahn－Banach 定理，可将 φ 保范地延拓到整个 E 上，延拓后的泛函仍记作 φ，于是 $\varphi\in \mathrm{E}^*$，且对任何 $x\in \mathrm{E}$ 有

$$(\varphi-A^*\varphi)(x)=\varphi(x)-\varphi(Ax)=\varphi(Tx)=f(x),$$

因 x 是任意的，故 $\varphi-A^*\varphi=f$. 即(10·2·8)有解 φ. ▌

定理 1 的证明　1°. 设(10·2·9)在 E 中无非零解，即(10·2·9)只有零解 0. 于是由引理 4，对任何 $f\in \mathrm{E}$，方程(10·2·8)在 E^* 中都有解，再由系 2，方程(10·2·10)只有零解 0. 然后由引理 3，对任何 $y\in \mathrm{E}$ 方程(10·2·7)在 E 中有解，此时解显然唯一.

2°. 设对任何 $y\in \mathrm{E}$，方程(10·2·7)在 E 中都有解，则由引理

1,方程(10·2·9)只有零解. ▌

定理 3 的证明 由引理 3、4 直接得. ▌

定理 2(i) 的证明 设对任何 $y \in \mathsf{E}$,方程(10·2·7)在 E 中都具有唯一解,那么,由引理 1,方程(10·2·9)只有零解 0,从而对任一 $f \in \mathsf{E}^*$,由引理 4,方程(10·2·8)都有解,由系 2,解必唯一.

反之,设方程(10·2·8)对任何 $f \in \mathsf{E}^*$ 有唯一解,由系 2,方程(10·2·10)在 E^* 中只有零解,然后根据引理 3,对任意的 $y \in \mathsf{E}$,方程(10·2·7)有解,再由系 1,解必唯一. ▌

定理 2 的(ii) 证明由下述诸引理来完成.

引理 5 设 $A:\mathsf{E} \to \mathsf{E}$ 为全连续线性算子,则

$$\mathsf{N} = \{x \mid x \in \mathsf{E}, Ax = x\}$$

是 E 的一个有限维子空间.

证明 N 显然是 E 的闭子空间,为证 N 是有限维的,只需证明 N 的任一有界集是列紧集.

事实上,设 $M \subset \mathsf{N}$ 为一有界集,则对任一 $x \in M, Ax = x$,故 $M = A(M)$,由于全连续算子把有界集映成列紧集,故 $M = A(M)$ 为一列紧集,从而 N 是有限维的. ▌

引理 6 设 $\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathsf{E}^*$,$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 线性无关,如果从

$$x \in \mathsf{E}, \varphi_1(x) = \cdots = \varphi_n(x) = 0$$

可推出 $\varphi(x) = 0$,则 φ 必为 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 的线性组合.

证明 用归纳法证明,当 $n = 1$ 时,$\varphi_1 \neq 0$,故存在 $x_0 \in \mathsf{E}$,使 $\varphi_1(x_0) \neq 0$,对任一 $x \in \mathsf{E}$,令

$$x_1 = x - \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(x_0)} x_0,$$

则

$$x_1 \in \mathsf{E}, \quad \varphi_1(x_1) = 0,$$

从而按假设有 $\varphi(x_1) = 0$,即

$$\varphi(x)=\frac{\varphi(x_0)}{\varphi_1(x_0)}\varphi_1(x).$$

令 $\alpha=\dfrac{\varphi(x_0)}{\varphi_1(x_0)}$，由 x 之任意性，即知 $\varphi=\alpha\varphi_1$.

设结论当 n 时成立，我们来证对 $n+1$ 结论也成立. 设 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n,\varphi_{n+1}$ 线性无关，按归纳法假设，必存在一 x_{n+1}，使

$$\varphi_1(x_{n+1})=\cdots=\varphi_n(x_{n+1})=0 \text{ 但 } \varphi_{n+1}(x_{n+1})\neq 0.$$

令

$$\tilde{\varphi}=\varphi-\frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi_{n+1}(x_{n+1})}\varphi_{n+1},$$

则 $\tilde{\varphi}$ 是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合.

事实上，设 $x\in \mathrm{E}$，$\varphi_1(x)=\cdots=\varphi_n(x)=0$，

令
$$\tilde{x}=x-\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_{n+1}(x_{n+1})}x_{n+1},$$

则

$$\varphi_i(\tilde{x})=\varphi_i(x)-\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_{n+1}(x_{n+1})}\varphi_i(x_{n+1})=0\quad(i=1,\cdots,n),$$

$$\varphi_{n+1}(\tilde{x})=\varphi_{n+1}(x)-\varphi_{n+1}(x)=0,$$

从而依假定必有 $\varphi(\tilde{x})=0$，即

$$\varphi(x)-\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_{n+1}(x_{n+1})}\varphi(x_{n+1})=0,$$

亦即

$$\left(\varphi-\frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi_{n+1}(x_{n+1})}\varphi_{n+1}\right)(x)=\tilde{\varphi}(x)=0.$$

这样，我们从 $x\in \mathrm{E}$，$\varphi_1(x)=\cdots=\varphi_n(x)=0$ 推出 $\tilde{\varphi}(x)=0$，故 $\tilde{\varphi}$ 是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 的线性组合，即

$$\varphi-\frac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi_{n+1}(x_{n+1})}\varphi_{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i,$$

令 $\alpha_{n+1}=\dfrac{\varphi(x_{n+1})}{\varphi_{n+1}(x_{n+1})}$，即得

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \varphi_i. \blacksquare$$

系 4 设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in \mathsf{E}^*$，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 线性无关，必有 $x_1, \cdots, x_n \in \mathsf{E}$，使

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{当 } i = j; \\ 0, & \text{当 } i \neq j. \end{cases}$$

引理 7 令

$\mathsf{N} = \{x \mid x \in \mathsf{E}, Ax = x\}$，$\mathsf{N}^* = \{\varphi \mid \varphi \in \mathsf{E}^*, A^*\varphi = \varphi\}$，则 N 的维数与 N^* 的维数相同.

证明 由引理 6，N 与 N^* 都是有限维的，设 N 的维数为 n，N^* 的维数为 n^*，由定理 1 及定理 2 的(i)，若 n, n^* 中有一个为 0，则另一个也必为 0，此时引理 7 的结论显然成立. 下面，我们设

$$n \geqslant 1, \quad n^* \geqslant 1, \quad r = \min\{n, n^*\}.$$

设 $x_1, \cdots, x_n$ 为 N 的一个基，则根据 Hahn—Banach 定理，存在 $\psi_1, \cdots, \psi_n \in \mathsf{E}^*$，满足

$$\psi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \cdots, n). \qquad (10 \cdot 2 \cdot 17)$$

再设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_{n^*}$ 为 N^* 的一个基，由系 4，存在 $z_1, \cdots, z_{n^*} \in \mathsf{E}$，满足

$$\varphi_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \cdots, n^*). \qquad (10 \cdot 2 \cdot 18)$$

现在，我们考察线性算子 B：

$$Bx = Ax + \sum_{i=1}^{r} \psi_i(x) z_i, \quad \forall x \in \mathsf{E} \qquad (10 \cdot 2 \cdot 19)$$

及其共轭线性算子 B^*：

$$B^*\varphi = A^*\varphi + \sum_{i=1}^{r} \varphi(z_i)\psi_i, \quad \forall \varphi \in \mathsf{E}^*.$$

$$(10 \cdot 2 \cdot 20)$$

显然，B, B^* 都是全连续的.

1°. 证明 $n^* = r$. 否则，$n^* > r = n$，此时，我们首先证明 $x - Bx = 0$ 只有零解，即

$$x \in \mathrm{E}, x = Bx \Rightarrow x = 0. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 21)$$

事实上，设 $x_0 \in \mathrm{E}, x_0 = Bx_0$，即

$$x_0 = Ax_0 + \sum_{i=1}^{r} \psi_i(x_0) z_i, \qquad (10 \cdot 2 \cdot 22)$$

注意到$(10 \cdot 2 \cdot 18)$，对每一 $\varphi_j (j = 1, \cdots, r = n)$

$$\begin{aligned} \varphi_j(x_0) &= \varphi_j(Ax_0) + \sum_{i=1}^{r} \psi_i(x_0) \varphi_j(z_i) \\ &= A^* \varphi_j(x_0) + \psi_j(x_0) \varphi_j(z_j) \\ &= \varphi_j(x_0) + \psi_j(x_0), \end{aligned}$$

因此

$$\psi_j(x_0) = 0, \quad (j = 1, \cdots, r = n). \qquad (10 \cdot 2 \cdot 23)$$

代入$(10 \cdot 2 \cdot 22)$，即得 $x_0 = Ax_0$，故 $x_0 \in \mathrm{N}$，可设 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.
利用$(10 \cdot 2 \cdot 23)$ 即得：

$$0 = \psi_j(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \psi_j(x_i) = \alpha_j,$$

从而 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$. 即$(10 \cdot 2 \cdot 21)$ 获证.

利用定理 1，对任一 $y \in \mathrm{E}$，方程 $x - Bx = y$ 在 E 中有唯一解，取 $x^* \in \mathrm{E}$ 使 $x^* - Bx^* = z_{n+1}$，由$(10 \cdot 2 \cdot 18)$

$$\varphi_{n+1}(z_{n+1}) = 1, \qquad (10 \cdot 2 \cdot 24)$$

但

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(z_{n+1}) &= \varphi_{n+1}(x^* - Bx^*) = \varphi_{n+1}(x^*) - \varphi_{n+1}(Bx^*) \\ &= \varphi_{n+1}(x^*) - \varphi_{n+1}(Ax^*) - \sum_{i=1}^{r} \psi_i(x^*) \varphi_{n+1}(z_i) \\ &= \varphi_{n+1}(x^* - Ax^*) = (\varphi_{n+1} - A^* \varphi_{n+1})(x^*) = 0, \end{aligned}$$

此与$(10 \cdot 2 \cdot 24)$ 矛盾. 因此，$n^* \leqslant r$.

2. 证明 $n = r$，否则，$n > r = n^*$. 此时，我们首先证明

$\varphi - B^* \varphi = 0$ 只有零解. 即

$$\varphi \in \mathsf{E}^*, \varphi = B^* \varphi \Rightarrow \varphi = 0. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 25)$$

事实上,设 $\varphi_0 \in \mathsf{E}$,$\varphi_0 = B^* \varphi_0$,即

$$\varphi_0 = A^* \varphi_0 + \sum_{i=1}^{r} \varphi_0(z_i)\psi_i. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 26)$$

注意到(10・2・17),对每一 $x_j (j = 1, \cdots, n^* = r)$

$$\begin{aligned} \varphi_0(x_j) &= A^* \varphi_0(x_j) + \sum_{i=1}^{r} \varphi_0(z_i)\psi_i(x_j) \\ &= \varphi_0(Ax_j) + \varphi_0(z_j)\psi_j(x_i) \\ &= \varphi_0(x_j) + \varphi_0(z_j), \end{aligned}$$

故得

$$\varphi_0(z_j) = 0, \quad j = 1, \cdots, n^*. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 27)$$

代入(10・2・26)得

$$\varphi_0 = A^* \varphi_0. \qquad (10 \cdot 2 \cdot 28)$$

因此 $\varphi_0 \in \mathsf{N}^*$,可设 $\varphi_0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varphi_i$,再注意到(10・2・27)及(10・2・18),

$$0 = \varphi_0(z_j) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varphi_i(z_j) = \alpha_j, \quad j = 1, \cdots, r = n^*.$$

因此,$\varphi_0 = 0$,即(10・2・25)得证.

应用定理 1 于 B^* 即知存在 $\tilde{\varphi} \in \mathsf{E}^*$,使 $\tilde{\varphi} - B^* \tilde{\varphi} = \psi_{r+1}$,于是由(10・2・17)及(10・2・20)得

$$\begin{aligned} 1 = \psi_{r+1}(x_{r+1}) &= \tilde{\varphi}(x_{r+1}) - B^* \tilde{\varphi}(x_{r+1}) \\ &= \tilde{\varphi}(x_{r+1}) - A^* \tilde{\varphi}(x_{r+1}) - \sum_{i=1}^{r} \tilde{\varphi}(z_i)\psi_i(x_{r+1}) \\ &= \tilde{\varphi}(x_{r+1}) - \tilde{\varphi}(Ax_{r+1}) = \tilde{\varphi}(x_{r+1}) - \tilde{\varphi}(x_{r+1}) = 0. \end{aligned}$$

此矛盾说明 $n = r$.

由 1°,2° 即得 $n = n^* = r$. ▌

由引理 5,7 即得定理 2 的(ii).

注　定理 1(通常称之为二择一定理)的优点在于,存在性是唯一性的必然结果.这对于许多问题来说,是方便的.

§10·3　全连续线性算子的谱

定义 1　设 E 是 Banach 空间,A:E→E 为有界线性算子,令 $A_\lambda = A-\lambda I$,其中 $\lambda \in K$. 如果 $(A-\lambda I)^{-1}$ 存在且是定义在整个 E 上的有界线性算子,则称 λ 是 A 的**正则值(正则点)**;正则值的全体称为 A 的**正则集**,记为 $\rho(A)$;$R_\lambda = A_\lambda^{-1}(\lambda \in \rho(A))$ 称为算子 A 的**预解式**.不是 A 的正则值的 λ 称为 A 的**谱点**;A 的谱点的全体称为 A 的**谱集**(简称作谱),记为 $\sigma(A)$.如果方程

$$Ax-\lambda x=0 \tag{10·3·1}$$

有非零解,则称 λ 为 A 的**特征值(固有值)**,而(10·3·1)的非零解称为 A 的对应于特征值 λ 的**特征元(特征向量或固有元)**.显然,如果 λ 是 A 的特征值,$A-\lambda I$ 就不可能有逆算子.所以特征值 λ 必是谱点.A 的特征值的全体称为 A 的**点谱**.

由 §8·4 的逆算子定理,易证 λ 是 A 的正则值的充分必要条件是 $A-\lambda I$ 将 Banach 空间 E 一一对应地映成 E.

设 E 是 Banach 空间,A:E→E 是全连续线性算子.用 $\frac{1}{\lambda}A$ 代替 A 进行讨论,根据上一节的理论,易得下面的三个定理.

定理 1　全连续线性算子 A 的非零谱点全是特征值.

定理 2　全连续线性算子 A 与它的共轭算子 A^* 有相同的谱.

定理 3　如果 $\lambda \neq 0$ 是全连续线性算子 A 的特征值,则 λ 也是 A^* 的特征值,且 A 的对应于 λ 的特征子空间(即由 A 的对应于 λ 的特征向量所张成的子空间)与 A^* 的对应于 λ 的特征子空间都是有限维的,它们的维数相等.

下面再介绍一个关于全连续线性算子谱的定理.

引理 1 设 $A:\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ 是有界线性算子,则 A 的对应于不同特征值的特征向量线性无关.

证明 设 $x_i\neq 0(i=1,2)$ 是 A 的对应于 $\lambda_i(i=1,2)$ 的特征向量,且 $\lambda_1\neq\lambda_2$. 设

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2=0, \tag{10·3·2}$$

则

$$A(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)=0,$$

即

$$\alpha_1\lambda_1 x_1+\alpha_2\lambda_2 x_2=0, \tag{10·3·3}$$

用 λ_1 乘(10·3·2) 两边再与(10·3·3) 相减即得

$$\alpha_2(\lambda_1-\lambda_2)x_2=0,$$

因$(\lambda_1-\lambda_2)x_2\neq 0$,所以 $\alpha_2=0$;同理可证 $\alpha_1=0$. 所以 x_1 与 x_2 线性无关.

现在设结论对 $n(\geqslant 2)$ 个对应于不同特征值的特征向量成立. 设 $x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 是分别对应于不同特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1}$ 的$n+1$ 个特征向量,设

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i+\alpha_{n+1}x_{n+1}=0, \tag{10·3·4}$$

以 A 作用(10·3·4) 两边即得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\lambda_i x_i+\alpha_{n+1}\lambda_{n+1}x_{n+1}=0, \tag{10·3·5}$$

用 λ_{n+1} 乘(10·3·4) 两边再与(10·3·5) 相减得

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(\lambda_i-\lambda_{n+1})x_i=0,$$

由归纳法假定,$x_1,\cdots,x_n$ 线性无关,所以

$$\alpha_i(\lambda_i-\lambda_{n+1})=0\quad(i=1,\cdots,n),$$

但 $\lambda_i-\lambda_{n+1}\neq 0$,因此 $\alpha_i=0(i=1,\cdots,n)$,代回(10·3·4) 又得

$\alpha_{n+1}=0$，所以 $x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 是线性无关的. 按归纳法原理，任意有限个对应于不同特征值的特征向量线性无关. ▌

定理 4　全连续线性算子 A 的谱没有非零聚点.

证明　用反证法. 设 $\sigma(A)$ 有一非零聚点 λ，则存在 $\lambda_i\in\sigma(A)$ $(i=1,2,\cdots)$，使

$$\lambda_i\to\lambda\quad(i\to\infty),\qquad 且\ \lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j).$$

由定理 1，诸 λ_i 全是特征值，故存在 $x_i\in \mathsf{E}$，$x_i\neq 0$ 使

$$Ax_i=\lambda_i x_i\quad(i=1,2,\cdots),$$

由引理 1，$\{x_i\}$ 线性无关. 设 $x_1,\cdots,x_n$ 张成的子空间为 E_n，那么 $\mathsf{E}_n\subsetneqq\mathsf{E}_{n+1}$，依 Riesz 引理，可取 $y_n\in\mathsf{E}_n$，$\|y_n\|=1$ 使

$$\rho(y_n,\mathsf{E}_{n-1})>\frac{1}{2}\qquad(n=2,3,\cdots).$$

因为 A 全连续，$\{y_n\}$ 有界，故 $\{Ay_n\}$ 有收敛子列 $\{Ay_{n_k}\}$，再由 λ_n 收敛于 $\lambda\neq0$，可知 $\{\frac{1}{\lambda_{n_k}}Ay_{n_k}\}$ 也收敛. 另一方面，设 $y_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}x_i$，则

$$\begin{aligned}y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n&=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}x_i-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(n)}\lambda_i x_i.\\&=\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i^{(n)}-\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\alpha_i^{(n)})x_i\in\mathsf{E}_{n-1}.\end{aligned}$$

所以，当 $n>m$ 时，

$$y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n+\frac{1}{\lambda_m}Ay_m\in\mathsf{E}_{n-1}.$$

因此，

$$\left\|\frac{1}{\lambda_n}Ay_n-\frac{1}{\lambda_m}Ay_m\right\|=\left\|y_n-(y_n-\frac{1}{\lambda_n}Ay_n+\frac{1}{\lambda_m}Ay_m)\right\|\geqslant\frac{1}{2},$$

此与前面所证 $\{\frac{1}{\lambda_{n_k}}Ay_{n_k}\}$ 收敛矛盾. ▌

*§10·4 全连续线性算子的分解

在这一节中恒设 E 是 Banach 空间,$A:\mathsf{E}\to\mathsf{E}$ 是全连续线性算子,$A_\lambda = A-\lambda I$,且对 $\lambda\neq 0$,记

$$\mathsf{F}_n(\lambda)=\{x\in\mathsf{E}\,|\,A_\lambda^n x=0\}\quad n=0,1,2,\cdots$$

引理 1 设 $T:\mathsf{E}\to\mathsf{E}$ 为线性算子,令

$$\mathsf{F}_n=\{x\in\mathsf{E}\,|\,T^n x=0\}\quad n=0,1,2,\cdots\tag{10·4·1}$$

如果存在 $n_0\geqslant 0$ 使 $\mathsf{F}_{n_0+1}=\mathsf{F}_{n_0}$,则对任一 $n>n_0$ 皆有 $\mathsf{F}_n=\mathsf{F}_{n_0}$.

证明 因为当 $T^n x=0$ 时必有 $T^{n+1}x=0$,所以

$$\mathsf{F}_0\subset\mathsf{F}_1\subset\cdots\subset\mathsf{F}_n\subset\mathsf{F}_{n+1}\subset\cdots\tag{10·4·2}$$

设 $n=n_0+k$,我们对 k 用归纳法证明本引理. 当 $k=1$ 时,依假定 $\mathsf{F}_{n_0+1}=\mathsf{F}_{n_0}$. 设当 $k=m$ 时,$\mathsf{F}_{n_0+m}=\mathsf{F}_{n_0}$. 当 $k=m+1$ 时,设 $x\in\mathsf{F}_{n_0+m+1}$,则

$$T^{n_0+m}(Tx)=T^{n_0+m+1}x=0.$$

由 F_n 之定义,$Tx\in\mathsf{F}_{n_0+m}$. 而按归纳法假设,$\mathsf{F}_{n_0+m}=\mathsf{F}_{n_0}$,故 $Tx\in\mathsf{F}_{n_0}$,这意味着 $T^{n_0}(Tx)=0$,即 $T^{n_0+1}x=0$,所以 $x\in\mathsf{F}_{n_0+1}=\mathsf{F}_{n_0}$,由 $x\in\mathsf{F}_{n_0+m+1}$ 之任意性即得 $\mathsf{F}_{n_0+m+1}\subset\mathsf{F}_{n_0}$,再注意到(10·4·2)即得 $\mathsf{F}_{n_0+m+1}=\mathsf{F}_{n_0}$. 根据归纳法原理,对任一 $n>n_0$ 皆有 $\mathsf{F}_n=\mathsf{F}_{n_0}$. ▌

引理 2 $\mathsf{F}_n(\lambda)(n=0,1,\cdots)$ 是 E 的有限维子空间,且存在 $n_0\geqslant 0$,使当 $n\geqslant n_0$ 时 $\mathsf{F}_n(\lambda)=\mathsf{F}_{n_0}(\lambda)$.

证明 先证每个 $\mathsf{F}_n(\lambda)$ 是有限维的. 首先,按规定 $A_\lambda^0=I$(I 为恒等算子),故 $\mathsf{F}_0(\lambda)=\{0\}$ 是 0 维子空间. $\mathsf{F}_1(\lambda)$ 显然是有限维的. 而当 $n\geqslant 2$ 时

$$A_\lambda^n=(A-\lambda I)^n=\sum_{i=1}^n C_n^i(-\lambda)^{n-i}A^i+(-\lambda)^n I,$$

故 $\mathsf{F}_n(\lambda)$ 就是全连续算子 $\sum\limits_{i=1}^n C_n^i(-\lambda)^{n-i}A^i$ 对应于 $-(-\lambda)^n$ 的特征

子空间，由上节定理 3，$F_n(\lambda)$ 是有限维的（如果 $-(-\lambda)^i$ 不是 $\sum_{i=1}^{n} C_n^i(-\lambda)^{n-i}A^i$ 的特征值，那么 $F_n(\lambda)=\{0\}$）.

下面用反证法证明引理中所要求的 n_0 存在.

如果不存在满足引理要求的 n_0，那么根据引理 1，必有

$$F_0(\lambda) \subsetneqq F_1(\lambda) \subsetneqq F_2(\lambda) \subsetneqq \cdots \qquad (10\cdot4\cdot3)$$

于是，根据 Riesz 引理，对每一 $n \geqslant 0$，必存在 $x_{n+1} \in F_{n+1}(\lambda)$，$\|x_{n+1}\|=1$ 使 $\rho(x_{n+1}, F_n(\lambda)) \geqslant \frac{1}{2}$，而当 $n \geqslant 1$ 时，由 $F_n(\lambda)$ 的定义易知 $A_\lambda x_n \in F_{n-1}(\lambda)$，所以，当 $n > m \geqslant 1$ 时

$$\frac{1}{\lambda}A_\lambda x_m + x_m - \frac{1}{\lambda}A_\lambda x_n \in F_{n-1}(\lambda),$$

因此

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{\lambda}Ax_n - \frac{1}{\lambda}Ax_m\right\| \\ &= \left\|x_n - \left(\frac{1}{\lambda}A_\lambda x_m + x_m - \frac{1}{\lambda}A_\lambda x_n\right)\right\| \geqslant \frac{1}{2},\end{aligned}$$

从而 $\|Ax_n - Ax_m\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda| > 0$，所以 $\{Ax_n\}$ 不可能有收敛子列，此与 A 的全连续性矛盾. ▌

结合引理 1 与引理 2 即得

定理 1　对任意的 $\lambda \neq 0$，必存在自然数 γ，使当 $n > \gamma$ 时 $F_n(\lambda) = F_\gamma(\lambda)$，而当 $0 \leqslant n < \gamma$ 时 $F_n(\lambda) \subsetneqq F_{n+1}(\lambda)$.

注　由定理 1 可知，如果 $\lambda \neq 0$ 不是 A 的特征值，则对所有的自然数 n，皆有 $F_n(\lambda) = \{0\}$，因此我们感兴趣的是当 $\lambda \neq 0$ 是 A 的特征值的情形.

以下 γ 的意义皆与定理 1 同，根据引理 2，$F_\gamma(\lambda)$ 是 E 的有限维子空间，$F_\gamma(\lambda)$ 的维数 $\dim(F_\gamma(\lambda))$ 称为特征值 λ 的**代数重数**，而把 $F_1(\lambda)$ 的维数称为特征值 λ 的**几何重数**.

引理 3 设$\lambda\neq 0$是A的特征值,则$\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$是$A$的不变闭子空间,即$\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$是$\mathsf{E}$的闭子空间且对任一$x\in\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$都有$Ax\in\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$.

证明 $\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$是有限维的,故总是闭子空间.下证$\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$是$A$的不变子空间.设$x\in\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$,则

$$(A-\lambda I)^\gamma x=0,\quad (A-\lambda I)^{\gamma+1}x=0,$$

因此

$$(A-\lambda I)^\gamma Ax=(A-\lambda I)^{\gamma+1}x+\lambda(A-\lambda I)^\gamma x=0.$$

由$\mathsf{F}_n(\lambda)$的定义,$Ax\in\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$,所以$\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$是$A$的不变子空间.

注 由证明过程易知,对所有$n\geqslant 1$,$\mathsf{F}_n(\lambda)$皆为A的不变子空间.

以下恒记$\mathsf{G}(\lambda)=(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I})^\gamma(\mathsf{E})(\lambda\neq 0)$.由§10·2引理2易知$G(\lambda)$是$\mathsf{E}$的闭子空间.

引理 4 $\mathsf{G}(\lambda)$是A的不变闭子空间.

证明 设$x\in\mathsf{G}(\lambda)$,$x\neq 0$,则有$y\in\mathsf{E}$使

$$(A-\lambda I)^\gamma y=x,$$

从而

$$(A-\lambda I)^\gamma Ay=Ax,$$

即$Ax\in\mathsf{G}(\lambda)$,故$\mathsf{G}(\lambda)$是A的不变闭子空间. ▌

引理 5 $\mathsf{F}_\gamma(\lambda)\cap\mathsf{G}(\lambda)=\{0\}$.

证明 如果不然,则有

$$x\in\mathsf{F}_\gamma(\lambda)\cap\mathsf{G}(\lambda),x\neq 0.$$

由$x\in\mathsf{G}(\lambda)$,故存在$y\in\mathsf{E}$使

$$(A-\lambda I)^\gamma y=x,$$

因为$x\neq 0$,所以,$y\overline{\in}\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$.但是,$x\in\mathsf{F}_\gamma(\lambda)$,所以

$$0=(A-\lambda I)^\gamma x=(A-\lambda I)^\gamma(A-\lambda I)^\gamma y=(A-\lambda I)^{2\gamma}y,$$

从而

$$y\in\mathsf{F}_{2\gamma}(\lambda).$$

此与 $F_{2\gamma}(\lambda)=F_\gamma(\lambda)$ 矛盾. 所以 $F_\gamma(\lambda)\cap G(\lambda)=\{0\}$. ▌

定理 2　$E=F_\gamma(\lambda)\oplus G(\lambda)$. 即对任一 $x\in E$, 必可唯一地表示成

$$x=u+v,\quad u\in F_\gamma(\lambda),v\in G(\lambda).\qquad(10\cdot4\cdot4)$$

证明　记 $(A-\lambda I)^\gamma=B-\lambda' I$, 其中 $B=\sum_{i=1}^{\gamma}C_\gamma^i(-\lambda)^{\gamma-i}A^i$ 是全连续线性算子, $\lambda'=\lambda(-\lambda)^{\gamma-1}$. 根据引理 4, $G(\lambda)$ 是 A 的不变子空间, 故它也是 B 的不变子空间, 把 B 看成是映 $G(\lambda)$ 到 $G(\lambda)$ 的线性算子, 它也是全连续的. 再由引理 5, 方程

$$(B-\lambda' I)x=0$$

在 $G(\lambda)$ 中只有零解, 所以, 对任意的 $y\in G(\lambda)$, 方程

$$(B-\lambda' I)x=y$$

在 $G(\lambda)$ 中都有唯一解. 于是, 对任一 $x\in E$, 令

$$y=(A-\lambda I)^\gamma x=(B-\lambda' I)x\in G(\lambda),$$

由上面的讨论, 有唯一的 $v\in G(\lambda)$ 使得

$$(A-\lambda I)^\gamma v=(B-\lambda' I)v=y=(A-\lambda I)^\gamma x,$$

从而 $(A-\lambda I)^\gamma(x-v)=0$, 即 $x-v=u\in F_\gamma(\lambda)$. 即

$$x=u+v\quad u\in F_\gamma(\lambda)\quad v\in G(\lambda).$$

如果 $u'\in F_\gamma(\lambda)$, $v'\in G(\lambda)$ 且 $x=u'+v'$, 则

$$u+v=x=u'+v',$$

即 $u-u'=v'-v$, 但 $u-u'\in F_\gamma(\lambda)$, $v'-v\in G(\lambda)$, 由引理 5

$$u-u'=v'-v\in F_\gamma(\lambda)\cap G(\lambda)=\{0\},$$

所以 $u=u'$, $v=v'$, 即表示式 $(10\cdot4\cdot4)$ 是唯一的. ▌

注　设 $T_1=(B-\lambda' I)|_{G(\lambda)}$, 则 T_1 将 $G(\lambda)$ 一一对应地映成 $G(\lambda)$. 而 $G(\lambda)$ 是 Banach 空间 E 的闭子空间, 所以 $G(\lambda)$ 也是 Banach 空间. 由逆算子定理, $T_1^{-1}:G(\lambda)\to G(\lambda)$ 是有界线性算子. 于是, 定理 2 中的 v 可写成

$$v=T_1^{-1}(A-\lambda I)^\gamma x.\qquad(10\cdot4\cdot5)$$

利用分解式(10·4·4)可定义 E 到 E 的映射 P_1、P_2：

$$P_1x = u, \quad P_2x = v. \tag{10·4·6}$$

由(10·4·5)可知 $P_2 = T_1^{-1}(A-\lambda I)^\gamma$ 是有界线性算子，再由 $P_1 = I - P_2$ 知 P_1 也是有界线性算子. 我们称 P_1，P_2 分别为 E 到子空间 $F_\gamma(\lambda)$，$G(\lambda)$ 的投影算子. 按 P_1，P_2 的定义，显然有 $P_1^2 = P_1$，$P_2^2 = P_2$，此外还有

$$P_1A = AP_1, \quad P_2A = AP_2, \quad P_1P_2 = 0. \tag{10·4·7}$$

事实上，设 $x \in E$，令 $u = P_1x$，$v = P_2x$ 则 $x = u + v$. 故 $Ax = Au + Av$，因 $u \in F_\gamma(\lambda)$，$v \in G(\lambda)$，而 $F_\gamma(\lambda)$ 及 $G(\lambda)$ 是 A 的不变子空间，所以 $Au \in F_\gamma(\lambda)$，$Av \in G(\lambda)$，由 P_1，P_2 的定义即知

$$Au = P_1Ax, \quad Av = P_2Ax.$$

即 $AP_1x = P_1Ax$，$AP_2x = P_2Ax$. $P_1P_2 = 0$ 是显然的.

定理 3(对应于特征值 λ_0 的分解定理) 设 E 是 Banach 空间，A：$E \to E$ 为全连续线性算子，$\lambda_0 \neq 0$ 是 A 的特征值，则存在有限秩线性算子 S(即 S 的值域是有限维的)及全连续线性算子 R 使得 $A = S + R$ 且满足

(i) $SR = RS = 0$；

(ii) λ_0 是 S 的特征值，λ_0 是 R 的正则值；

(iii) 当 $\lambda \neq \lambda_0$，$\lambda \neq 0$ 时 λ 是 S 的正则值；

(iv) 设 $\lambda \neq \lambda_0$，$\lambda \neq 0$，那么，λ 为 A 的正则值的充分必要条件是 λ 为 R 的正则值.

证明 设 P_1，P_2 是 E 到子空间 $F_\gamma(\lambda_0)$ 与 $G(\lambda_0)$ 的投影算子. 令

$$S = AP_1, \quad R = AP_2$$

则 $S + R = A(P_1 + P_2) = A$. 由于 $F_\gamma(\lambda_0)$ 是有限维的且是 A 的不变子空间，所以 $S(E) \subset F_\gamma(\lambda_0)$，$S$ 是有限秩的. R 显然是全连续的. 再由(10·4·7)可得

$$SR = AP_1AP_2 = A^2P_1P_2 = 0,$$

$$RS = AP_2AP_1 = A^2P_2P_1 = 0.$$

(i) 得证.

(ii) 的证明. 先证 λ_0 是 S 的特征值, 设 $x \neq 0$ 是 A 的对应于特征值 λ_0 的一个特征向量, 即 $Ax - \lambda_0 x = 0$, 所以

$$x \in \mathsf{F}_1(\lambda_0) \subset \mathsf{F}_\gamma(\lambda_0),$$

由 P_1 的定义, $P_1x = x$, 所以 $Sx = AP_1x = Ax = \lambda_0 x$. 这说明 x 是 S 的一个对应于 λ_0 的特征向量, 所以 λ_0 是 S 的特征值. 为证 λ_0 是 R 的正则值, 根据前节定理 1, 只需证明 λ_0 不是 R 的特征值.

事实上, 如果 λ_0 是 R 的特征值, 则存在 $x \neq 0$, 使

$$Rx = AP_2x = \lambda_0 x.$$

但 $P_2x \in \mathsf{G}(\lambda_0)$, $\mathsf{G}(\lambda_0)$ 是 A 的不变子空间, 故有

$$x \in \mathsf{G}(\lambda_0), \tag{10·4·8}$$

从而 $P_2x = x$, 所以 $Ax = AP_2x = \lambda_0 x$, 这样一来,

$$x \in \mathsf{F}_1(\lambda_0) \subset \mathsf{F}_\gamma(\lambda_0),$$

注意到(10·4·8) 即得 $x \in \mathsf{F}_\gamma(\lambda_0) \cap \mathsf{G}(\lambda_0)$, 与引理 5 矛盾.

(iii) 的证明. 如果 $\lambda \overline{\in} \{\lambda_0, 0\}$ 是 S 的特征值, 则有 $x \neq 0$ 使

$$Sx = \lambda x. \quad \text{但 } Sx \in \mathsf{F}_\gamma(\lambda_0),$$

因此 $x \in \mathsf{F}_\gamma(\lambda_0)$, 从而 $P_1x = x$, 于是,

$$Ax = AP_1x = Sx = \lambda x.$$

这说明 x 是 A 的对应于 λ 的特征向量, 从而不是 A 的对应于 λ_0 的特征向量, 所以 $x \overline{\in} \mathsf{F}_1(\lambda_0)$. 但已证 $x \in \mathsf{F}_\gamma(\lambda_0)$, 故

$$(A - \lambda_0 I)^\gamma x = 0.$$

设 m_0 是使 $(A-\lambda_0 I)^m x = 0$ 的自然数 m 的最小者, 由上面的讨论, $m_0 > 1$. 记 $y = (A - \lambda_0 I)^{m_0-1}x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned}(A - \lambda I)y &= (A - \lambda I)(A - \lambda_0 I)^{m_0-1}x \\ &= (A - \lambda_0 I)^{m_0-1}(A - \lambda I)x = 0,\end{aligned}$$

$$(A - \lambda_0 I)y = (A - \lambda_0 I)^{m_0}x = 0,$$

所以

$$(A-\lambda I)y=(A-\lambda_0 I)y=0,$$

由此可得$(\lambda-\lambda_0)y=0$,但$\lambda-\lambda_0\neq 0$,所以$y=0$,此与$y\neq 0$矛盾.此矛盾说明λ是S的正则值.

(iv) 的证明.必要性.设$\lambda \overline{\in} \{\lambda_0, 0\}$是$A$的正则值,如果$\lambda$不是$R$的正则值,它必是$R$的特征值,故有$x\in \mathsf{E}$,$x\neq 0$使

$$Rx=AP_2x=\lambda x,$$

但$AP_2x=P_2Ax\in \mathsf{G}(\lambda_0)$,所以$x\in\mathsf{G}(\lambda_0)$,从而$P_2x=x$,由此可得$Ax=AP_2x=Rx=\lambda x$,这就是说$\lambda$是$A$的特征值,此与$\lambda$是$A$的正则值的假设矛盾,所以$\lambda$是$R$的正则值.

充分性.设$\lambda \overline{\in} \{\lambda_0, 0\}$是$R$的正则值,由(iii),$\lambda$也是$S$的正则值.为证$\lambda$是$A$的正则值,只需证明$\lambda$不是$A$的特征值,即只需证明$A$没有对应于$\lambda$的非零的特征向量.事实上,若$x\in\mathsf{E}$适合$Ax=\lambda x$,则

$$AP_1P_1x=AP_1x=P_1Ax=\lambda P_1x$$
$$AP_2P_2x=AP_2x=P_2Ax=\lambda P_2x$$

即$S(P_1x)=\lambda P_1x$,$R(P_2x)=\lambda P_2x$.因λ不是S与R的特征值,故必有$P_1x=P_2x=0$,从而$x=P_1x+P_2x=0$.这说明A没有对应于λ的非零的特征向量,所以λ是A的正则值. ▌

习　题　十

1. 设 A 是将赋范线性空间 E_1 映人 E_2 的线性有界算子，试证：如果 E_1 和 E_2 中有一个是有限维的，那么 A 必是全连续的.

2. 设 E 是无限维的线性赋范空间，$I:E\to E, Ix = x$. 试证：I 不是全连续的.

3. 设 E 为 Banach 空间，$A:E\to E$ 全连续，试证 $I-A$ 映 E 中的有界闭集为有界闭集.

4. 设 E 为自反 Banach 空间，$A:E\to E$ 为有界线性算子，且 A 把 E 中弱收敛序列映成强收敛序列，试证 A 是全连续的.

5. 设 $\sum\limits_{i=1}\sum\limits_{j=1}{a_{ij}}^2<+\infty$,

$$A:x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\longmapsto y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\quad(\forall x\in l^2),$$

其中

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\,\xi_j\quad i=1,2,\cdots$$

证明 A 是全连续线性算子.

6. $A:l^2\to l^2$ 由下式定义：$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,

$$Ax=(\xi_1,\frac{1}{2}\xi_2,\frac{1}{3}\xi_3,\cdots,\frac{1}{n}\xi_n,\cdots).$$

证明：A 是全连续线性算子.

7. 试求题 5 中 A 的共轭线性算子 A^*.

8. 设 $K(x,y)$ 是全平面上勒贝格可积函数，且

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|K(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,$$

作 $L^2(-\infty,\infty)$ 上线性算子 A:

$$(Af)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

问 A 是否 $L^2(-\infty,\infty)$ 上全连续算子?

9. 设 $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<\infty$,记 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$(第 n 个坐标为 1,其余为 0),A 为 l^2 上线性算子:$Ae_k=\sum\limits_{j=1}^{\infty}a_{jk}e_j$. 证明:$A$ 是 l^2 上全连续线性算子.

10. 在 l^2 中取 e_k 如上题,U 是 l^2 上线性算子:

$$Ue_k=\frac{1}{k}e_{k+1},\quad k=1,2,\cdots$$

证明:U 是 l^2 上全连续线性算子.

11. 设 E_1、E_2 为两个 Banach 空间,$T_1,T_2:\mathsf{E}_1\to\mathsf{E}_2$ 是全连续线性算子,证明:$\alpha T_1+\beta T_2$ 也是全连续的,其 α、β 是数.

12. 设 $\mathsf{E}_1,\mathsf{E}_2,\mathsf{E}_3$ 是 Banach 空间,$T_1:\mathsf{E}_1\to\mathsf{E}_2$,$T_2:\mathsf{E}_2\to\mathsf{E}_3$ 是有界线性算子,证明:如果 T_1,T_2 中有一个是全连续的,则 $T_2T_1:\mathsf{E}_1\to\mathsf{E}_3$ 也是全连续的.

13. 设 E 是无限维赋范线性空间,$T:\mathsf{E}\to\mathsf{E}$ 为全连续线性算子,证明:如果 T 有逆算子 $T^{-1}:T(\mathsf{E})\to\mathsf{E}$,则 T^{-1} 无界.

14. 举例说明 §10·2 引理 5 中关于 A 是全连续的假定是不可缺少的.

15. 证明 §10·3 定理 1—3.

16. 设 $(Ax)(t)=tx(t)$. A 为 $C[0,1]$ 上线性算子,它是有界的,证明 $\sigma(A)=[0,1]$,且 A 没有特征值.

17. 设 A:复 $C[0,2\pi]\to$ 复 $C[0,2\pi]$:

$$(Ax)(t)=e^{it}x(t),\quad x(t)\in C[0,2\pi],$$

证明:$\sigma(A)=\{\lambda\,|\,|\lambda|=1\}$.

18. 设 $A:l^2\to l^2$:

$$Ax=A(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(\xi_2,\xi_3,\cdots)$$

试求 $\sigma(A)$.

19. 在 l^2 中定义算子 T：

$$Tx = T(\xi_i) = (0, -\xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_i, \cdots)$$

证明：T 没有特征值，$\rho(T) = \{\lambda \mid |\lambda| > 1\}$，且当 $|\lambda| > 1$ 时，$\| R_\lambda \| = (|\lambda| - 1)^{-1}$.

20. 设 A 为复 Banach 空间 E 上的有界线性算子，λ 为 A^n 的特征值，证明：λ 的 n 次根中至少有一个是 A 的特征值.

21. 设 A 为 Banach 空间 E 上的有界线性算子，$\{A_n\} \subset \mathscr{B}(\mathrm{E})$，$\| A_n - A \| \to 0$，证明：若 λ_0 是 A 的正则值，那么对充分大的 n，λ_0 也是 A_n 的正则值，

22. 设 E 为 Banach 空间，$T \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$，设 $\lambda, \mu \in \rho(T)$，证明：$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$. 其中 $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$.

23. 设 E 为 Banach 空间，$T_i \in \mathscr{B}(\mathrm{E}) (i = 1,2)$，且 $T_1 T_2 = T_2 T_1$，设 $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$，证明：

$$R_\lambda(T_2) - R_\lambda(T_1) = (T_1 - T_2) R_\lambda(T_1) R_\lambda(T_2),$$

其中 $R_\lambda(T_i) = (T_i - \lambda I)^{-1}, i = 1,2$.

24. 设 E 是 Banach 空间，若 λ_1, λ_2 是 $A \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$ 的正则值，证明：$(A - \lambda_1 I)^{-1}(A - \lambda_2 I)^{-1} = (A - \lambda_2 I)^{-1}(A - \lambda_1 I)^{-1}$.

25. 设 E 是 Banach 空间，$A: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ 为有界线性算子，$\lambda_n (n = 1, 2, \cdots)$ 是 A 的一列正则值，且 $\lambda_n \to \lambda_0$，试证：如果存在正数 M，使对所有 $n = 1,2,\cdots$ 有 $\| (A - \lambda_n I)^{-1} \| \leqslant M$，则 λ 也是 A 的正则值.

26. 设 E 为 Banach 空间，$A: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ 为有界线性算子，$\lambda_n \in \rho(A), n = 1,2,\cdots, \lambda_n \to \lambda_0 \in \sigma(A)$. 试证 $\{ \| (A - \lambda_i I)^{-1} \| \}$ 是无界的.

27. 设 E 为 Banach 空间，$A: \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ 为有界线性算子，设 $\lambda \in \overline{\rho(A)} \cap \sigma(A)$，试证：存在 $\{x_n\} \subset \mathrm{E}$，$\| x_n \| = 1 (n = 1, 2, \cdots)$，使 $(A - \lambda I) x_n \to 0$.

28. 举例说明，存在非零的全连续线性算子，它没有非零谱.

29. 对 §10·4 定理 3 中的分解式 $A = S + R$，证明方程

$$A^*\varphi - \lambda_0\varphi = f \quad (f \in \mathsf{E}^* \text{ 固定})$$

有解的充分必要条件是:对方程

$$Sx - \lambda_0 x = 0$$

的一切解 x,都有 $f(x) = 0$.

第十一章　Hilbert 空间上的线性算子

§11・1　Hilbert 空间

11・1・1　Hilbert 空间的定义

定义 1　设 E 是复(实)数域 K 上的线性空间，若按某一法则对于 E 中任意一对元素 x、y，都有 K 中一数 (x,y) 与之对应，且满足下面的"内积公理"：

(i) $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$，　$(\forall \alpha \in K)$；

(ii) $(x+y,z) = (x,z)+(y,z)$；

(iii) $(y,x) = \overline{(x,y)}$

　　(当 K 为实数域时，此等式为 $(y,x) = (x,y)$)；

(iv) $(x,x) \geqslant 0$，且 $(x,x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$.

则称 E 为**复(实)内积空间**，并称 (x,y) 为 x 与 y 的**内积**.

命题 1　若 E 是内积空间，则

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{11・1・1}$$

定义了 E 中元素的范数，从而 E 在(11・1・1)所定义的范数下成为赋范线性空间.

证明　(1°)　由(iv)显然有 $\|x\| \geqslant 0$ 且

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$

(2°) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x,\alpha x)} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}(x,x)} = |\alpha|\,\|x\|$；

(3°) 首先，对任意的 $\lambda \in K$，$x,y \in$ E 都有

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) \geqslant 0,$$

即

$$(x,x)+\lambda(y,x)+\bar{\lambda}(x,y)+|\lambda|^2(y,y) \geqslant 0.$$

取 $\lambda = -\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$ 即得下述 Schwarz 不等式

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|, \qquad (11 \cdot 1 \cdot 2)$$

从而

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) \\ &= (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

故有

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \qquad (11 \cdot 1 \cdot 3)$$

因此,(11·1·1) 式所定义的 $\|x\|$ 确是 E 中元 x 的范数. 所以内积空间在(11·1·1) 式所定义的范数下成一赋范线性空间. ▌

在内积空间中按(11·1·1) 式所定义的范数称为**由内积所导出的范数**,以后凡谈到内积空间都认为它是按(11·1·1) 式定义了范数的赋范空间.

定义 2 如果内积空间 E 在(11·1·1) 式所定义的范数下是完备的赋范线性空间,则称 E 为 **Hilbert 空间**.

注 今后凡说到“内积空间”(或“Hilbert 空间”) 而未标明“复”,“实”时,意指它既可以是复的,也可以是实的.

例 11·1·1 设 Ω 是 R^n 中可测集,在复 $L^2(\Omega)$ 上定义元素 f,g 的内积为

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\,\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,$$

显然复 $L^2\Omega$ 成为一个 Hilbert 空间.

例 11·1·2 在复 l^2 上定义元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,$

$\eta_2,\cdots)$ 的内积为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\overline{\eta_i}\text{，显然复 } l^2 \text{ 成为一个 Hilbert 空间.}$$

根据命题 1，内积空间必是赋范线性空间，从而 Hilbter 空间必是 Banach 空间. 我们自然要问：在什么条件下一个赋范线性空间 E 可以定义内积$(\cdot,\cdot)$，使得 $\|x\|^2=(x,x)$？下面的定理就回答这个问题.

定理 1 （内积空间的特征）赋范线性空间 E 为内积空间的充分必要条件是它的范数满足公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2). \tag{11·1·4}$$

证明 　必要性. 设 E 为内积空间，则

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)$$
$$=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)+(x,x)-(x,y)$$
$$-(y,x)+(y,y)=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

充分性. 首先设 E 是实空间，令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2), \tag{11·1·5}$$

则显然有$(x,y)=(y,x)$，$(x,x)=\|x\|^2$，故内积公理(iii)，(iv)满足. 由条件(11·1·4)，有

$$(x,z)+(y,z)=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2$$
$$+\|y+z\|^2-\|y-z\|^2)$$
$$=\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z+\frac{x-y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x+y}{2}+z-\frac{x-y}{2}\right\|^2\right)$$
$$-\frac{1}{4}\left(\left\|\frac{x+y}{2}-z+\frac{x-y}{2}\right\|^2+\left\|\frac{x+y}{2}-z-\frac{x-y}{2}\right\|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2+\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left(\|\frac{x+y}{2}-z\|^2+\|\frac{y-x}{2}\|^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\|\frac{x+y}{2}+z\|^2-\|\frac{x+y}{2}-z\|^2\right) \qquad (11\cdot1\cdot6)$$

$$=2\left(\frac{x+y}{2},z\right).$$

在(11·1·6)中令 $y=0$,(并注意到,由(11·1·5)式有$(0,z)=0$)即得

$$(x,z)=2(\frac{x}{2},z). \qquad (11\cdot1\cdot7)$$

在(11·1·7)中以 $x+y$ 代 x,并注意到(11·1·6),得

$$(x+y,z)=(x,z)+(y,z). \qquad (11\cdot1\cdot8)$$

故内积公理(ii)满足.在(11·1·8)中令 $y=-x$,得

$$(-x,z)=-(x,z). \qquad (11\cdot1\cdot9)$$

同样由(11·1·8),对任何正整数 m 有

$$(mx,y)=m(x,y), \qquad (11\cdot1\cdot10)$$

$$(x,y)=(m\cdot\frac{1}{m}x,y)=m(\frac{1}{m}x,y),$$

从而

$$(\frac{1}{m}x,y)=\frac{1}{m}(x,y). \qquad (11\cdot1\cdot11)$$

由(11·1·9),(11·1·10),(11·1·11),对任何有理数 r 有

$$(rx,y)=r(x,y). \qquad (11\cdot1\cdot12)$$

最后注意到,按(11·1·5)所定义的内积(x,y)是x,y的连续函数——因为范数是连续的——即知,对任何实数 α 有

$$(\alpha x,y)=\alpha(x,y),$$

即内积公理(i)满足.

当 E 是复空间时,只需令

$$(x,y)=\frac{1}{4}[(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

$$+i(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2)],\qquad(11\cdot1\cdot13)$$

类似地可证，(11·1·13) 所定义的双变元函数(x,y)满足内积的四条公理，且 $\|x\|^2=(x,x)$. 详细证明留给读者. ▌

注　公式(11·1·4) 叫做**中线公式**，因为它的几何意义是：由两矢量 x 与 y 所张成的平行四边形中，四边边长平方之和等于两对角线长平方之和. (11·1·5) 与(11·1·13) 称为**极化恒等式**，它们分别指出了实、复内积空间中范数与内积的关系.

11·1·2　直交分解

定义 3　设 E 表一内积空间，$x,y\in$ E，若$(x,y)=0$，则称 x 与 y **直交**(正交)，记为 $x\perp y$.

设 M 表 E 的子集，$x\in$ E，若对任一 $y\in M$ 有 $x\perp y$. 则称 x 与 M **直交**，记为 $x\perp M$，$\{x|x\in$ E$,x\perp M\}$ 称为 M 的**直交余空间**，记为 $M^{\perp}$.

注　$M^{\perp}$ 必是 E 的一个闭子空间，事实上，设 $x,y\in M^{\perp}$，$\alpha,\beta\in K$，对任意 $z\in M$，有

$$(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)=0,$$

故 $\alpha x+\beta y\in M^{\perp}$，从而，$M^{\perp}$ 是一个子空间，又由内积的连续性知，$M^{\perp}$ 必是一个闭集.

引理 1　(变分引理) 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一个非空闭凸子集，$x\in$ H，则必存在唯一的 $y_0\in M$，使

$$\|x-y_0\|=\rho(x,M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

证明　不妨设 $\rho(x,M)=d>0$(因为当 $d=0$ 时，结论显然)，则必有一序列$\{y_n\}\subset M$，使 $\|y_n-x\|\to d(n\to\infty)$，于是

$$\|y_n-y_m\|^2=\|(y_n-x)+(x-y_m)\|^2$$

$$=2(\|y_n-x\|^2+\|x-y_m\|^2)-\|(y_n-x)-(x-y_m)\|^2$$

$$= 2(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\|^2$$

$$\leqslant 2(\|y_n - x\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4d^2,$$

由此可知$\{y_n\}$是一基本列,故有极限y_0,又M是闭集,因此$y_n \to y_0 \in M$,由范数的连续性,即有$\|x - y_0\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|x - y_n\| = d$.

下面证明这样的y_0是唯一的.若不然,有$y^* \neq y_0$,也使

$$\|x - y^*\| = d = \inf_{y\in M}\|x - y\|,$$

则

$$\|(x - y_0) + (x - y^*)\|^2 + \|y_0 - y^*\|^2$$
$$= 2(\|x - y_0\|^2 + \|x - y^*\|^2) = 4d^2,$$

从而

$$\|x - \frac{y_0 + y^*}{2}\|^2 < d^2,$$

即

$$\|x - \frac{y_0 + y^*}{2}\| < d,$$

但$\frac{y_0 + y^*}{2} \in M$,此与$d$的定义矛盾. ▌

定理 2 (直交分解定理) 设 M 是 Hilbert 空间 H 的一个闭子空间,则 H 中元素x必可唯一地表示成

$$x = y + z, \quad y \in \mathrm{M}, \quad z \in \mathrm{M}^{\perp}. \qquad (11 \cdot 1 \cdot 14)$$

证明 H 的闭子空间 M 是一闭凸集,对$x \in \mathrm{H}$,由引理 1,存在$y \in \mathrm{M}$,使

$$\|x - y\| = \rho(x, \mathrm{M}).$$

令$z = x - y$,则$\rho(z, \mathrm{M}) = \|z\|$.下证$z \perp \mathrm{M}$.若不然,则必有$y_1 \in \mathrm{M}$,使

$$(y_1, z) = \alpha \neq 0. \quad \bar{\alpha}(y_1, z) = (\bar{\alpha}y_1, z) = \bar{\alpha}\alpha > 0.$$

令

$$y^* = \frac{\bar{\alpha} y_1}{\|\bar{\alpha} y_1\|}, \quad \alpha^* = \frac{\bar{\alpha}\alpha}{\|\bar{\alpha} y_1\|},$$

则$(y^*, z) = \alpha^* > 0$,从而

$$\begin{aligned}\|z - \alpha^* y^*\|^2 &= (z - \alpha^* y^*, z - \alpha^* y^*) \\ &= \|z\|^2 - 2\alpha^*(z, y^*) + \alpha^{*2} \\ &= \|z\|^2 - \alpha^{*2} < \|z\|^2,\end{aligned}$$

此与$\rho(z, \mathrm{M}) = \|z\|$矛盾,故$z \perp \mathrm{M}$.也即

$$x = y + z, \quad y \in \mathrm{M}, \quad z \perp \mathrm{M}.$$

最后再证明分解是唯一的.设另有

$$x = y' + z', y' \in \mathrm{M}, z' \perp \mathrm{M},$$

则$y - y' = z' - z$,从而

$$(y - y', y - y') = (y - y', z' - z) = 0,$$

于是$y - y' = 0$即$y = y'$,从而$z = z'$.唯一性得证. ▌

注　在分解式(11・1・14)中,y称为x在M上的投影.若x有分解式(11・1・14),则

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2.$$

此即欧氏空间中勾股弦定理的推广.

11・1・3　就范直交系

定义 4　内积空间 E 中元素列$\{e_i\}$叫做就范直交系,如果

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j. \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

定理 3　设$\{h_k\}$是内积空间 E 中一线性无关序列,则必有就范直交系$\{e_k\}$存在,使h_k可表为$e_1, \cdots, e_k$的线性组合,且e_k可表为$h_1, \cdots, h_k$的线性组合.

证明　令$g_1 = h_1, e_1 = g_1 / \|g_1\|$,显然有$\|e_1\| = 1$.令

$$a_{11} = 1/\|g_1\|, b_{11} = \|g_1\|,$$

则

$$e_1 = a_{11} h_1, \quad h_1 = b_{11} e_1.$$

下面,我们用归纳的办法定义$\{e_k\}$:设已定义了$e_1,\cdots,e_k$,它满足

$$(e_i,e_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j,\end{cases}\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant k;$$

$$e_i=\sum_{j=1}^{i}a_{ij}h_j,\qquad h_i=\sum_{j=1}^{i}b_{ij}e_j,\quad i=1,2,\cdots,k.$$

令

$$g_{k+1}=h_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}(h_{k+1},e_i)e_i. \qquad (11\cdot 1\cdot 15)$$

按归纳法假设,$e_i(1\leqslant i\leqslant k)$是$h_1,\cdots,h_i$的线性组合,故$\sum_{i=1}^{k}(h_{k+1},e_i)e_i$是$h_1,\cdots,h_k$的线性组合,从而$g_{k+1}\neq 0$.令

$$e_{k+1}=g_{k+1}/\|g_{k+1}\|,$$

并记

$$\|g_{k+1}\|=b_{k+1,k+1},\quad (h_{k+1},e_i)=b_{k+1,i},$$

则

$$h_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}b_{k+1,i}e_i,$$

$$e_{k+1}=\|g_{k+1}\|^{-1}h_{k+1}-\sum_{i=1}^{k}\|g_{k+1}\|^{-1}(h_{k+1},e_i)e_i. \qquad (11\cdot 1\cdot 16)$$

把$-\sum_{i=1}^{k}\|g_{k+1}\|^{-1}(h_{k+1},e_i)e_i$写成$h_1,\cdots,h_k$的线性组合的形式,设为$\sum_{i=1}^{k}a_{k+1,i}h_i$,并令$\|g_{k+1}\|^{-1}=a_{k+1,k+1}$,则(11・1・16)可写成

$$e_{k+1}=\sum_{i=1}^{k+1}a_{k+1,i}h_i. \qquad (11\cdot 1\cdot 17)$$

根据我们的做法,显然有

$$\|e_{k+1}\|=1,\quad 且(e_{k+1},e_i)=0\quad (i=1,2,\cdots,k);$$

于是按归纳法原理，我们求出了一列 $\{e_k\}$，它满足定理条件. ▍

本定理证明中所述的将线性无关列变成就范直交系的方法叫做 Gram − Shmidt 直交化方法.

定理 4 （最小二乘法原理）设 $\{e_i\}$ 是内积空间 E 中一就范直交系，$x \in$ E，记 $c_k = (x, e_k)$，则对固定的自然数 n，

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| = \min\left\{ \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| \,\middle|\, \alpha_1 \in K, \cdots, \alpha_n \in K \right\}. \tag{11·1·18}$$

证明　由于

$$\begin{aligned}\left(x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, e_i\right) &= (x, e_i) - \sum_{k=1}^{n} c_k (e_k, e_i) \\ &= c_i - c_i = 0 \ (i = 1, \cdots, n),\end{aligned}$$

故对任何一组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，有

$$\begin{aligned}\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|^2 &= \left\| \left(x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right) + \sum_{k=1}^{n} (c_k - \alpha_k) e_k \right\|^2 \\ &= \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k - \alpha_k|^2 \\ &\geqslant \left\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\|^2,\end{aligned}$$

由此，即得(11·1·18). ▍

定义 5　设 $\{e_k\}$ 为内积空间 E 中一就范直交系，$x \in$ E，则称 $c_k = (x, e_k)$，$k = 1, 2, \cdots$ 为元素 x 关于就范直交系 $\{e_k\}$ 的 Fourier 系数，而 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ 称为 x 的 Fourier 级数.

定理 5　在内积空间 E 中，任何元素 x 的 Fourier 系数所成之序列 $(c_1, c_2, \cdots)$ 属于 l^2，且

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{11·1·19}$$

证明　由于对任何自然数 n，皆有

$$0 \leqslant \| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right)$$

$$= (x,x) - \left(x, \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, x\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right)$$

$$= \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k c_k - \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k c_k + \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{c}_k = \| x \|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2,$$

然后令 $n \to \infty$ 即知(11·1·19)成立. ▌

不等式(11·1·19)称为 Bessel 不等式.

定理 6 (Riesz—Fiesher 定理)设$\{e_k\}$是 Hilbert 空间 H 中一就范直交系,$(c_1, c_2, \cdots) \in l^2$,则存在唯一的 $x \in$ H 使

(i) $(x, e_k) = e_k, \quad k = 1, 2, \cdots$

(ii) $\| x \|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

证明 令

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \quad n = 1, 2, \cdots$$

当 $n > m$ 时

$$\| x_n - x_m \|^2 = \left(\sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k\right) = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2,$$

由$(c_k) \in l^2$ 知$\{x_n\}$是一基本列,它收敛,设

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

则有

$$(x, e_k) = \lim_{n\to\infty}(x_n, e_k) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e_j, e_k\right) = c_k,$$

$$\| x \|^2 = \lim_{n\to\infty} \| x_n \|^2 = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

满足(i)(ii)的元素 x 的存在性得证.下证唯一性.

设 $x' \in$ H 也满足(i)(ii),则

$$\begin{aligned}\|x-x'\|^2 &= \lim_{n\to\infty}\|x_n-x'\|^2 \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n}c_k e_k - x', \sum_{k=1}^{n}c_k e_k - x'\Big) \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big[\Big(\sum_{k=1}^{n}c_k e_k, \sum_{k=1}^{n}c_k e_k\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n}c_k e_k, x'\Big) - \Big(x', \sum_{k=1}^{n}c_k e_k\Big) + (x', x')\Big] \\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(\|x'\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\Big) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_k|^2 = 0\end{aligned}$$

所以 $x' = x$. ▌

定义 6　设 $\{e_k\}$ 是内积空间 E 中就范直交系.

(i) 如果对任意的 $x \in$ E 皆有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2 = \|x\|^2,$$

则称 $\{e_k\}$ 是**完备的**.

(ii) 如果 E 中不存在非零元素与所有的 $e_k(k=1,2,3,\cdots)$ 都直交，则称 $\{e_k\}$ 是**完全的**.

定理 7　设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 E 中的就范直交系，则下述各条等价：

1) $\{e_k\}$ 是完备的；

2) $\{e_k\}$ 是完全的；

3) 由 $\{e_k\}$ 所产生的闭子空间是整个 E；

4) 对任何 $x \in$ E，有 $x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$；

5) 对任何 $x, y \in$ E，下面的"Parseval 等式"成立：

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\cdot\overline{(y,e_k)}.$$

证明 1)⟹2). 设 $x \in$ E，因 $\{e_k\}$ 是完备的，由

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2$$

即知,当 $x \neq 0$ 时$(x,e_k)(k=1,2,\cdots)$不能全为零,这就意味着 E 中不存在非零元素与所有的 $e_k(k=1,2,\cdots)$ 都直交,因此,$\{e_k\}$ 是完全的.

2)⇒3). 设$\{e_k\}$所产生的闭子空间为 E_0. 根据直交分解定理,只需证明 $E_0^{\perp}=\{0\}$.

设 $x \in E_0^{\perp}$,那么,对任一 $z \in E_0$ 有$(x,z)=0$,特别,对每一 $e_k \in E_0$ 有$(x,e_k)=0$,再由$\{e_k\}$的完全性即得 $x=0$,即 $E_0^{\perp}=\{0\}$.

3)⇒4). 设 $x \in E$,因$\{e_k\}$产生的闭子空间是整个 E,故存在

$$x_n=\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} e_k \quad (n=1,2,\cdots),$$

使 $\|x-x_n\| \to 0(n\to\infty)$. 根据定理 4,我们有

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\| \leqslant \|x-x_n\|,$$

从而

$$\left\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\right\| \to 0 \quad (n\to\infty),$$

即

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k.$$

4)⇒5). 设 x、$y \in E$,由条件,我们有

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k;$$

$$y=\sum_{k=1}^{\infty}(y,e_k)e_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(y,e_k)e_k,$$

然后由内积的连续性即得

$$\begin{aligned}(x,y)&=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k,\sum_{k=1}^{n}(y,e_k)e_k\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)\overline{(y,e_k)}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\overline{(y,e_k)}.$$

5) $\Rightarrow$1). 显然. ▌

注 Hilbert 空间 H 中的完备就范直交系$\{e_n\}$又称为 H 的**就范直交基**,由定理 7,每一 $x \in$ H 皆可唯一地写成 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ 的形式,我们把$(c_1,c_2,\cdots)$称为元素 x 在基$\{e_k\}$下的**坐标**.

定理 8 任何无穷维的、可分的 Hilbert 空间 H 中一定有完备的就范直交系存在。

证明 由于 H 可分,故存在一可数稠集$\{g_k\}$. $\{g_k\}$产生的闭子空间是整个 H. 现在,先按下法求出$\{g_k\}$的一个线性无关的子集:我们可设 $g_1 \neq 0$. 若 g_2 与 g_1 线性相关,则将 g_2 去掉,一般地,如果 g_k 与 $g_1,\cdots,g_{k-1}$ 线性相关,则将 g_k 去掉,这样继续下去,$\{g_k\}$中所留下的元素所成之集是线性无关的(即其中任意有限个元素都是线性无关的),记这个集合为$\{h_k\}$. 显然,$\{h_k\}$所产生的闭子空间与$\{g_k\}$所产生的闭子空间相同,也是整个 H. 由于 H 是无穷维的,因此,$\{h_k\}$仍是一个可数集. 于是,根据定理 3,存在就范直交系$\{e_k\}$,使得 h_k 可用 $e_1,\cdots,e_k$ 线性表示,而 e_k 可用 $h_1,\cdots,h_k$ 线性表示. 因此,$\{e_k\}$所产生的闭子空间与$\{h_k\}$所产生的闭子空间相同,也是整个 H. 这样,根据定理 7,就范直交系$\{e_k\}$就是完备的. ▌

例 11·1·3 三角函数系

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\ \cdots,\ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}},\ \cdots$$

是实 $L^2[-\pi,\pi]$ 中的一个完备就范直交系.

证明 所述的三角函数系是就范直交系极易验证. 下面,我们证明它是完备的. 因为 $L^2[-\pi,\pi]$ 是 Hilbert 空间,因此,我们只要证明它是完全的. 设 $f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$,且$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$ 及

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix} \mathrm{d}x = 0 \quad (n = 1,2,\cdots),$$

我们证明 $f(x) \equiv 0$.

1° 先设 $f(x)$ 连续. 如果 $f(x)$ 不恒等于 0,则存在 $\varepsilon > 0$ 及 $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [-\pi, \pi]$ $(\delta > 0)$ 使

$$f(x) \geqslant \varepsilon, (\text{或 } f(x) \leqslant -\varepsilon) \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta].$$

不失一般性,我们设 $x_0 = 0$,令

$$T_n(x) = (1 + \cos x - \cos\delta)^n, \quad n = 1,2,\cdots$$

则 $T_n(x)$ 是一三角多项式,从而有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) = 0. \tag{11·1·20}$$

但是,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) \mathrm{d}x &= \int_{-\delta}^{\delta} f(x) T_n(x) \mathrm{d}x \\ &+ \int_{-\pi}^{-\delta} f(x) T_n(x) \mathrm{d}x + \int_{\delta}^{\pi} f(x) T_n(x) \mathrm{d}x \\ &\geqslant \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} T_n(x) \mathrm{d}x - \int_{-\pi}^{-\delta} |f(x)| \mathrm{d}x - \int_{\delta}^{\pi} |f(x)| \mathrm{d}x\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\int_{-\delta}^{\delta} T_n(x) \mathrm{d}x \geqslant \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} T_n(x) \mathrm{d}x \geqslant \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \left(1 + \cos\frac{\delta}{2} - \cos\delta\right)^n \mathrm{d}x \\ &= \delta\left(1 + \cos\frac{\delta}{2} - \cos\delta\right)^n \to +\infty \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

因此,对充分大的 n,我们有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) T_n(x) \mathrm{d}x > 0.$$

它与(11·1·20) 矛盾.

2° 在一般情形,令

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t) \mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{z} f(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}z,$$

它是$[-\pi,\pi]$上的连续函数，且

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\mathrm{d}x = 0,$$

又对$n \geqslant 1$有

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}z\int_{-\pi}^{z} f(t)\mathrm{d}t\right]\begin{matrix}\cos nx \\ \sin nx\end{matrix}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t \cdot \frac{1}{n}\mathrm{d}\begin{pmatrix}\sin nx \\ -\cos nx\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{x} f(t)\mathrm{d}t\begin{pmatrix}\sin nx \\ -\cos nx\end{pmatrix}\Bigg|_{x=-\pi}^{\pi} \mp \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \begin{matrix}\sin nx \\ \cos nx\end{matrix} \mathrm{d}x \\
&= 0.
\end{aligned}$$

根据 1° 中所证，$F(x) \equiv 0$，从而$f(x) \equiv 0$. ▌

类似可证，$\{e^{2in\pi x} \mid n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$是复$L^2[0,1]$中的一个完备的就范直交系. 再如，$e_1 = (1,0,0,\cdots)$，$e_2 = (0,1,0,\cdots)\cdots$是$l^2$上的一个完备就范直交系.

定理 9　*任何一个无穷维的、可分的复(实)Hilbert 空间 H 与复(实)l^2之间都存在等距的线性同构.*

证明　取定 H 中一个完备的就范直交系$\{e_k\}$. 对任意的$x \in$ H，用(c_k)表x关于$\{e_k\}$的 Fourier 系数. 由定理 5，$\overline{x} = (c_1, c_2, \cdots) \in l^2$. 作对应$\varphi: x \longmapsto \overline{x}$. φ: H $\to l^2$显然是线性映射. 由于$\{e_k\}$是完备的，所以φ是保范的，从而φ是等距映射. 再由定理 6，φ满射. 所以φ: H $\to l^2$是等距的线性同构. ▌

定理 9 说明，任何两个无穷维的、可分的复(实)Hilbert 空间都存在等距的线性同构. 根据极化恒等式知所述的同构映射还保持内积不变(即$(\varphi x, \varphi y) = (x, y)$). 所以当限于讨论与线性运算及内积有关的问题时，可把如此的两个空间看成同一个空间而不予区别.

§11·2 Riesz表示定理

设H是一Hilbert空间，(x,y)为H中元素x、y的内积，如果固定y，那么对每一$x\in \mathrm{H}$，(x,y)对应于一个确定的数. 当x在H上变化时，(x,y)可以看作是定义在H上的线性泛函. 由内积的性质(Schwarz不等式)，$f(x)=(x,y)$是有界线性泛函，且$\|f\|=\|y\|$.

在本节中，我们主要证明

定理1 对于Hilbert空间H中每一有界线性泛函f，必存在唯一的$y\in \mathrm{H}$，使得

$$f(x)=(x,y),\ \forall x\in \mathrm{H} \tag{11·2·1}$$

且

$$\|y\|=\|f\|. \tag{11·2·2}$$

证明 令$\mathrm{M}=\{x\,|\,x\in \mathrm{H}, f(x)=0\}$，显然M是H的闭子空间. 如果$\mathrm{M}=\mathrm{H}$，则取$y=0$，(11·2·1)式自然满足. 现设$\mathrm{M}\neq \mathrm{H}$，此时$\mathrm{M}^{\perp}\neq\{0\}$，从而有$y_0\in \mathrm{M}^{\perp}$，$y_0\neq 0$存在，可设$\|y_0\|=1$. 令

$$y=\overline{f(y_0)}y_0,.$$

下证此y即满足(11·2·1). 事实上，对任一$x\in \mathrm{H}$，令

$$x_0=x-\frac{f(x)}{f(y_0)}y_0,$$

则$f(x_0)=0$，从而$x_0\in \mathrm{M}$，于是$(x_0,y_0)=0$，即

$$0=\left(x-\frac{f(x)}{f(y_0)}y_0,y_0\right)=(x,y_0)-\frac{f(x)}{f(y_0)}(y_0,y_0)$$

$$=(x,y_0)-\frac{f(x)}{f(y_0)},$$

故得

$$f(x)=f(y_0)(x,y_0)=(x,\overline{f(y_0)}y_0)=(x,y),$$

即(11·2·1)式成立.

现在设 $y^* \in \mathrm{H}$ 满足(11·2·1),则对任一 $x\in\mathrm{H}$ 有:

$$(x,y-y^*)=0,$$

特别取 $x=y-y^*$,即得 $\|y-y^*\|=0$,故 $y=y^*$,也就是说,满足(11·2·1)的 y 必是唯一的.

最后证明 $\|f\|=\|y\|$ 由 Schwarz 不等式:

$$|f(x)|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|$$

即得 $\|f\|\leqslant\|y\|$. 另一方面,在(11·2·1)中取 $x=y$,即得

$$\|f\|\|y\|\geqslant|f(y)|=|(y,y)|=\|y\|^2,$$

故得 $\|f\|\geqslant\|y\|$,因此 $\|f\|=\|y\|$. ▌

下面我们由 Riesz 表示定理来说明 Hilbert 空间的“自共轭性”.

设 H 是 Hilbert 空间,对每个 $f\in\mathrm{H}^*$,由 Riesz 表示定理,存在唯一的 $y_f\in\mathrm{H}$ 满足

$$f(x)=(x,y_f)\quad(\forall x\in\mathrm{H})\text{ 且 }\|y_f\|=\|f\|.$$

由此我们可以作一个 H^* 到 H 的映射 $V: f\longmapsto y_f$. 由 Riesz 定理知 V 是保范映射. 对每一 $y\in\mathrm{H}$,显然 $(x,y)=f_y(x)$ 定义了 H 上一个有界线性泛函 f_y,并且 $Vf_y=y$,因此 V 满射. 还容易验证,$V:\mathrm{H}^*\to\mathrm{H}$ 是共轭线性同构,即 $V(\alpha f_1+\beta f_2)=\bar{\alpha}Vf_1+\bar{\beta}Vf_2$,因此 $V:\mathrm{H}^*\to\mathrm{H}$ 是保范的共轭线性同构. 我们称此映射为 H^* 到 H 的自然映射. 通过自然映射 V 我们可以在 H^* 中定义内积 $(f_1,f_2)=\overline{(Vf_1,Vf_2)}$,显然,此内积导出的范数与 H^* 上原有的范数一致,所以 H^* 是一 Hilbert 空间. 为了讨论问题方便,我们往往在自然映射 V 的意义下把 H^* 等同于 H,因而把 $V(\mathrm{H}^*)=\mathrm{H}$ 简单地记作 $\mathrm{H}^*=\mathrm{H}$,并说 H 的共轭空间是 H 自身. Hilbert 空间的这一性质称为自共轭性. 由自共轭性不难看出 Hilbert 空间必为自反空间.

§11·3　自共轭算子的谱

在本章中自 §11·3往后,恒设H是Hilbert空间,并且当无特别声明时恒设所说到的算子是 $\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 的.

11·3·1　Hilbert 共轭算子

以下总设 $V:\mathrm{H}^*\to\mathrm{H}$ 是自然映射,$A:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 是有界线性算子.

由 §9·4 知,算子 A 有共轭算子 $A^*:\mathrm{H}^*\to\mathrm{H}^*$;还知,一个算子 $B:\mathrm{H}^*\to\mathrm{H}^*$ 为 A 的共轭算子的充要条件是:算子 B 满足条件

$$(Bf)(x)=f(Ax),\quad \forall x\in\mathrm{H},\quad f\in\mathrm{H}^*. \tag{11·3·1}$$

定义 1　若 $\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 的算子 A' 满足条件

$$(x,A'y)=(Ax,y),\quad \forall x\in\mathrm{H},\quad y\in\mathrm{H}, \tag{11·3·2}$$

就称 A' 是 A 的 Hilbert 共轭算子.

A 的共轭算子与 A 的 Hilbert 共轭算子有何关系?下面我们来讨论这个问题.

A 的共轭算子 A^* 是 $\mathrm{H}^*\to\mathrm{H}^*$ 的,由 A^* 按下式作算子 $A^{(*)}$:

$$A^{(*)}:Vf\longmapsto V(A^*f)\ (\forall f\in\mathrm{H}^*), \tag{11·3·3}$$

因为 $V:\mathrm{H}^*\to\mathrm{H}$ 既是共轭线性同构对应又是保范对应,由 $A^*:\mathrm{H}^*\to\mathrm{H}^*$ 是有界线性算子立即知 $A^{(*)}$ 是 $\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 的有界线性算子(注意,当 f 取遍 H^* 时 Vf 取遍 H). 由(11·3·1)知

$$(A^*f)(x)=f(Ax),\quad \forall x\in\mathrm{H},\quad f\in\mathrm{H}^*,$$

从而

$$(x,V(A^*f))=(Ax,Vf),\quad \forall x\in\mathrm{H},\quad f\in\mathrm{H}^*,$$

记 $Vf = y$，则 $V(A^* f) = A^{(*)}y$，由上式得

$$(x, A^{(*)}y) = (Ax, y), \quad \forall x \in \mathrm{H}, \quad y \in \mathrm{H}, \tag{11·3·4}$$

因此 $A^{(*)}$ 是 A 的 Hilbert 共轭算子.

又设 $A': \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 是 A 的 Hilbert 共轭算子，则 A' 满足(11·3·2)，再由(11·3·4)便知

$$(x, A'y) = (x, A^{(*)}y), \quad \forall x \in \mathrm{H}, \quad y \in \mathrm{H},$$

从而对 $\forall y \in \mathrm{H}$ 恒有 $A'y = A^{(*)}y$，即 $A' = A^{(*)}$.

综上所述知，A 的 Hilbert 共轭算子是存在的并且是唯一的(我们暂约定以 A' 记之)，它恰是由 A 的共轭算子 A^* 按(11·3·3)式所作出的有界线性算子 $A^{(*)}$.

由于 V 是 H^* 到 H 的保范的共轭线性同构对应，§11·2 指出可以在对应 V 的意义下把 H^* 与 H 看成是等同的，由于 A^* 与 A' 有上述的关系，我们自然也可以在对应 V 的意义下把 A^* 与 A' 看成是等同的，事实上，A^* 与 A' 中任何一个的性质清楚了，借助于对应 V 进行"翻译"，另一个的性质也就立即清楚了. 由于 A 的 Hilbert 共轭算子 A'(比 A^*)更便于利用内积来进行讨论，今后我们将把它(而不是 A^*)作为直接研究对象，并约定：略去其名称"Hilbert 共轭算子"中的"Hilbert"字样，且改用符号 A^*(而不再用 A')记之. 今后若在原来意义下使用术语"共轭算子"、符号"A^*"，则需要特别声明.

根据定义 1，读者很容易证明共轭算子的下列简单性质：

(i) $(A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*$　$(A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\mathrm{H}))$；

(ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$　$(\lambda \in K)$；

(iii) $(A_1 A_2)^* = A_2^* A_1^*$　$(A_1, A_2 \in \mathscr{B}(\mathrm{H}))$；

(iv) 若 $A^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$，则 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$；

(v) $A^{**} = A$ (A^{**} 意指 $(A^*)^*$)；

(vi) $\|A^*\| = \|A\|$.

注　注意上面的性质(ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$，它与§9·4的性质(ii)$(\lambda A)^* = \lambda A^*$不同，前条中的"*"是指取Hilbert共轭算子，后条中的"*"是指取原来意义下的共轭算子. 两种共轭算子在性质上的这一不同之点是由于V是H^*到H的共轭线性同构对应而不是线性同构对应造成的，这一不同显然是非实质性的.

11·3·2　自共轭算子

定义2　设H为Hilbert空间. 有界线性算子A:H→H称为自共轭的，如果$A^* = A$.

例11·3·1　设$\mathrm{H} = L^2[a,b]$(复的)，考虑线性积分算子

$$y(t) = Ax(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \quad x(t) \in L^2[a,b],$$

其中$k(t,s) \in L^2[a,b,\ a,b]$(复的). 易知，$A$:H→H是有界线性算子. 由于

$$\begin{aligned}(Ax,y) &= \int_a^b \left(\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right)\overline{y(t)}\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b\int_a^b k(t,s)x(s)\ \overline{y(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s \\ &= \int_a^b \left(\overline{\int_a^b \overline{k(t,s)}y(t)\mathrm{d}t}\right)x(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

所以

$$A^* y(t) = \int_a^b \overline{k(s,t)}y(s)\mathrm{d}s. \qquad (11\cdot3\cdot5)$$

因此，A是自共轭的充分必要条件是

$$k(t,s) = \overline{k(s,t)}. \qquad (11\cdot3\cdot6)$$

对于实积分核而言，由上可知，A为自共轭的充分必要条件是$k(t,s)$为对称核.

例11·3·2　在$L^2[0,1]$(复的)上考虑算子A:

$$Ax(t) = tx(t),$$

那么算子A是自共轭的. 事实上，对任意$x(t),y(t) \in L^2[0,1]$

有

$$(Ax,y)=\int_0^1 tx(t)\overline{y(t)}\mathrm{d}t=\int_0^1 x(t)\overline{ty(t)}\mathrm{d}t$$
$$=(x,Ay).$$

注 由(11·3·2)及定义2知，A是自共轭的充分必要条件为，

$$(Ax,y)=(x,Ay),\quad \forall x,y\in \mathrm{H}.$$

对自共轭线性算子，有下列结论：

1) 若 A_1,A_2 是自共轭算子，则 A_1+A_2 也是自共轭的；

2) 若 A 是自共轭算子，λ 为实数，则 λA 也是自共轭的；

3) 若 A_1,A_2 都是自共轭算子，则 A_1A_2 是自共轭算子的充分必要条件是 A_1 与 A_2 可交换，即 $A_1A_2=A_2A_1$；

4) 若 A_n 是自共轭算子，A 为有界线性算子，若

$$\|A_n-A\|\to 0\qquad (n\to\infty),$$

则 A 也是自共轭算子.

事实上，

$$\|A_n-A^*\|=\|A_n^*-A^*\|=\|(A_n-A)^*\|$$
$$=\|A_n-A\|\to 0,$$

由极限的唯一性，即得 $A=A^*$.

5) 若 A 为自共轭算子，则(Ax,x)必为实数.

事实上

$$\overline{(Ax,x)}=(x,Ax)=(Ax,x).$$

定义3 设 $A:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 是自共轭算子，令

$$m=\inf_{\|x\|=1}(Ax,x),M=\sup_{\|x\|=1}(Ax,x),$$

分别称 m,M 为 A 的**下界与上界**.

定理1 设 $A:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 是自共轭算子，m,M 分别为 A 的下界和上界，则

$$\|A\| = \max\{|m|,|M|\} = \sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|. \tag{11·3·7}$$

证明 记

$$N = \max\{|m|,|M|\} = \sup_{\|x\|=1}|(Ax,x)|,$$

当 $\|x\|=1$ 时

$$|(Ax,x)| \leqslant \|Ax\|\,\|x\| \leqslant \|A\|\,\|x\|^2 = \|A\|, \tag{11·3·8}$$

从而

$$N \leqslant \|A\|. \tag{11·3·9}$$

下面证明 $\|A\| \leqslant N$,为此只需证明,对任一 $z \in \mathrm{H}$,有

$$\|Az\| \leqslant N\|z\|.$$

当 $Az=0$ 时,上式显然成立.

下设 $Az \neq 0$,取 $\lambda^2 = \dfrac{\|Az\|}{\|z\|}$,并令 $u = \dfrac{1}{\lambda}Az$,即得

$$\begin{aligned}\|Az\|^2 &= (Az,Az) = (A\lambda z, A\frac{1}{\lambda}z)\\ &= \frac{1}{4}[(A(\lambda z+u),\lambda z+u) - (A(\lambda z-u),\lambda z-u)]\\ &\leqslant \frac{1}{4}N[\|\lambda z+u\|^2 + \|\lambda z-u\|^2]\\ &= \frac{1}{2}N[\lambda^2\|z\|^2 + \frac{1}{\lambda^2}\|Az\|^2]\\ &= N\|z\|\,\|Az\|,\end{aligned}$$

于是

$$\|Az\| \leqslant N\|z\|. \tag{11·3·10}$$

由(11·3·9)、(11·3·10) 即得(11·3·7). ▌

11·3·3 自共轭算子的谱

在第十章中我们引进了线性算子谱的概念,下面我们研究

Hilbert 空间中自共轭线性算子谱的性质. 以下,我们恒设 H 是 Hilbert 空间,A:H → H 是自共轭线性算子.

定理 2 A 的特征值必是实数.

证明 设 λ 是特征值,$x \neq 0$ 是对应于 λ 的特征向量,则

$$(Ax,x) = (\lambda x,x) = \lambda \| x \|^2,$$

于是

$$\lambda = \frac{(Ax,x)}{\| x \|^2}.$$

注意到(Ax,x)是实数,即知 λ 是实数. ▌

定理 3 对应于 A 的相异特征值的特征向量必直交.

证明 设 $x \neq 0, y \neq 0$ 是分别对应于不同特征值 λ 与 μ 的特征向量(由定理 2,$\lambda \neq \mu$ 皆为实数),即

$$\left.\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ Ay &= \mu y \end{aligned}\right\}. \tag{11·3·11}$$

由于 A 是自共轭的,故有

$$(Ax,y) = (x,Ay),$$

再注意到(11·3·11)即得

$$\lambda(x,y) = \mu(x,y),$$

由 $\lambda \neq \mu$ 即知$(x,y) = 0$. ▌

下面,我们设 $\lambda \in K$,且记

$$A_\lambda = A - \lambda I, \quad \mathrm{E}_\lambda = \{x \in \mathrm{H} \mid \mathrm{A}_\lambda x = 0\}, \quad \mathrm{G}_\lambda = \mathrm{A}_\lambda(\mathrm{H}).$$

定理 4 $\overline{\mathrm{G}_\lambda} = \mathrm{E}_\lambda^{\perp}$,从而 $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{G}_\lambda} \oplus \mathrm{E}_\lambda$.

证明 对 $\lambda = a + ib \in K$(a,b 为实数),当 $b \neq 0$ 时,由定理 2 知 $\mathrm{E}_\lambda = \{0\}$,$\mathrm{E}_{\bar{\lambda}} = \{0\}$,而当 $b = 0$ 时,$\lambda = \bar{\lambda}$,因此,对任意的数 $\lambda \in K$,皆有 $\mathrm{E}_\lambda = \mathrm{E}_{\bar{\lambda}}$. 设 $z \in G_\lambda^{\perp}$,则

$$(A_\lambda x, z) = 0, \quad \forall x \in \mathrm{H}.$$

故有

$$(x, A_{\bar{\lambda}} z) = 0, \quad \forall x \in \mathrm{H},$$

从而 $A_{\bar{\lambda}}z = 0$,即 $z \in E_{\bar{\lambda}} = E_{\lambda}$,因此,$G_{\lambda}^{\perp} \subset E_{\lambda}$.

反之,设 $z \in E_{\lambda} = E_{\bar{\lambda}}$,则对任意的 $x \in H$ 有

$$0 = (x, A_{\bar{\lambda}}z) = (A_{\lambda}x, z),$$

所以,$z \in G_{\lambda}^{\perp}$,故 $E_{\lambda} \subset G_{\lambda}^{\perp}$.因而 $E_{\lambda} = G_{\lambda}^{\perp}$,从而 $\overline{G}_{\lambda} = E_{\lambda}^{\perp}$,因此 $H = \overline{G}_{\lambda} \oplus E_{\lambda}$. ▌

系 1 (i) λ 是 A 的正则值的充分必要条件是:$G_{\lambda} = H$;

(ii) λ 是 A 的谱点的充分必要条件是:$G_{\lambda} \neq H$;

(iii) λ 是 A 的特征值的充分必要条件是:$\overline{G}_{\lambda} \neq H$.

证明留作习题.

定理 5 λ 是 A 的正则值的充分必要条件是:存在常数 $c > 0$,使对一切 $x \in H$ 皆有

$$\| A_{\lambda}x \| = \| Ax - \lambda x \| \geqslant c \| x \|. \quad (11 \cdot 3 \cdot 12)$$

证明 必要性.设 λ 是正则值,则 $A_{\lambda}^{-1}: H \to H$ 是有界线性算子,于是,对任一 $x \in H$,令 $y = A_{\lambda}x$,则 $x = A_{\lambda}^{-1}y$,所以

$$\| x \| = \| A_{\lambda}^{-1}y \| \leqslant \| A_{\lambda}^{-1} \| \, \| y \| = \| A_{\lambda}^{-1} \| \, \| A_{\lambda}x \|,$$

从而,只需令 $c = \| A_{\lambda}^{-1} \|^{-1}$,即得(11·3·12).

充分性.由(11·3·12)知,$E_{\lambda} = \{0\}$,从而,由定理 4,$\overline{G}_{\lambda} = H$.下面证明 $G_{\lambda} = \overline{G}_{\lambda}$,即证 G_{λ} 是闭集.设 $y_n \in G_{\lambda}$,$y_n \to y^*$.对每一 n,取 $x_n \in H$,使 $y_n = A_{\lambda}x_n$,由(11·3·12)

$$\| y_n - y_m \| = \| A_{\lambda}(x_n - x_m) \| \geqslant c \| x_n - x_m \|,$$

从而 $\{x_n\}$ 也是一基本列.设 $x_n \to x^* \in H$,由 A_{λ} 的连续性

$$A_{\lambda}x^* = \lim_{n \to \infty} A_{\lambda}x_n = \lim_{n \to \infty} y_n = y^*,$$

即 $y^* \in G_{\lambda}$.这说明 G_{λ} 是闭集,即 $G_{\lambda} = \overline{G}_{\lambda} = H$.由定理 4 的系 1(i)即知 λ 是正则值. ▌

由于(11·3·12)等价于:对任一 $x \in H$,$\| x \| = 1$,有

$$\| A_{\lambda}x \| \geqslant c > 0,$$

因此,我们可得:

系 2　λ 是 A 的谱点的充分必要条件是：有点列 $x_n \in \mathrm{H}$，$\| x_n \| = 1\ (n = 1,2,\cdots)$，使

$$\| A_\lambda x_n \| = \| A x_n - \lambda x_n \| \to 0 \quad (\text{当 } n \to \infty).$$

定理 6　当 H 是复空间时任何 $\lambda = \alpha + i\beta (\beta \neq 0)$ 都是 A 的正则值.

证明　事实上，对任一 $x \in \mathrm{H}$，只要注意到 (Ax, x) 是实数，便可得：

$$\begin{aligned}\| A_\lambda x \| \, \| x \| &\geqslant |(A_\lambda x, x)| = |\lambda(x,x) - (Ax,x)| \\ &= |\alpha(x,x) + i\beta(x,x) - (Ax,x)| \\ &\geqslant |\beta(x,x)| = |\beta| \, \| x \| \, \| x \|,\end{aligned}$$

从而

$$\| A_\lambda x \| \geqslant |\beta| \, \| x \|.$$

根据定理 5 即知 λ 是正则值. ▌

定理 7　m, M 分别表 A 的下界与上界，即 $m = \inf\limits_{\| x \| = 1} (Ax, x)$，$M = \sup\limits_{\| x \| = 1} (Ax, x)$，则 A 的谱完全含于实轴上的闭区间 $[m, M]$ 中.

证明　由定理 6，A 的谱含于实轴上.

1° 当实数 $\lambda < m$ 时：

$$\begin{aligned}\| A_\lambda x \| \, \| x \| &\geqslant (A_\lambda x, x) = (Ax, x) - \lambda(x,x) \\ &\geqslant m(x,x) - \lambda(x,x) = (m - \lambda) \| x \|^2,\end{aligned}$$

从而

$$\| A_\lambda x \| \geqslant (m - \lambda) \| x \|.$$

因 $m - \lambda > 0$，根据定理 5，λ 是正则值.

2° 当实数 $\lambda > M$ 时，类似地可证得

$$\| A_\lambda x \| \geqslant (\lambda - M) \| x \|,$$

从而 λ 也是正则值. ▌

定理 8　A 的上界 M 与下界 m 都是谱点.

证明 $$\inf_{\|x\|=1}(A_m x,x) = \inf_{\|x\|=1}[(Ax,x) - m(x,x)]$$
$$= \inf_{\|x\|=1}(Ax,x) - m = m - m = 0;$$
$$\sup_{\|x\|=1}(A_m x,x) = \sup_{\|x\|=1}(Ax,x) - m = M - m \geqslant 0.$$
根据定理 1 知：$\| A_m \| = M-m$，且存在一元素列 $x_n \in H$，$\| x_n \| = 1 \quad (n=1,2,\cdots)$ 使
$$(A_m x_n, x_n) \to M-m, \quad (\text{当 } n \to \infty), \qquad (11 \cdot 3 \cdot 13)$$
从而
$$\begin{aligned}
&\| A_M x_n \|^2 = (Ax_n - Mx_n, Ax_n - Mx_n) \\
&= (Ax_n - mx_n + mx_n - Mx_n, Ax_n - mx_n + mx_n - Mx_n) \\
&= (A_m x_n - (M-m)x_n, A_m x_n - (M-m)x_n) \\
&= (A_m x_n, A_m x_n) - 2(M-m)(A_m x_n, x_n) + (M-m)^2 \\
&\leqslant \| A_m \|^2 \| x_n \|^2 - 2(M-m)(A_m x_n, x_n) + (M-m)^2 \\
&= 2(M-m)^2 - 2(M-m)(A_m x_n, x_n) \to 0, \text{当 } n \to \infty.
\end{aligned}$$
因此
$$\| A_M x_n \| \to 0. \qquad (11 \cdot 3 \cdot 14)$$
根据系 2，M 是谱点.

关于 m 是谱点可类似地证明，留作习题. ▌

系 3 自共轭线性算子的谱一定是非空的.

例 11·3·3 设 $A = I$，即 A 是不变算子，于是 $A_\lambda = (1-\lambda)I$，由此可知它只有一个特征值 $\lambda = 1$，其余的 λ 都是正则值，且
$$R_\lambda = A_\lambda^{-1} = \frac{1}{1-\lambda} I.$$

例 11·3·4 在例11·3·2 中我们已证明：算子 A
$$Ax(t) = tx(t)$$
是 $L^2[0,1]$ 上的自共轭算子. 现在我们证明闭区间$[0,1]$恰好是 A 的谱. 事实上，由于
$$(Ax,x) = \int_0^1 t|x(t)|^2 \mathrm{d}t,$$

故当 $\|x\| = \left(\int_0^1 |x(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = 1$ 时，恒有 $0 \leqslant (Ax, x) \leqslant 1$. 由此可知 $0 \leqslant m \leqslant M \leqslant 1$，因此，只需证明[0,1]中任何 λ 都是 A 的谱点.

显然存在一个正数 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ 使 $[\lambda, \lambda+\varepsilon]$（或 $[\lambda-\varepsilon, \lambda]$）完全含于[0,1]中，令

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, & t \in [\lambda, \lambda+\varepsilon]; \\ 0, & t \overline{\in} [\lambda, \lambda+\varepsilon]. \end{cases}$$

于是

$$\|x_\varepsilon\| = \left(\int_0^1 x_\varepsilon^2(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}t\right)^{1/2} = 1,$$

且

$$\begin{aligned} \|A_\lambda x_\varepsilon\| &= \left(\int_0^1 (tx_\varepsilon(t) - \lambda x_\varepsilon(t))^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} (t-\lambda)^2 \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{1}{3}(t-\lambda)^3 \Big|_\lambda^{\lambda+\varepsilon}\right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon \to 0 \quad (\text{当 } \varepsilon \to 0) \end{aligned}$$

于是根据系 2，λ 是谱点.

§ 11 • 4　自共轭全连续算子的谱分解

在这一节中恒设 H 是 Hilbert 空间，$A: \mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 是自共轭全连续线性算子，且 $A \neq 0$.

结合 § 10 • 1 ～ § 10 • 3 及 § 11 • 3 的结果，可得下列明显的结论（命题 1 ～ 4）：

命题 1　A 有非零特征值，A 的所有特征值全是实数.

命题2 A只有有限个或可列个特征值λ_n. 如果A有可列个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ 则 $\lambda_n \to 0$. A 的对应于每个非零特征值的特征子空间是有限维的.

下面记

$$\mathrm{E}(\lambda) = \{x \in \mathrm{H} \mid Ax - \lambda x = 0\},$$
$$\mathrm{G}(\lambda) = (A - \lambda I)(\mathrm{H}),$$

其中 $\lambda \in K$,在这个记号下 $\mathrm{E}(0)$ 就是 A 的零子空间,$\mathrm{G}(0)$ 是 A 的值域 $A(\mathrm{H})$.

命题 3 $\mathrm{E}(\lambda) = \mathrm{G}(\lambda)^{\perp}$. 当 $\lambda \neq 0$ 时,$\mathrm{G}(\lambda)$ 是 H 的闭子空间,从而

$$\mathrm{H} = \mathrm{E}(\lambda) \oplus \mathrm{G}(\lambda). \quad \mathrm{H} = \mathrm{E}(0) \oplus \overline{\mathrm{G}(0)}.$$

命题 4 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时 $\mathrm{E}(\lambda_1) \perp \mathrm{E}(\lambda_2)$.

引理 1 $\mathrm{E}(\lambda)$ 与 $\mathrm{G}(\lambda)$ 都是 A 的不变子空间.

证明 设 $x \in \mathrm{G}(\lambda)$,则有 $y \in \mathrm{H}$ 使 $x = (A - \lambda I)y$,所以

$$Ax = (A - \lambda I)Ay,$$

即 $Ax \in \mathrm{G}(\lambda)$,所以 $\mathrm{G}(\lambda)$ 是 A 的不变子空间. $\mathrm{E}(\lambda)$ 显然是 A 的不变子空间. ▍

引理 2 设$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ 是 A 的非零特征值的全体,则

$$\bigcap_n \mathrm{G}(\lambda_n) = \mathrm{E}(0).$$

证明 设 $\mathrm{N} = \bigcap_n \mathrm{G}(\lambda_n)$. 因为每个 $\mathrm{G}(\lambda_n)$ 都是 H 的闭子空间,所以 N 是 H 的闭子空间,从而 N 也是一个 Hilbert 空间. 下证 $\mathrm{N} \subset \mathrm{E}(0)$. 根据引理 1 易知 N 是 A 的不变子空间. 所以把 A 看成是 N 上的算子时它也是自共轭全连续线性算子. 如果 A 在 N 上不是零算子,则它有非零特征值 λ,于是必有 n_0 使 $\lambda = \lambda_{n_0}$. 这样一来,

$$\mathrm{N} \cap \mathrm{E}(\lambda_{n_0}) \neq \{0\}.$$

但 $\mathrm{N} \subset \mathrm{G}(\lambda_{n_0})$,故

$$\mathrm{E}(\lambda_{n_0}) \cap \mathrm{G}(\lambda_{n_0}) \neq \{0\},$$

此与 $E(\lambda_{n0}) = G(\lambda_{n0})^{\perp}$ 矛盾. 所以 A 作为 N 上的算子是零算子,即对所有 $x \in N, Ax = 0$. 所以 $N \subset E(0)$. 其次,由命题 3,4 易知

$$E(0) \subset G(\lambda_n)(n = 1,2,\cdots),$$

所以

$$E(0) \subset \bigcap_n G(\lambda_n) = N,$$

从而　$N = E(0)$, 即　$E(0) = \bigcap_n G(\lambda_n)$. ▌

现在设 $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ 是 A 的全体非零特征值, 由命题 2, 每个 $E(\lambda_i)$ 都是有限维的. 设 $E(\lambda_i)$ 的维数为 k_i. 在每个 $E(\lambda_i)$ 中取一个就范直交基底 $\{x_1^{(i)}, \cdots, x_{k_i}^{(i)}\}(i = 1,2,\cdots)$. 由命题 4 易知

$$\{x_j^{(i)} \mid 1 \leqslant j \leqslant k_i, i = 1,2,\cdots\}$$

是 H 中一个就范直交系,把它的元排成一列并记为 $e_1, e_2, \cdots, e_k, \cdots$ 并用 μ_k 表 e_k 所对应的特征值(以下 e_k, μ_k 的意义皆如此). $\{e_k\}$ 所张成的闭子空间记为 M. 因为

$$e_k \perp E(0) \quad (k = 1,2,\cdots),$$

所以 $M \perp E(0)$,从而 $M \subset \overline{G(0)}$.

定理 1　$H = M \oplus E(0)$,从而 $M = \overline{G(0)}$.

证明　设 $x \in H$,记

$$y = \sum_k (x, e_k) e_k \in M, \quad z = x - y.$$

因为

$$(z, e_k) = (x, e_k) - (y, e_k) = 0(k = 1,2,\cdots),$$

所以

$$z \perp E(\lambda_i)(i = 1,2,\cdots).$$

由命题 3,

$$z \in G(\lambda_i)(i = 1,2,\cdots),$$

所以

$$z \in \bigcap_i G(\lambda_i) = E(0)(\text{引理 } 2).$$

所以

$$\mathsf{H}=\mathsf{M}\oplus\mathsf{E}(0).$$

但已知

$$\mathsf{H}=\overline{\mathsf{G}(0)}\oplus\mathsf{E}(0),\quad \mathsf{M}\subset\overline{\mathsf{G}(0)}.$$

所以 $\mathsf{M}=\overline{\mathsf{G}(0)}$. ▌

系 1 $\{e_k\}$ 是 H 中完备就范直交系的充分必要条件是:零不是 A 的特征值.

系 2 设 $y\in\overline{\mathsf{G}(0)}$,那么,存在 $x\in\mathsf{H}$ 使 $y=Ax$ 的充分必要条件是级数

$$\sum_k\frac{(y,e_k)}{\mu_k}e_k \tag{11·4·1}$$

收敛.

由定理 1 不难证明下面的定理 2、3.

定理 2 H 中存在一个由 A 的特征向量组成的完备就范直交系。

定理 3 对任何 $x\in\mathsf{H}$

$$Ax=\sum_k(Ax,e_k)e_k=\sum_k(x,Ae_k)e_k=\sum_k\mu_k(x,e_k)e_k.$$

定理 4 设 $\lambda\neq0,\lambda\neq\mu_k(k=1,2,\cdots)$,则 $A-\lambda I$ 有定义在整个 H 上的有界逆 $(A-\lambda I)^{-1}$,且对任一 $x\in\mathsf{H}$ 有

$$(A-\lambda I)^{-1}x=-\frac{1}{\lambda}x-\frac{1}{\lambda}\sum_k\frac{\mu_k}{\lambda-\mu_k}(x,e_k)e_k. \tag{11·4·2}$$

证明 因为全连续线性算子的非零谱点都是特征值,故在定理条件下 λ 是 A 的正则值,所以 $(A-\lambda I)^{-1}$ 存在且有界. 下证(11·4·2).

首先指出,(11·4·2) 右端级数收敛. 事实上,当 A 有无穷多个特征值时必有 $\mu_k\to0(k\to\infty)$,所以

$$\alpha = \sup_k \left| \frac{\mu_k}{\lambda - \mu_k} \right| < \infty.$$

由此可知

$$\sum_k \left| \frac{\mu_k}{\lambda - \mu_k}(x, e_k) \right|^2 \leqslant \sum_k \alpha^2 |(x, e_k)|^2 \leqslant \alpha^2 \| x \|^2.$$

由 Riesz-Fiesher 定理即知(11·4·2) 右端级数对任何 x 都收敛. 设

$$y = -\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda}\sum_k \frac{\mu_k}{\lambda - \mu_k}(x, e_k)e_k, \qquad (11 \cdot 4 \cdot 3)$$

则

$$(y, e_k) = -\frac{1}{\lambda}(x, e_k) - \frac{\mu_k(x, e_k)}{\lambda(\lambda - \mu_k)} = -\frac{(x, e_k)}{\lambda - \mu_k}.$$

由定理 3,

$$Ay = \sum_k \mu_k(y, e_k)e_k = -\sum_k \frac{\mu_k}{\lambda - \mu_k}(x, e_k)e_k. \qquad (11 \cdot 4 \cdot 4)$$

比较(11·4·3)(11·4·4) 即得

$$y = -\frac{1}{\lambda}x + \frac{1}{\lambda}Ay,$$

所以 $x = Ay - \lambda y$ 即 $(A - \lambda I)^{-1}x = y$. ▌

当 $\lambda \neq 0$ 是 A 的特征值时我们有

定理 5　设 $\lambda = \lambda_{i0}$,则方程

$$Ax - \lambda_{i0}\, x = y \qquad (11 \cdot 4 \cdot 5)$$

有解的充分必要条件是 $y \perp \mathrm{E}(\lambda_{i_0})$,当有解时方程(11·4·5) 的一般解是

$$x = -\frac{1}{\lambda_{i0}}y - \frac{1}{\lambda_{i0}} \sum_{\mu_k \neq \lambda_{i_0}} \frac{\mu_k}{\lambda_{i_0} - \mu_k}(y, e_k)e_k + \omega,$$

其中 $\omega \in \mathrm{E}(\lambda_{i0})$.

这个定理的证明不难,留作习题.

作为前面定理的应用例子，我们给出

定理 6 设 $k(x,y)\in$ (实)$L^2([a,b]\times[a,b])$，$k(x,y)=k(y,x)$，A 表以 $k(x,y)$ 为核的积分算子：

$$A\varphi(x)=\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y,\ \forall\varphi\in(\text{实})L^2[a,b],$$

则：(i) A 有有限个或可列个特征值$\{\lambda_i\}$；

(ii) A 的对应于每个非零特征值 λ_i 的特征子空间是有限维的；

(iii) $L^2[a,b]$ 中存在一个由 A 的特征函数组成的完备就范直交系$\{\varphi_i(x)\}$；

(iv) 设 φ_i 所对应的特征值为 μ_i，则

$$k(x,y)=\sum_i\mu_i\varphi_i(x)\varphi_i(y)\quad(\text{按平均收敛}).\tag{11·4·6}$$

证明 因为 $A:L^2[a,b]\to L^2[a,b]$ 是自共轭全连续线性算子(见 §10·1 例 10·1·2 及 §11·3 例 11·3·1)．所以结论(i)(ii)(iii) 可以由命题 2 及定理 2 得出．下证(iv)．首先容易看出

$$\Phi_i(x,y)=\varphi_i(x)\varphi_i(y)(i=1,2,\cdots)$$

是 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中一个就范直交系．所以级数

$$\sum_i(k,\Phi_i)\Phi_i(x,y)$$

在 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中收敛．即

$$\sum_i\left(\int_a^b\int_a^b k(x,y)\varphi_i(x)\varphi_i(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\varphi_i(x)\varphi_i(y)$$
$$=\sum_i\left(\int_a^b\mu_i\varphi_i(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x\right)\varphi_i(x)\varphi_i(y)=\sum_i\mu_i\varphi_i(x)\varphi_i(y)$$

在 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中收敛．

根据定理 3，对任何 $\varphi(x)\in L^2[a,b]$ 有

$$\int_a^b k(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=\sum_i\mu_i\left(\int_a^b\varphi_i(y)\varphi(y)\mathrm{d}y\right)\varphi_i(x)$$

(在 $L^2[a,b]$ 中上式右端级数收敛于左端)，所以对任何 $f(x) \in L^2[a,b]$，

$$\begin{aligned}&\int_a^b\int_a^b k(x,y)\varphi(y)f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&= \sum_i \mu_i \int_a^b\int_a^b \varphi_i(y)\varphi_i(x)\varphi(y)f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\\&= \int_a^b\int_a^b \left(\sum_i \mu_i\varphi_i(x)\varphi_i(y)\right)\varphi(y)f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

再注意到形如 $\varphi(y)f(x)$ 的函数及其有限线性组合的全体在 $L^2([a,b]\times[a,b])$ 中稠密，故按平均收敛

$$k(x,y) = \sum_i \mu_i\varphi_i(x)\varphi_i(y).\ \blacksquare$$

§11·5　投影算子

设 L 是 Hilbet 空间 H 的一个闭子空间，由直交分解定理，

$$\mathsf{H} = \mathsf{L} \oplus \mathsf{L}^{\perp}$$

即对任一 $x \in \mathsf{H}$，皆可唯一地表示成

$$x = y + z,$$

其中 $y \in \mathsf{L}, z \in \mathsf{L}^{\perp}$. 利用此直交分解，我们可定义一个算子

$$P_L: x \longmapsto y.$$

显然，$P_L(\mathsf{H}) = \mathsf{L}$. 我们称 P_L 为将 H 投影到子空间 L 上的**投影算子**. 容易验证，P_L 是有界线性算子，且当 $\mathsf{L} \neq \{0\}$ 时，$\| P_L \| = 1$.

事实上，设

$$x_1 = y_1 + z_1, x_2 = y_2 + z_2, y_1, y_2 \in \mathsf{L}, z_1, z_2 \in \mathsf{L}^{\perp},$$

则

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = (\alpha y_1 + \beta y_2) + (\alpha z_1 + \beta z_2),$$

因 $\mathsf{L}, \mathsf{L}^{\perp}$ 都是 H 的子空间，故

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathsf{L},\quad \alpha z_1 + \beta z_2 \in \mathsf{L}^{\perp},$$

从而

$$P_L(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha y_1+\beta y_2=\alpha P_L x_1+\beta P_L x_2,$$

故 P_L 是线性的. 又对任一 $x\in \mathrm{H}$, $x=y+z$, $y\in \mathrm{L}$, $z\in \mathrm{L}^{\perp}$, 有 $z\perp y$, 从而

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\|y+z\|^2=\|y\|^2+\|z\|^2\\&\geqslant \|y\|^2=\|P_L x\|^2,\end{aligned}$$

故 $\|P_L\|\leqslant 1$. 又若 $x\in \mathrm{L}$, $x\neq 0$, 则 $P_L x=x$, 故

$$\|x\|=\|P_L x\|\leqslant \|P_L\|\,\|x\|,$$

因此 $\|P_L\|\geqslant 1$, 从而 $\|P_L\|=1$.

定理 1 线性算子 $P:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 是投影算子的充分必要条件是:

1) P 是自共轭算子,

2) $P^2=P$.

证明 必要性. 设 P 是投影算子, $P(\mathrm{H})=\mathrm{L}$. 对任意 x_1, $x_2\in\mathrm{H}$, 令 $y_1=Px_1$, $y_2=Px_2$, 则:

$$z_1=x_1-y_1\in\mathrm{L}^{\perp},\quad z_2=x_2-y_2\in\mathrm{L}^{\perp},$$

从而

$$\begin{aligned}(Px_1,x_2)&=(y_1,y_2+z_2)=(y_1,y_2);\\(x_1,Px_2)&=(y_1+z_1,y_2)=(y_1,y_2),\end{aligned}$$

故

$$(Px_1,x_2)=(x_1,Px_2).$$

即 P 是自共轭的.

又对任一 $y\in\mathrm{L}$, 有 $Py=y$, 及对任一 $x\in\mathrm{H}$ 有 $Px\in\mathrm{L}$, 故

$$P^2x=P(Px)=Px,$$

即 $P^2=P$.

充分性. 设 $P=P^2$ 是自共轭算子, $\mathrm{L}=P(\mathrm{H})$, 则 L 是 H 的一个子空间. 我们证明 L 是 H 的闭子空间. 设 $y_n\in\mathrm{L}$, $y_n\to y$, 则有 $x_n\in\mathrm{H}$, $Px_n=y_n$. 从而

$$Py_n=P^2x_n=Px_n=y_n,$$

但由 P 的连续性知，$Py_n \to Py$，因此 $y_n \to Py$，再由极限的唯一性，$y = Py \in \mathsf{L}$，即 L 是闭的. 现在我们证明 $P = P_L$. 为此，显然只需证明对任意 $x \in \mathsf{H}$，有 $x - Px \perp \mathsf{L}$. 又因为 $P(\mathsf{H}) = \mathsf{L}$，故只需证明，对任意的 $x, x' \in \mathsf{H}$，有 $x - Px \perp Px'$. 但这可由 P 的自共轭性及 $P^2 = P$ 推出：

$$\begin{aligned}(x - Px, Px') &= (P(x - Px), x') = (Px - P^2x, x') \\ &= (Px - Px, x') = 0. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

定义 1　如果 $P_{L_1}P_{L_2} = 0$，则称投影算子 P_{L_1} 与 P_{L_2} 是**直交**的，记作 $P_{L_1} \perp P_{L_2}$.

注　$P_{L_1}P_{L_2} = 0$ 的充分必要条件是 $P_{L_2}P_{L_1} = 0$.

事实上，若 $P_{L_1}P_{L_2} = 0$，则

$$0 = 0^* = (P_{L_1}P_{L_2})^* = P_{L_2}^*P_{L_1}^* = P_{L_2}P_{L_1}$$

反之，$P_{L_2}P_{L_1} = 0$，则

$$P_{L_1}P_{L_2} = P_{L_1}^*P_{L_2}^* = (P_{L_2}P_{L_1})^* = 0^* = 0.$$

引理 1　$P_{L_1} \perp P_{L_2}$ 的充分必要条件是 $\mathsf{L}_1 \perp \mathsf{L}_2$.

证明　必要性. 设 $P_{L_1} \perp P_{L_2}$，即 $P_{L_1}P_{L_2} = 0$，则对任意 $x_1 \in \mathsf{L}_1, x_2 \in \mathsf{L}_2$，皆有

$$(x_1, x_2) = (P_{L_1}x_1, P_{L_2}x_2) = (x_1, P_{L_1}P_{L_2}x_2) = (x_1, 0) = 0.$$

充分性. 设 $\mathsf{L}_1 \perp \mathsf{L}_2$，则对任意 $x \in \mathsf{H}$，皆有 $P_{L_2}x \in \mathsf{L}_2$，从而 $P_{L_1}P_{L_2}x = 0$. 即 $P_{L_1}P_{L_2} = 0$. $\blacksquare$

定理 2　$P_{L_1} + P_{L_2}$ 仍是投影算子的充分必要条件是 $P_{L_1} \perp P_{L_2}$. 且在此时有

$$P_{L_1} + P_{L_2} = P_{L_1 \oplus L_2}. \qquad (11 \cdot 5 \cdot 1)$$

证明　必要性. 设 $P_{L_1} + P_{L_2}$ 是投影算子，则根据定理 1，有

$$(P_{L_1} + P_{L_2})^2 = P_{L_1} + P_{L_2},$$

因此有

$$P_{L_1}P_{L_2} + P_{L_2}P_{L_1} = 0, \qquad (11 \cdot 5 \cdot 2)$$

以 P_{L_1} 左乘之，即得

$$P_{L_1}P_{L_2}+P_{L_1}P_{L_2}P_{L_1}=0, \tag{11·5·3}$$

再以 P_{L_1} 右乘上式,即得

$$P_{L_1}P_{L_2}P_{L_1}=0, \tag{11·5·4}$$

由(11·5·3)、(11·5·4) 即知 $P_{L_1}P_{L_2}=0$.

充分性. 设 $P_{L_1}\perp P_{L_2}$,则

$$P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}P_{L_1}=0,$$

从而

$$(P_{L_1}+P_{L_2})^2=P_{L_1}^2+P_{L_1}P_{L_2}+P_{L_2}P_{L_1}+P_{L_2}^2=P_{L_1}+P_{L_2},$$

再注意到 $P_{L_1}+P_{L_2}$ 也是自共轭的,根据定理 1 即知 $P_{L_1}+P_{L_2}$ 是投影算子.

最后证明(11·5·1) 式. 由引理 1 知 $L_1\perp L_2$. 设 $x\in H$,则

$$(P_{L_1}+P_{L_2})x=P_{L_1}x+P_{L_2}x=y_1+y_2\in L_1\oplus L_2.$$

又若 $x\in L_1\oplus L_2$,可设 $x=y_1+y_2$,$y_1\in L_1$,$y_2\in L_2$,于是

$$(P_{L_1}+P_{L_2})x=P_{L_1}x+P_{L_2}x=y_1+y_2=x,$$

由此可知(11·5·1) 式成立. ▌

定理 3 $P_{L_1}P_{L_2}$ 仍是投影算子的充分必要条件是 P_{L_1} 与 P_{L_2} 可交换,即 $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}P_{L_1}$. 且在此有

$$P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_1\cap L_2}. \tag{11·5·5}$$

证明 必要性. 设 $P_{L_1}P_{L_2}$ 是投影算子,则根据定理 1,有

$$P_{L_1}P_{L_2}=(P_{L_1}P_{L_2})^*=P_{L_2}{}^*P_{L_1}{}^*=P_{L_2}P_{L_1}.$$

充分性. 若 $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}P_{L_1}$,则 $P_{L_1}P_{L_2}$ 是自共轭的且

$$(P_{L_1}P_{L_2})^2=P_{L_1}P_{L_2}P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_1}^2P_{L_2}^2=P_{L_1}P_{L_2},$$

根据定理 1 即知 $P_{L_1}P_{L_2}$ 是投影算子.

最后证明(11·5·5) 式. 事实上,若 $x\in H$,则

$$P_{L_1}P_{L_2}x=P_{L_2}P_{L_1}x,$$

故 $P_{L_1}P_{L_2}x\in L_1\cap L_2$. 又若 $x\in L_1\cap L_2$,则

$$P_{L_1}P_{L_2}x=P_{L_1}x=x,$$

因此(11·5·5) 成立. ▌

定义 2　如果 $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}$，则称 P_{L_2} 是 P_{L_1} 的部分算子，记为 $P_{L_2}\leqslant P_{L_1}$.

注　显然，$P_{L_2}\leqslant P_{L_1}$ 的充分必要条件是 $P_{L_2}P_{L_1}=P_{L_2}$.

引理 2　$P_{L_2}\leqslant P_{L_1}$ 的充分必要条件是 $\mathrm{L}_2\subset\mathrm{L}_1$.

证明　若 $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}$，则

$$\mathrm{L}_2=P_{L_2}(\mathrm{H})=P_{L_1}P_{L_2}(\mathrm{H})=P_{L_1}(\mathrm{L}_2)\subset\mathrm{L}_1.$$

反之，若 $\mathrm{L}_2\subset\mathrm{L}_1$，则对任意 $x\in\mathrm{H}$，$P_{L_2}x\in\mathrm{L}_2\subset\mathrm{L}_1$，故 $P_{L_1}(P_{L2}x)=P_{L_2}x$. 即 $P_{L_1}P_{L_2}=P_{L_2}$. ▌

定理 4　$P_{L_2}\leqslant P_{L_1}$ 的充分必要条件是：对任意的 $x\in\mathrm{H}$，皆有

$$\|P_{L_2}x\|\leqslant\|P_{L_1}x\|. \tag{11·5·6}$$

证明　必要性. 由 $P_{L_2}P_{L_1}=P_{L_2}$，那么对任意 $x\in\mathrm{H}$ 有

$$\|P_{L_2}x\|=\|P_{L_2}P_{L_1}x\|\leqslant\|P_{L_2}\|\cdot\|P_{L_1}x\|\leqslant\|P_{L_1}x\|.$$

充分性. 设(11·5·6)对任意 $x\in\mathrm{H}$ 成立，那么，当 $x\in\mathrm{L}_2$ 时，

$$\|x\|=\|P_{L_2}x\|\leqslant\|P_{L_1}x\|\leqslant\|P_{L_1}\|\,\|x\|\leqslant\|x\|,$$

因此

$$\|P_{L_1}x\|=\|x\|. \tag{11·5·7}$$

但 $x=P_{L_1}x+(x-P_{L_1}x)$，$x-P_{L1}x\in\mathrm{L}_1^{\perp}$，故

$$\|x\|^2=\|P_{L_1}x\|^2+\|x-P_{L_1}x\|^2,$$

从而，再注意到(11·5·7)，即得

$$x-P_{L_1}x=0.$$

即 $x=P_{L_1}x\in\mathrm{L}_1$，即 $\mathrm{L}_2\subset\mathrm{L}_1$. 由引理 2，$P_{L_2}\leqslant P_{L_1}$. ▌

定理 5　$P_{L_1}-P_{L_2}$ 是投影算子的充分必要条件是 $P_{L_2}\leqslant P_{L_1}$. 且在此时有

$$P_{L_1}-P_{L_2}=P_{L_1\ominus L_2}, \tag{11·5·8}$$

其中 $\mathrm{L}_1\ominus\mathrm{L}_2$ 表 L_2 在 L_1 中的直交余空间.

证明　充分性. 设 $P_{L_2}\leqslant P_{L_1}$，于是

$$\mathrm{L}_1=\mathrm{L}_2\oplus(\mathrm{L}_1\ominus\mathrm{L}_2).$$

根据定理 2

$$P_{L_1}=P_{L_2}+P_{L_1\ominus L_2}$$

从而

$$P_{L_1} - P_{L_2} = P_{L_1 \ominus L_2}$$

是投影算子,且有表示式(11·5·8).

必要性. 设 $P_{L_1} - P_{L_2}$ 是投影算子,记为 P_L,即

$$P_{L_1} - P_{L_2} = P_L,$$

则

$$P_{L_2} + P_L = P_{L_1}.$$

根据定理 2,此时有表示式

$$P_{L_2} + P_L = P_{L_2 \oplus L}, \quad L_2 \perp L,$$

故 $L_1 = L_2 \oplus L$,即 $L_2 \subset L_1$,亦即 $P_{L_2} \leqslant P_{L_1}$. ▌

系 1 若 $P = P_L$ 是投影算子,则 $I - P$ 也是投影算子,且

$$I - P = P_{L^{\perp}}.$$

§11·6 非负算子

定义 1 设 $A: H \to H$ 是自共轭算子,如果对任意 $x \in H$,皆有 $(Ax, x) \geqslant 0$,则称 A 是**非负算子**,记作 $A \geqslant 0$. 非负算子称为**正算子**,如果至少对某 $x \in H$,有 $(Ax, x) > 0$,亦即,若 $A \geqslant 0$ 且 $A \neq 0$,则称 A 为正算子,记作 $A > 0$.

定义 2 设 A, B 都是自共轭算子,如果 $A - B \geqslant 0$,则称 A **不小于** B(或称 B 不大于 A),记为 $A \geqslant B$(或 $B \leqslant A$),而如果 $A - B > 0$,则称 A **大于** B(或称 B 小于 A),记为 $A > B$($B < A$).

注 1 设 A, B 自共轭. 易知,$A \geqslant B$ 的充分必要条件是对一切 $x \in H$ 皆有

$$(Ax, x) \geqslant (Bx, x). \tag{11·6·1}$$

而 $A > B$ 的充分必要条件是,除(1) 外还至少对某 $x_0 \in H$ 有

$$(Ax_0, x_0) > (Bx_0, x_0). \tag{11·6·2}$$

注 2 对任何自共轭算子 A,皆有 $A^2 \geqslant 0$.

注 3 对任何投影算子 P,皆有 $0 \leqslant P \leqslant I$.

定理 1　若 $A \geqslant 0, B \geqslant 0$ 且 $AB = BA$，则 $AB \geqslant 0$.

证明　不失一般性，设 $A \neq 0$. 分两步证明.

1° 定义一算子列 $A_n, n = 1,2,\cdots$

$$A_1 = \frac{1}{\|A\|}A, \quad A_{n+1} = A_n - A_n^2, \quad n = 1,2,\cdots \tag{11·6·3}$$

我们证明 $0 \leqslant A_n \leqslant I$. 用归纳法.

首先，显然有 $0 \leqslant A_1 \leqslant I$；

现在设 $0 \leqslant A_n \leqslant I$，则 $0 \leqslant I - A_n \leqslant I$，由

$$\begin{aligned}(A_n^2(I - A_n)x, x) &= (A_n(I - A_n)x, A_n x) \\ &= ((I - A_n)A_n x, A_n x) \geqslant 0,\end{aligned}$$

得

$$A_n^2(I - A_n) \geqslant 0. \tag{11·6·4}$$

同理可得

$$A_n(I - A_n)^2 \geqslant 0. \tag{11·6·5}$$

由(11·6·4)、(11·6·5) 即得

$$A_n - A_n^2 = A_n^2(I - A_n) + A_n(I - A_n)^2 \geqslant 0.$$

即

$$A_{n+1} \geqslant 0. \tag{11·6·6}$$

再由假设 $I - A_n \geqslant 0$，及 $A_n^2 \geqslant 0$ 得

$$I - (A_n - A_n^2) = (I - A_n) + A_n^2 \geqslant 0,$$

即

$$I \geqslant A_n - A_n^2 = A_{n+1}. \tag{11·6·7}$$

结合(11·6·6)(11·6·7) 即知 $0 \leqslant A_{n+1} \leqslant I$. 按归纳法原理对所有 $n = 1,2,\cdots$ 皆有 $0 \leqslant A_n \leqslant I$.

2° 由(11·6·3) 知

$$\begin{aligned}A_1 &= A_1^2 + A_2 \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_3 \\ &= \cdots \\ &= A_1^2 + \cdots + A_n^2 + A_{n+1}.\end{aligned}$$

因为 $A_{n+1}\geqslant 0$，所以

$$A_1^2+\cdots+A_n^2\leqslant A_1,n=1,2,\cdots \qquad (11\cdot 6\cdot 8)$$

于是，对任意 $x\in \mathrm{H}$，有

$$\sum_{i=1}^{n}\|A_ix\|^2=\sum_{i=1}^{n}(A_ix,A_ix)=\sum_{i=1}^{n}(A_i^2x,x)$$

$$=((\sum_{i=1}^{n}A_i^2)x,x)\leqslant(A_1x,x).$$

这意味着级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\|A_ix\|^2$ 收敛，从而 $\|A_ix\|\to 0$(当 $i\to\infty$). 这样一来，我们有

$$\sum_{i=1}^{n}A_i^2x=A_1x-A_{n+1}x\to A_1x,\quad (n\to\infty). \qquad (11\cdot 6\cdot 9)$$

由于 A 与 B 可交换，由 A_n 的定义，所有的 A_n 都与 B 可交换. 所以，对任意 $x\in \mathrm{H}$ 有

$$(ABx,x)=\|A\|(A_1Bx,x)=\|A\|(\sum_{i=1}^{\infty}A_i^2Bx,x)$$

$$=\|A\|\sum_{i=1}^{\infty}(A_i^2Bx,x)=\|A\|\sum_{i=1}^{\infty}(BA_ix,A_ix)\geqslant 0.$$

即 $AB\geqslant 0$. ▌

引理 1 设自共轭算子列 $\{A_n\}$ 以及自共轭算子 B 满足条件：

i) $A_1\leqslant A_2\leqslant\cdots\leqslant A_n\leqslant A_{n+1}\leqslant\cdots\leqslant B$；

ii) 任意两个 A_{n_1},A_{n_2} 可交换，且每个 A_n 与 B 也可交换.

那么 $\{A_n\}$ 必强收敛于某自共轭算子 A，且

$$A_n\leqslant A\leqslant B,\quad n=1,2,\cdots \qquad (11\cdot 6\cdot 10)$$

证明 令

$$\widetilde{A_n}=B-A_n,$$

则 $\widetilde{A_n}\geqslant 0$，且 $\widetilde{A_n}$ 与 $\widetilde{A_m}$ 可交换，$\widetilde{A_n}$ 与 $\widetilde{A_n}-\widetilde{A_m}$ 也可交换；并且，当 $n<m$ 时，$\widetilde{A_n}-\widetilde{A_m}\geqslant 0$，从而当 $n<m$ 时

$$\widetilde{A}_n(\widetilde{A}_n-\widetilde{A}_m)\geqslant 0,(\widetilde{A}_n-\widetilde{A}_m)\widetilde{A}_m\geqslant 0,$$

因此

$$\widetilde{A}_n^2\geqslant\widetilde{A}_n\widetilde{A}_m\geqslant\widetilde{A}_m^2(n<m).\qquad(11\cdot 6\cdot 11)$$

由(11・6・11),对任意 $x\in\mathrm{H}$:

$$\|\widetilde{A}_nx\|^2=(\widetilde{A}_n^2x,x)\geqslant(\widetilde{A}_n\widetilde{A}_mx,x)\geqslant(\widetilde{A}_m^2x,x)$$

$$=\|\widetilde{A}_mx\|^2\geqslant 0\quad(n<m).\qquad(11\cdot 6\cdot 12)$$

(11・6・12) 表明$\{(\widetilde{A}_n^2x,x)\}$是一单调下降的非负数列,因而是一基本列,从而

$$\|\widetilde{A}_nx-\widetilde{A}_mx\|^2=(\widetilde{A}_nx-\widetilde{A}_mx,\widetilde{A}_nx-\widetilde{A}_mx)$$

$$=(\widetilde{A}_nx,\widetilde{A}_nx)-2(A_nx,A_mx)+(\widetilde{A}_mx,\widetilde{A}_mx)$$

$$\leqslant|(\widetilde{A}_n^2x,x)-(\widetilde{A}_m^2x,x)|\to 0\quad(n,m\to\infty).$$

因此,$\{\widetilde{A}_nx\}$ 也是基本列,又因为 $A_n=B-\widetilde{A}_n$,所以$\{A_nx\}$ 也是基本列,从而必收敛,设

$$\lim_{n\to\infty}A_nx=Ax\qquad\forall x\in\mathrm{H},\qquad(11\cdot 6\cdot 13)$$

因为$\{\|A_n\|\}$有界,所以 A 是有界线性算子. 设 x、$y\in\mathrm{H}$,由

$$(Ax,y)=\lim_{n\to\infty}(A_nx,y)=\lim_{n\to\infty}(x,A_ny)=(x,Ay)$$

知,A 也是自共轭算子,最后由(A_nx,x) 单调上升,且$(A_nx,x)\leqslant(Bx,x)$,得知

$$(A_nx,x)\leqslant\lim_{n\to\infty}(A_nx,x)\leqslant(Bx,x),$$

即

$$A_n\leqslant A\leqslant B.\ \blacksquare$$

定理 2　设 $A\geqslant 0$,则有唯一的 $B\geqslant 0$ 存在,使 $A=B^2$,并且,任何与 A 可交换的线性算子也与 B 可交换.

证明 不失一般性,可设 $A\leqslant I$,否则,我们以 $\frac{A}{\|A\|}$ 代替 A 进行讨论.令

$$B_0=0,\quad B_{n+1}=B_n+\frac{1}{2}(A-B_n{}^2)\quad n=0,1,\cdots \tag{11·6·14}$$

显然,所有的 $B_n(n=0,1,\cdots)$ 都是自共轭算子,并且,

(i) 所有的 B_n 与 A 可交换;

(ii) 某线性算子如果与 A 可交换,则它也必与所有的 B_n 可交换.

因此,特别有 $B_nB_m=B_mB_n$,由

$$\begin{aligned}I-B_{n+1}&=I-B_n-\frac{1}{2}(A-B_n{}^2)\\&=\frac{1}{2}(I-B_n)^2+\frac{1}{2}(I-A)\end{aligned} \tag{11·6·15}$$

可知,对所有的 n,皆有 $B_n\leqslant I$,然后由

$$\begin{aligned}B_{n+1}-B_n&=B_n-B_{n-1}+\frac{1}{2}(B_{n-1}^2-B_n^2)\\&=(B_n-B_{n-1})[I-\frac{1}{2}(B_n+B_{n-1})]\end{aligned} \tag{11·6·16}$$

及

$$B_1-B_0=\frac{1}{2}A\geqslant 0 \tag{11·6·17}$$

不难看出,对所有 $n=0,1,\cdots$ 皆有 $B_{n+1}\geqslant B_n$.即 $\{B_n\}$ 是单调上升的有界序列.根据引理 1,$\{B_n\}$ 强收敛于某非负算子 B.在强收敛意义下在(11·6·14)两边取极限即得

$$B=B+\frac{1}{2}(A-B^2),$$

从而 $A=B^2$.由于任何与 A 可交换的线性算子与所有的 B_n 可交换,因而也与 B 可交换.最后还要证明 B 的唯一性.

设 $B' \geqslant 0, B'^2 = A$ 且任意与 A 可交换的线性算子与 B' 可交换. 于是，B 与 B' 可交换. 任取 $x \in \mathsf{H}$，令 $y = (B - B')x$，则

$$\begin{aligned}(By, y) + (B'y, y) &= ((B + B')y, y) \\ &= ((B + B')(B - B')x, y) = ((B^2 - B'^2)x, y) \\ &= ((A - A)x, x) = 0.\end{aligned}$$

由于 $(By, y) \geqslant 0, (B'y, y) \geqslant 0$，故

$$(By, y) = (B'y, y) = 0.$$

由存在性的证明，可取 $C \geqslant 0$，使 $C^2 = B$，于是

$$(Cy, Cy) = (C^2 y, y) = (By, y) = 0.$$

上式表明 $Cy = 0$，从而 $By = C^2 y = 0$，同理可证，$B'y = 0$，从而

$$\begin{aligned}\| Bx - B'x \|^2 &= (Bx - B'x, Bx - B'x) \\ &= ((B - B')y, x) = 0,\end{aligned}$$

故 $Bx = B'x$. 由此可知 $B = B'$. ▌

满足定理条件的 B 叫做 A 的正平方根，记为 $\sqrt{A}$ 或 $A^{\frac{1}{2}}$.

例 11·6·1　在 $L^2[0,1]$ 上考虑算子 A：

$$Ax(t) = tx(t),$$

显然 $A > 0$，其正平方根 $A^{\frac{1}{2}}$ 由下式给出：

$$A^{\frac{1}{2}} x(t) = \sqrt{t} x(t).$$

§11·7　自共轭算子的谱分解

11·7·1　自共轭全连续算子的谱分解(续 §11·4)

在 §11·4 中我们讨论了自共轭全连续算子 A 的谱. 由 §11·4 定理 2，对任意的 $x \in \mathsf{H}$，

$$Ax = \sum_{k \geqslant 1} \mu_k (x, e_k) e_k, \qquad (11 \cdot 7 \cdot 1)$$

式中 μ_k 为 e_k 所对应的特征值. 回忆 §11·4 引理 2 前面关于 e_k 及

$x_j^{(i)}$ 的说明,那么(11・7・1)式可以写成

$$Ax=\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n\Big(\sum_{j=1}^{k_n}(x,x_j^{(n)})x_j^{(n)}\Big). \qquad (11\cdot 7\cdot 2)$$

以 $\mathsf{E}(\lambda_n)$ 表 A 的对应于 λ_n 的特征子空间,P_{λ_n} 表在 $\mathsf{E}(\lambda_n)$ 上的直交投影算子,那么

$$\sum_{j=1}^{k_n}(x,x_j^{(n)})x_j^{(n)}=P_{\lambda_n}x.$$

于是

$$Ax=\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n P_{\lambda_n}x,$$

即按算子的强收敛有

$$A=\sum_{n\geqslant 1}\lambda_n P_{\lambda_n}. \qquad (11\cdot 7\cdot 3)$$

(11・7・3)式表明 Hilbert 空间上的全连续自共轭算子可以按谱进行分解.在有限维情形下它相当于把对称阵化为对角形.表达式(11・7・3)通常称为**全连续自共轭算子 A 的谱分解**.

Hilbert 空间上的自共轭算子一般来说没有形如(11・7・3)式的谱分解,下面将看到它有与(11・7・3)类似的积分形式的谱分解.

11・7・2 自共轭算子的谱分解

引理 1 设自共轭算子 A 与 B 满足 $AB=BA$,$A^2=B^2$.令

$$\mathsf{L}=\{x\,|\,(A-B)x=0\},\quad P=P_L,$$

则投影算子 P 满足下列三个条件:

1) 与 $A-B$ 可交换的任何线性连续算子与 P 可交换;

2) 如果 $Ax=0$,则 $Px=x$;

3) $A=(2P-I)B$.

证明 1) 设线性连续算子 C 与 $A-B$ 可交换.于是,当 $y\in\mathsf{L}$ 时,必有 $Cy\in\mathsf{L}$.对任意 $x\in\mathsf{H}$,$Px\in\mathsf{L}$,从而

$$CPx\in\mathsf{L},\quad PCPx=CPx,$$

由 x 之任意性得 $CP = PCP$. 由于 C^* 与 $A-B$ 可交换,同理可得 $C^*P = PC^*P$. 然后,由下式即得 $CP = PC$:

$$PC = (C^*P)^* = (PC^*P)^* = PCP = CP.$$

2) 设 $Ax = 0$,则

$$\|Bx\|^2 = (Bx,Bx) = (B^2x,x) = (A^2x,x) = (Ax,Ax) = 0,$$

即 $Bx = 0$,$(A-B)x = Ax - Bx = 0$,所以 $x \in \mathsf{L}$,当然有 $Px = x$.

3) 由于 $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 = 0$,故对任意 $x \in \mathsf{H}$,有 $(A+B)x \in \mathsf{L}$,从而

$$P(A+B)x = (A+B)x, \forall x \in \mathsf{H},$$

即 $P(A+B) = A+B$. 再由 $P(A-B) = (A-B)P = 0$ 即得

$$P(A+B) - P(A-B) = A+B,$$

即 $A = (2P-I)B$. ▌

引理 2　对于每个自共轭算子 A,令

$$\mathsf{L} = \{x \mid (A - \sqrt{A^2})x = 0\}, \quad I_+ = P_L.$$

则所得的投影算子 I_+ 满足

1) 任何与 A 可交换的线性连续算子均与 I_+ 可交换;

2) 若 $Ax = 0$,则 $I_+x = x$;

3) $AI_+ \geqslant 0$,$A(I-I_+) \leqslant 0$.

证明　令 $B = \sqrt{A^2}$. A、B 满足引理 1 的条件.

$$\mathsf{L} = \{x \mid (A-B)x = 0\}, I_+ = P_L.$$

1) 任何与 A 可交换的线性连续算子与 B 可交换,从而与 $A-B$ 可交换,由引理 1,它也与 I_+ 可交换. 2) 显然成立.

3) 显然 $(A-B)I_+ = 0$,由于 $B \geqslant 0$,$I_+ \geqslant 0$,B 与 I_+ 可交换,根据 §11·6 定理 1,$BI_+ = I_+B \geqslant 0$,于是 $AI_+ = BI_+ \geqslant 0$. 由引理 1,

$$A = (2I_+ - I)B,$$

故

$$A(I-I_+) = (2I_+ - I)B(I-I_+)$$
$$= (2I_+ - I)(I-I_+)B = -(I-I_+)B \leqslant 0. \blacksquare$$

注 由 $A = (2I_+ - I)B$ 知 $BI_+ = \frac{1}{2}(A+B)$，又

$$AI_+ = (2I_+ - I)BI_+ = I_+ B = BI_+,$$

故得

$$AI_+ = \frac{1}{2}(A+B);$$

$$A(I-I_+) = \frac{1}{2}(A-B).$$

显然 $A = AI_+ + A(I-I_+)$.

算子 AI_+ 叫做 A 的正部分算子，记为 A_+；$A(I-I_+)$ 叫做 A 的负部分算子，记为 A_-. 由引理 2 知 $A_+ \geqslant 0, A_- \leqslant 0$.

定理 1 （自共轭算子的谱分解）设 A 是自共轭算子，则必有投影算子族 $\{E_\lambda\}(-\infty < \lambda < +\infty)$ 存在，满足

1) E_λ 必与任何与 A 可交换的线性连续算子可交换；

2) 若 $\lambda < \mu$，则 $E_\lambda \leqslant E_\mu$；

3) 在强收敛意义下，E_λ 右连续，即对任何 $x \in \mathrm{H}$，

$$\lim_{\mu\to\lambda+0} E_\mu x = E_\lambda x;$$

4) 当 $-\infty < \lambda < m$ 时，$E_\lambda = 0$；而当 $M \leqslant \lambda < +\infty$ 时，$E_\lambda = I$；这里 m、M 分别表 A 的下界与上界. 并且

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda \mathrm{d}E_\lambda, \qquad (11 \cdot 7 \cdot 4)$$

其中 ε 是任意正数，式中积分理解为积分和在算子空间中一致收敛意义下的极限.

证明 对于任何实数 λ，应用引理 2 于 $-A_\lambda = \lambda I - A$，把所得的投影算子记作 E_λ.

1) 与 A 可交换的线性连续算子均与 $-A_\lambda$ 可交换，由引理 2，

投影算子族$\{E_\lambda\}$满足定理的条件 1). 特别,E_λ 与 E_μ 可交换.

条件 2) 的证明:设 $\lambda<\mu$,根据引理 2 我们有

$$(\lambda I-A)E_\lambda\geqslant 0,\quad (\mu I-A)(I-E_\mu)\leqslant 0. \tag{11·7·5}$$

把 $I-E_\mu\geqslant 0$,$E_\lambda\geqslant 0$ 与(11·7·5)中两式分别相乘,并注意到它们彼此可交换,即得

$$(\lambda I-A)E_\lambda(I-E_\mu)\geqslant 0;$$
$$(\mu I-A)(I-E_\mu)E_\lambda\leqslant 0.$$

它们两边分别相减,即得

$$(\lambda I-\mu I)E_\lambda(I-E_\mu)\geqslant 0,$$
$$(\lambda-\mu)E_\lambda(I-E_\mu)\geqslant 0.$$

因 $\lambda-\mu<0$,故有

$$E_\lambda(I-E_\mu)\leqslant 0. \tag{11·7·6}$$

另一方面,由 $E_\lambda\geqslant 0$,$I-E_\mu\geqslant 0$,E_λ 与 $I-E_\mu$ 可交换,根据 §11·6 定理 1,又有

$$E_\lambda(I-E_\mu)\geqslant 0. \tag{11·7·7}$$

结合(11·7·6),(11·7·7)即得

$$E_\lambda(I-E_\mu)\geqslant 0,$$

即

$$E_\lambda\leqslant E_\mu.$$

条件 3) 的证明:由条件 2),$(E_\lambda x,x)$ 是 λ 的增函数,即当 $\lambda<\mu$ 时,$(E_\lambda x,x)\leqslant(E_\mu x,x)$ 因此 $\lim\limits_{\mu\to\lambda+0}(E_\mu x,x)$ 存在有限. 从而当 μ_1,$\mu_2\to\lambda+0$ 时,

$$\begin{aligned}\|E_{\mu_1}x-E_{\mu_2}x\|^2&=((E_{\mu_1}-E_{\mu_2})x,(E_{\mu_1}-E_{\mu_2})x)\\&=\|((E_{\mu_1}-E_{\mu_2})^2x,x)\|=\|((E_{\mu_1}-E_{\mu_2})x,x)\|\\&=\|(E_{\mu_1}x,x)-(E_{\mu_2}x,x)\|\to 0,\end{aligned}$$

从而 $\lim\limits_{\mu\to\lambda+0}E_\mu x$ 存在,令

$$\lim_{\mu\to\lambda+0} E_\mu x = E_{\lambda+0} x.$$

容易看出 $E_{\lambda+0}$ 是投影算子，且 $E_{\lambda+0} \geqslant E_\lambda$. 下面证明 $E_{\lambda+0} = E_\lambda$. 设 $\mu > \lambda$，则

$$E_\mu(E_\mu - E_\lambda) = E_\mu - E_\lambda;$$

$$(I - E_\lambda)(E_\mu - E_\lambda) = E_\mu - E_\lambda.$$

再由

$$(\mu I - A)E_\mu \geqslant 0, \quad (\lambda I - A)(I - E_\lambda) \leqslant 0$$

可得

$$(\lambda I - A)(E_\mu - E_\lambda) = (\lambda I - A)(I - E_\lambda)(E_\mu - E_\lambda) \leqslant 0; \tag{11·7·8}$$

$$(\mu I - A)(E_\mu - E_\lambda) = (\mu I - A)E_\mu(E_\mu - E_\lambda) \geqslant 0. \tag{11·7·9}$$

在(11·7·8)、(11·7·9)中令 $\mu \to \lambda + 0$，则在算子强收敛意义下有

$$(\lambda I - A)(E_{\lambda+0} - E_\lambda) \leqslant 0;$$

$$(\lambda I - A)(E_{\lambda+0} - E_\lambda) \geqslant 0,$$

因此

$$(\lambda I - A)(E_{\lambda+0} - E_\lambda) = 0,$$

即对任意 $x \in H$，有

$$(\lambda I - A)(E_{\lambda+0} - E_\lambda)x = 0.$$

根据引理 2 的 2)，即得

$$E_\lambda(E_{\lambda+0} - E_\lambda)x = (E_{\lambda+0} - E_\lambda)x,$$

但

$$E_\lambda(E_{\lambda+0} - E_\lambda) = E_\lambda - E_\lambda = 0,$$

故 $(E_{\lambda+0} - E_\lambda)x = 0$，因此 $E_{\lambda+0} = E_\lambda$.

最后证明 4).

1°. 证明当 $\lambda < m$ 时，$E_\lambda = 0$. 如果 $E_\lambda \neq 0$，则必有 $x \in H$，$\|x\| = 1$，使 $E_\lambda x = x$，于是

$$(Ax,x)-\lambda(x,x)=((A-\lambda I)x,x)$$
$$=((A-\lambda I)E_\lambda x,x)\leqslant 0,$$

从而$(Ax,x)\leqslant\lambda<m$，此与 m 是 A 的下界矛盾.

2°. 类似于 1° 的证明，可得当 $\lambda>M$ 时，$E_\lambda=I$，然后利用 E_λ 的右连续性，$E_M=I$.

3°. 证明等式(4). 考虑$(m-\varepsilon,M]$ 的任一分划：

$$m-\varepsilon=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=M.$$

记

$$\Delta_i=(\lambda_{i-1},\lambda_i](i=1,2,\cdots,n),\quad E(\Delta_i)=E_{\lambda_i}-E_{\lambda_{i-1}}.$$

注意到(11·7·8)，(11·7·9)，我们有

$$\lambda_{i-1}E(\Delta_i)\leqslant AE(\Delta_i)\leqslant\lambda_iE(\Delta_i),(i=1,2,\cdots,n),$$

从而

$$\sum_{i=1}^n\lambda_{i-1}E(\Delta_i)\leqslant\sum_{i=1}^nAE(\Delta_i)\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_iE(\Delta_i).$$

注意到$\sum\limits_{i=1}^nE(\Delta_i)=I$，即得

$$\sum_{i=1}^n\lambda_{i-1}E(\Delta_i)\leqslant A\leqslant\sum_{i=1}^n\lambda_iE(\Delta_i).$$

任取 $\xi_i\in\Delta_i,i=1,2,\cdots,n$，则

$$\sum_{i=1}^n(\lambda_{i-1}-\xi_i)E(\Delta_i)\leqslant A-\sum_{i=1}^n\xi_iE(\Delta_i)$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n(\lambda_i-\xi_i)E(\Delta_i),$$

令 $\delta=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\lambda_i-\lambda_{i-1})$，则

$$-\delta I\leqslant A-\sum_{i=1}^n\xi_iE(\Delta_i)\leqslant\delta I.$$

注意到 $A-\sum\limits_{i=1}^n\xi_iE(\Delta_i)$ 是自共轭算子，由 §11·3 定理 1 即知

$$\| A - \sum_{i=1}^{n} \xi_i E(\Delta_i) \| \leqslant \delta,$$

从而

$$A = \lim_{\delta \to 0+} \sum_{i=1}^{n} \xi_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}) = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda \mathrm{d}E_\lambda.$$

由于当 $\lambda \geqslant M$ 时 $E_\lambda = I$,当 $\lambda < m$ 时,$E_\lambda = 0$,故上式右端的积分又可写成$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda$,因此

$$A = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda \mathrm{d}E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda. \blacksquare$$

注 1 可以证明满足定理条件1)－4)的投影算子族$\{E_\lambda\}$是唯一的,$\{E_\lambda\}$叫做自共轭算子 A 所决定的**谱族**或**单位分解**;而积分表达式(11・7・4)叫做**自共轭算子 A 的谱分解**.

注 2 (11・7・4)中的积分既然是积分和按一致收敛的极限,而算子的一致收敛性蕴含强收敛性,因此对任何 $x \in$ H,有

$$Ax = \lim_{\delta \to 0+} \sum_{i=1}^{n} \xi_i (E_{\lambda_i} x - E_{\lambda_{i-1}} x) = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda \mathrm{d}E_\lambda x.$$

再根据内积的连续性,对任意 x、$y \in$ H,有

$$(Ax, y) = \int_{m-\varepsilon}^{m} \lambda \mathrm{d}(E_\lambda x, y).$$

例 11・7・1 在 $L^2[-1,1]$ 中考察自共轭线性算子 A:

$$Ax(t) = tx(t),$$

我们有 $-A_\lambda x(t) = (\lambda - t)x(t)$,记 $B_\lambda = \sqrt{A_\lambda^2}$,则 B_λ:

$$B_\lambda x(t) = |t - \lambda| x(t),$$

从而相应于定理 1,投影算子 E_λ 所投影的子空间:

$$\begin{aligned} & \{x \mid (-A_\lambda - B_\lambda)x = 0\} \\ &= \{x(t) \mid [(\lambda - t) - |\lambda - t|]x(t) = 0\} \\ &= \{x(t) \mid x(t) = 0 \text{ 于}[\lambda, 1] \text{ 上}\}, \end{aligned}$$

于是,当 $\lambda < -1$ 时 $E_\lambda = 0$,而当 $\lambda \geqslant 1$ 时,$E_\lambda = I$.

11·7·3　自共轭算子的函数

下面我们利用自共轭算子 A 的谱族$\{E_\lambda\}$ 来定义 A 的函数.

设 $F(\lambda)$ 是定义在$(m-\varepsilon,M]$ 上的复(实) 值阶梯函数,即存在$(m-\varepsilon,M]$ 的一个分划 $m-\varepsilon=\lambda_0<\lambda_1<\cdots<\lambda_n=M$,使 $F(\lambda)$ 在每个半开区间 $\Delta_i=(\lambda_{i-1},\lambda_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$ 上取常数值 c_i. 我们定义

$$F(A)=\int_{m-\varepsilon}^{M}F(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=\sum_{i=1}^{n}c_iE(\Delta_i). \tag{11·7·10}$$

$F(A)$ 称做对应于函数 $F(\lambda)$ 的**算子 A 的函数**.

定理 2　按(11·7·10) 所定义的算子 A 的函数具有下列性质:

(i) 若 $F(\lambda)=aF_1(\lambda)+bF_2(\lambda)$,则

$$F(A)=aF_1(A)+bF_2(A);$$

(ii) 若 $F(\lambda)=F_1(\lambda)F_2(\lambda)$,则

$$F(A)=F_1(A)F_2(A);$$

(iii) $\overline{F}(A)=[F(A)]^*$,这里 $\overline{F}(\lambda)$ 表示 $F(\lambda)$ 的共轭函数;

(iv) $\|F(A)\|\leqslant\max|F(\lambda)|$;

(v) $F(A)$ 与任何与 A 可交换的线性连续算子可交换.

证明　(i)(ii) 的证明. 将$(m-\varepsilon,M]$ 分成有限个半开区间 $\Delta_i(i=1,2,\cdots,n)$,使 $F_1(\lambda),F_2(\lambda)$ 在每个 Δ_i 上皆取常数值,分别记为 $c_i^{(1)}$ 与 $c_i^{(2)}$;于是对于(i) 的情形

$$\begin{aligned}F(A)&=\sum_{i=1}^{n}(ac_i^{(1)}+bc_i^{(2)})E(\Delta_i)\\&=\sum_{i=1}^{n}ac_i^{(1)}E(\Delta_i)+\sum_{i=1}^{n}bc_i^{(2)}E(\Delta_i)\\&=aF_1(A)+bF_2(A).\end{aligned}$$

对于(ii) 的情形,由于当 $i\neq j$ 时,$E(\Delta_i)\perp E(\Delta_j)$,故

$$F(A)=\sum_{i=1}^{n}c_i^{(1)}c_i^{(2)}E(\Delta_i)$$
$$=\Big(\sum_{i=1}^{n}c_i^{(1)}E(\Delta_i)\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}c_i^{(2)}E(\Delta_i)\Big)$$
$$=F_1(A)F_2(A).$$

(iii) 的证明

$$[F(A)]^*=\Big[\sum_{i=1}^{n}c_iE(\Delta_i)\Big]^*=\sum_{i=1}^{n}\bar{c}_iE(\Delta_i)$$
$$=\overline{F}(A).$$

(iv) 的证明

$$\|F(A)x\|^2=(F(A)x,F(A)x)$$
$$=(\overline{F}(A)F(A)x,x)=\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2(E(\Delta_i)x,x)$$
$$\leqslant(\max|F(\lambda)|)^2\sum_{i=1}^{n}(E(\Delta_i)x,x)$$
$$=(\max|F(\lambda)|)^2\|x\|^2.$$

(v) 是显然的. ▌

现在设 $F(\lambda)$ 是 $(m-\varepsilon,M]$ 上的任一连续复(实)值函数,于是存在一阶梯函数列 $\{F_n(\lambda)\}$,它在 $(m-\varepsilon,M]$ 上一致收敛于 $F(\lambda)$,由定理 2 的(iv),我们有

$$\|F_n(A)-F_m(A)\|\leqslant\max\|F_n(\lambda)-F_m(\lambda)\|\to 0$$
$$(当\ n,m\to+\infty).$$

由此易知,$\{F_n(A)\}$ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{H})$ 中的基本列,由于 $\mathscr{B}(\mathrm{H})$ 是完备的,因此 $F_n(A)$ 一致收敛于某连续线性算子 B,容易证明 B 与 $\{F_n(\lambda)\}$ 的选择无关,我们称 B 为对应于函数 $F(\lambda)$ 的**算子 A 的函数**,记为 $F(A)$ 或写作 $\int_{m-\varepsilon}^{M}F(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$:

$$F(A)=\int_{m-\varepsilon}^{M}F(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$$

$$= B = \lim_{n\to\infty} F_n(A). \tag{11·7·11}$$

由于诸 $F_n(A)$ 都具有定理 2 中的性质(i) ～ (v)，故 $F(A)$ 也具有上述的性质(i) ～ (v). 特别，我们有

$$A^n = \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda^n \mathrm{d}E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^n \mathrm{d}E_\lambda.$$

11·7·4　应用于谱的讨论

上面，我们定义了自共轭算子 A 的函数，下面，我们应用它来研究算子 A 的谱的若干性质.

定理 3　(正则值与预解式)λ_0 是自共轭算子 A 的正则值的充分必要条件是：下列诸条件有一个成立：

1)　$\lambda_0 \in K$ 不是实数；

2)　λ_0 是实数，但在$[m,M]$ 之外；

3)　$\lambda_0 \in [m,M]$，但有开区间$(\alpha,\beta) \subset [m,M]$，$\lambda_0 \in (\alpha,\beta)$，使当 λ 在$[\alpha,\beta]$ 上变化时 E_λ 保持不变，即 E_λ 在$[\alpha,\beta]$ 上是常算子.

此外，当 λ_0 是正则值时，预解式 $R_{\lambda_0} = (A-\lambda_0 I)^{-1}$ 有下面的积分表达式

$$R_{\lambda_0} = \int_{m-\varepsilon}^{M} \frac{1}{\lambda-\lambda_0} \mathrm{d}E_\lambda. \tag{11·7·12}$$

证明　充分性. 在 1) 或 2) 的情形，对充分小的正数 ε，$f(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda-\lambda_0}$ 是$(m-\varepsilon, M]$ 上的连续函数，从而根据定理 2 的(ii) 有

$$\begin{aligned}
&\int_{m-\varepsilon}^{M} \frac{1}{\lambda-\lambda_0} \mathrm{d}E_\lambda \int_{m-\varepsilon}^{M} (\lambda-\lambda_0) \mathrm{d}E_\lambda \\
&= \int_{m-\varepsilon}^{M} (\lambda-\lambda_0) \mathrm{d}E_\lambda \int_{m-\varepsilon}^{M} \frac{1}{\lambda-\lambda_0} \mathrm{d}E_\lambda \\
&= \int_{m-\varepsilon}^{M} (\lambda-\lambda_0) \cdot \frac{1}{\lambda-\lambda_0} \mathrm{d}E_\lambda = \int_{m-\varepsilon}^{M} \mathrm{d}E_\lambda = I,
\end{aligned}$$

又由于　$\displaystyle\int_{m-\varepsilon}^{M} (\lambda-\lambda_0) \mathrm{d}E_\lambda = A - \lambda_0 I$，故

$$f(A)A_{\lambda_0}=A_{\lambda_0}f(A)=I.$$

由此可知,λ_0 是 A 的正则值,且

$$R_{\lambda_0}=A_{\lambda_0}^{-1}=f(A)=\int_{m-\varepsilon}^{M}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\mathrm{d}E_\lambda.$$

在 3) 的情形,我们把$(m-\varepsilon,M]$ 分成三个区间$(m-\varepsilon,\alpha]$,$(\alpha,\beta]$,$(\beta,M]$,显然可作函数

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda-\lambda_0}, & \text{当 } \lambda\overline{\in}(\alpha,\beta);\\ \text{线性函数}, & \text{当 } \lambda\in[\alpha,\beta],\end{cases}$$

那么 $\varphi(\lambda)$ 是$(m-\varepsilon,M]$ 上的连续函数. 由于

$$\begin{aligned}&\int_{m-\varepsilon}^{M}\varphi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\int_{m-\varepsilon}^{M}(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda\\ &=\int_{m-\varepsilon}^{M}(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda\int_{m-\varepsilon}^{M}\varphi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda\\ &=\int_{m-\varepsilon}^{M}\varphi(\lambda)(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda=\int_{m-\varepsilon}^{\alpha}\varphi(\lambda)(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda\\ &+\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(\lambda)(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda+\int_{\beta}^{M}\varphi(\lambda)(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda\\ &=\int_{m-\varepsilon}^{\alpha}\varphi(\lambda)(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda+\int_{\beta}^{M}\varphi(\lambda)(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda\\ &=(E_\alpha-0)+(I-E_\beta)=I,\end{aligned}$$

即

$$\varphi(A)A_{\lambda_0}=A_{\lambda_0}\varphi(A)=I,$$

因此 λ_0 是正则值,且

$$R_{\lambda 0}=A_{\lambda 0}^{-1}=\varphi(A)=\int_{m-\varepsilon}^{M}\varphi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda.$$

但由于 E_λ 在$[\alpha,\beta]$ 上是常算子,故对任何函数 $\psi(\lambda)$,皆有 $\int_{\alpha}^{\beta}\psi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda=0$,因此$\int_{m-\varepsilon}^{M}\varphi(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$ 可写成$\int_{m-\varepsilon}^{M}\frac{1}{\lambda-\lambda_0}\mathrm{d}E_\lambda$.

必要性. 只需证明,如果正则值 λ_0 不属于 1),2) 两种情形,它

必属于情形 3). 也就是说，如果正侧值 $\lambda_0 \in [m,M]$，则必存在开区间$(\alpha,\beta) \subset [m,M]$，$\lambda_0 \in (\alpha,\beta)$ 使 E_λ 在$[\alpha,\beta]$ 上是常算子.

事实上，根据 §11·3 定理 8，m，M 都是 A 的谱点，因此 $\lambda_0 \in (m,M)$. 取开区间(α,β)：$\lambda_0 \in (\alpha,\beta) \subset [m,M]$，且满足

$$(\beta-\alpha)\|R_{\lambda_0}\| < \frac{1}{2}, \qquad (11\cdot 7\cdot 13)$$

对任意 $x \in \mathsf{H}$，$\|x\| = 1$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\left(\int_\alpha^\beta(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda x, x\right)\right| &= \left|\int_\alpha^\beta(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}(E_\lambda x, x)\right| \\ &\leqslant \int_\alpha^\beta|\lambda-\lambda_0|\mathrm{d}(E_\lambda x, x) \leqslant (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta\mathrm{d}(E_\lambda x, x) \\ &= (\beta-\alpha)(E(\Delta)x, x) \leqslant (\beta-\alpha)\|E(\Delta)\|,\end{aligned}$$

式中 $E(\Delta) = E_\beta - E_\alpha$. 因此

$$\left\|\int_\alpha^\beta(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda\right\| \leqslant (\beta-\alpha)\|E(\Delta)\|. \qquad (11\cdot 7\cdot 14)$$

于是，由

$$\begin{aligned}E(\Delta) &= E(\Delta)R_{\lambda_0}A_{\lambda_0} = R_{\lambda_0}E(\Delta)A_{\lambda_0} \\ &= R_{\lambda_0}\int_\alpha^\beta\mathrm{d}E_\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda = R_{\lambda_0}\int_\alpha^\beta(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda\end{aligned}$$

注意到(11·7·14)，我们有

$$\begin{aligned}\|E(\Delta)\| &\leqslant \|R_{\lambda_0}\|\left\|\int_\alpha^\beta(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda\right\| \\ &\leqslant \|R_{\lambda_0}\|(\beta-\alpha)\|E(\Delta)\| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\|E(\Delta)\|.\end{aligned}$$

最后一个不等式是根据(11·7·13)得出. 因此 $E(\Delta) = 0$，即 $E_\beta = E_\alpha$，由于 E_λ 是单调增加的，因此 E_λ 在$[\alpha,\beta]$ 上是常算子. ▌

定理 3 的一个直接结果是

系 自共轭算子 A 的实正则值之全体构成实轴上一开集，从而 A 的谱是实轴上一闭集.

定理 4(特征值) λ_0 是自共轭算子 A 的特征值之充分必要条件是:λ_0 是 E_λ 的不连续点，即 $E_{\lambda_0} \neq E_{\lambda_0-0}$.

证明 必要性. 设 λ_0 是 A 的特征值. 取 $x_0 \in \mathrm{H}, x_0 \neq 0$,使 $A_{\lambda_0}x_0 = (A-\lambda_0 I)x_0 = 0$,于是

$$\int_{m-\varepsilon}^{M}(\lambda-\lambda_0)^2 \mathrm{d}(E_\lambda x_0, x_0) = ((A-\lambda_0 I)^2 x_0, x_0) = 0.$$

由于$(\lambda-\lambda_0)^2 \geqslant 0$,$(E_\lambda x_0, x_0)$ 是 λ 的单调增加函数，故对任何 $\delta > 0$ 皆有

$$\int_{\lambda_0+\delta}^{M}(\lambda-\lambda_0)^2 \mathrm{d}(E_\lambda x_0, x_0) = 0.$$

但在积分区间内$(\lambda-\lambda_0)^2 \geqslant \delta^2$,因此有

$$0 \geqslant \delta^2\int_{\lambda_0+\delta}^{M}\mathrm{d}(E_\lambda x_0, x_0) = \delta^2((I-E_{\lambda_0+\delta})x_0, x_0)$$

$$= \delta^2 \| (I-E_{\lambda_0+\delta})x_0 \|^2,$$

因此

$$E_{\lambda_0+\delta}x_0 = x_0, \tag{11·7·15}$$

令 $\delta \to 0^+$,即得

$$E_{\lambda_0}x_0 = E_{\lambda_0+0}x_0 = x_0. \tag{11·7·16}$$

同理，由

$$\int_{m-\varepsilon}^{\lambda_0-\delta}(\lambda-\lambda_0)^2 \mathrm{d}(E_\lambda x_0, x_0) = 0$$

并注意到 $E_{m-\varepsilon} = 0$ 可得

$$E_{\lambda_0-\delta}x_0 = 0,$$

令 $\delta \to 0^+$,即得

$$E_{\lambda_0-0}x_0 = 0. \tag{11·7·17}$$

由(11·7·16),(11·7·17) 即知，$E_{\lambda_0-0} \neq E_{\lambda_0}$,即 λ_0 是 E_λ 的不连续点. 由(11·7·16),(11·7·17) 我们还可顺便地得出

$$(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})x_0=x_0,$$

即 x_0 属于投影算子 $E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}$). 所投影的子空间，即

$$x_0\in(E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0})(\mathsf{H}).\qquad(11\cdot7\cdot18)$$

充分性. 设 $E_{\lambda_0}\neq E_{\lambda_0-0}$. 由于 E_{λ_0}, E_{λ_0-0} 都是投影算子，$E_{\lambda_0-0}\leqslant E_{\lambda_0}$，故 $E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-0}=E(\Delta_0)$ 也是投影算子. 由条件，

$$E(\Delta_0)(\mathsf{H})=\mathsf{L}_0\neq\{0\}.$$

任取一 $x_0\in\mathsf{L}_0$，$x_0\neq0$，则必有

$$E(\Delta_0)x_0=x_0.$$

根据 §11・5 定理 4，我们有

$$E_{\lambda_0}(\mathsf{H})=E_{\lambda_0-0}(\mathsf{H})\oplus\mathsf{L}_0,\quad \mathsf{L}_0\perp E_{\lambda_0-0}(\mathsf{H}),$$

从而

$$E_{\lambda_0-0}x_0=0,\quad E_{\lambda_0}x_0=x_0.$$

此外，当 $\lambda<\lambda_0$ 时，$E_\lambda\leqslant E_{\lambda_0-0}$，故有

$$E_\lambda x_0=0,\quad \forall\lambda<\lambda_0.$$

现在，对任意 $\tau>0$，记

$$\Delta=(\lambda_0-\tau,\lambda_0],\quad E(\Delta)=E_{\lambda_0}-E_{\lambda_0-\tau},$$

则有

$$E(\Delta)x_0=x_0,$$

再注意到 A 与 $E(\Delta)$ 可交换，即得

$$Ax_0=AE(\Delta)x_0=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda\mathrm{d}E_\lambda\int_{\lambda_0-\tau}^{\lambda_0}\mathrm{d}E_\lambda\right)x_0=\int_{\lambda_0-\tau}^{\lambda_0}\lambda\,\mathrm{d}E_\lambda x_0;$$

$$\lambda_0x_0=\lambda_0E(\Delta)x_0=\int_{\lambda_0-\tau}^{\lambda_0}\lambda_0\mathrm{d}E_\lambda x_0.$$

因此

$$Ax_0-\lambda_0x_0=\int_{\lambda_0-\tau}^{\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda x_0,$$

注意到(11・7・14) 式，

$$\|Ax_0-\lambda_0x_0\|=\left\|\int_{\lambda_0-\tau}^{\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)\mathrm{d}E_\lambda x_0\right\|$$

$$\leqslant \left\| \int_{\lambda_0-\tau}^{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) \mathrm{d}E_\lambda \right\| \| x_0 \|$$
$$\leqslant \tau \| E(\Delta) \| \| x_0 \| = \tau \| x_0 \|.$$

由于τ是任意的,故知 $\| Ax_0 - \lambda_0 x_0 \| = 0$,即 x_0 是对应于λ_0 的特征向量. 这样,我们证明了,任一$x \in (E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})(\mathrm{H})$,$x \neq 0$,都是$A$ 的对应于λ_0 的特征向量. ▌

注 由定理 4 的证明过程中可以看出:若 λ_0 是 A 的特征值,则

$$(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0 - 0})(\mathrm{H}) = \{x \mid Ax = \lambda_0 x\}.$$

* §11·8 双线性泛函

本节恒设 H 为复数域 K 上的 Hilbert 空间. 设

$$\varphi(x,y) = (x,y),$$

我们知道,$\varphi(x,y)$ 作为 H 上的二变元函数,具有如下性质:

1) $\varphi(x,y)$ 是变元 x 的线性泛函,即

$$\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha\varphi(x,z) + \beta\varphi(y,z); \quad (11\cdot 8\cdot 1)$$

2) $\varphi(x,y)$ 关于 y 是共轭线性的,即

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}\varphi(x,y) + \bar{\beta}\varphi(x,z); \quad (11\cdot 8\cdot 2)$$

3) $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$; $\quad (11\cdot 8\cdot 3)$

4) $|\varphi(x,y)| \leqslant \| x \| \| y \|$. $\quad (11\cdot 8\cdot 4)$

我们把 H 上满足(11·8·1)与(11·8·2)的二元泛函称为**双线性泛函**. 如果二元泛函还满足(11·8·3),则称它为 **Hermite 泛函**.

定义 1 设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的双线性泛函,如果存在常数 c,使

$$|\varphi(x,y)| \leqslant c \| x \| \| y \|, \quad (11\cdot 8\cdot 5)$$

则称 φ 为**有界的双线性泛函**,此时,记

$$\| \varphi \| = \sup_{\| x \| \leqslant 1, \| y \| \leqslant 1} |\varphi(x,y)|,$$

称为 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 的范数.

如同线性算子,我们有

$$\|\varphi\| = \inf\{c \mid |\varphi(x,y)| \leqslant c\|x\|\|y\|, \forall x,y \in \mathrm{H}\}. \tag{11·8·6}$$

设 $A:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 是连续线性算子,令

$$\varphi(x,y) = (Ax,y), \tag{11·8·7}$$

容易验证,$\varphi(\cdot,\cdot)$ 是一个双线性泛函,且

$$\begin{aligned}|\varphi(x,y)| &= |(Ax,y)| \leqslant \|Ax\|\|y\| \\ &\leqslant \|A\|\|x\|\|y\|.\end{aligned} \tag{11·8·8}$$

因此,$\varphi(\cdot,\cdot)$ 是一有界双线性泛函,且 $\|\varphi\| \leqslant \|A\|$.

由(11·8·7)所定义的双线性泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 称作由算子 A 导出的泛函.如果算子 A 是自共轭的,则

$$\varphi(x,y) = (Ax,y) = (x,Ay) = \overline{(Ay,x)} = \overline{\varphi(y,x)}. \tag{11·8·9}$$

因此,每一自共轭线性算子导出一个 Hermite 泛函.

对 $x\in\mathrm{H}$ 在(11·8·8)中令 $y = Ax$,我们有

$$\|Ax\|^2 = |(Ax,Ax)| = |\varphi(x,Ax)| \leqslant \|\varphi\|\|x\|\|Ax\|,$$

因此,

$$\|Ax\| \leqslant \|\varphi\|\|x\|, \forall x \in \mathrm{H}, \tag{11·8·10}$$

从而

$$\|A\| \leqslant \|\varphi\| \tag{11·8·11}$$

因此,$\|A\| = \|\varphi\|$.

定理 1　对于双线性泛函 φ,下列命题等价:

(i) $\varphi(x,y)$ 是 Hermite 泛函;

(ii) $\varphi(x,x)$ 是实数;

(iii) $\mathrm{Re}\varphi(x,y) = \mathrm{Re}\varphi(y,x)$.

证明　(i)⇒(ii).由 $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ 得

$$\varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}.$$

故 $\varphi(x,x)$ 是实数.

(ii)$\Rightarrow$(iii). 由 $\varphi(x,y)$ 是双线性泛函,我们有

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)$$
$$+i\varphi(x+iy,x+iy)-i\varphi(x-iy,x-iy)],$$
$$\varphi(y,x)=\frac{1}{4}[\varphi(y+x,y+x)-\varphi(y-x,y-x)$$
$$+i\varphi(y+ix,y+ix)-i\varphi(y-ix,y-ix)],$$

故 $$\mathrm{Re}\varphi(x,y)=\mathrm{Re}\varphi(y,x)$$
$$=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)]$$

(iii)$\Rightarrow$(i). 这由

$$\mathrm{Im}\varphi(x,y)=\mathrm{Im}(-i)\varphi(ix,y)=-\mathrm{Re}\varphi(ix,y)$$
$$=-\mathrm{Re}\varphi(y,ix)=-\mathrm{Re}(-i)\varphi(y,x)=-\mathrm{Im}\varphi(y,x),$$

及条件 $\mathrm{Re}\varphi(x,y)=\mathrm{Re}\varphi(y,x)$ 即得 $\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)}$. ▌

定义 2 Hilbert 空间 H 上的泛函 $\varphi(\cdot)$ 如果满足:

1) $\varphi(\alpha x)=|\alpha|^2\varphi(x)$, $\qquad$ (11・8・12)

2) $\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2(\varphi(x)+\varphi(y))$, $\qquad$ (11・8・13)

则称 ψ 为 H 上的**二次泛函**.

根据定义,如果 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的双线性泛函,令 $\varphi(x)=\varphi(x,x)$,那么 $\varphi(x)$ 是 H 上的二次泛函.

二次泛函 φ 称为**有界的**,如果 $\sup\limits_{\|x\|=1}\|\varphi(x)\|<+\infty$,这时记 $\|\varphi\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|\varphi(x)\|$,称为 φ 的**范数**. 如果对一切 $x\in$ H, $\varphi(x)$ 是实数,则称 φ 是**实二次泛函**.

定理 2 设 $\varphi(x)$ 是 H 上的二次泛函,令

$$\psi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y)-\varphi(x-y)+i\varphi(x+iy)-i\varphi(x-iy)]$$

则 $\psi(x,y)$ 是 H 上的双线性泛函,且

$$\psi(x,x) = \varphi(x). \qquad (11\cdot 8\cdot 14)$$

证明　由定义，(11・8・14) 显然成立，下面证明 $\psi(x,y)$ 是双线性泛函.

$$\begin{aligned}
&\psi(x,z) + \psi(y,z) \\
&= \frac{1}{4}[\varphi(x+z) - \varphi(x-z) + i\varphi(x+iz) - i\varphi(x-iz)] \\
&+ \frac{1}{4}[\varphi(y+z) - \varphi(y-z) + i\varphi(y+iz) - i\varphi(y-iz)] \\
&= \frac{1}{4}[\varphi(x+z) + \varphi(y+z) - \varphi(x-z) - \varphi(y-z)] \\
&+ \frac{i}{4}[\varphi(x+iz) + \varphi(y+iz) - \varphi(x-iz) - \varphi(y-iz)] \\
&= \frac{1}{4}\left[2\varphi\left(\frac{x+y}{2}+z\right) + 2\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}-z\right)\right. \\
&\left.- 2\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] + \frac{i}{4}\left[2\varphi\left(\frac{x+y}{2}+iz\right) + 2\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right. \\
&\left.- 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}-iz\right) - 2\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi\left(\frac{x+y}{2}+z\right) - \varphi\left(\frac{x+y}{2}-z\right)\right. \\
&\left.+ i\varphi\left(\frac{x+y}{2}+iz\right) - i\varphi\left(\frac{x+y}{2}-iz\right)\right] \\
&= 2\psi\left(\frac{x+y}{2}, z\right), \qquad (11\cdot 8\cdot 15)
\end{aligned}$$

令 $y = 0$，则

$$\psi(x,z) = 2\psi\left(\frac{x}{2}, z)\right),$$

在上式中，以 $x+y$ 代替 x 即得

$$\psi(x+y,z) = 2\psi\left(\frac{x+y}{2}, z\right), \qquad (11\cdot 8\cdot 16)$$

把(11・8・16) 式与(11・8・15) 式对照即得

$$\psi(x,z)+\psi(y,z)=\psi(x+y,z). \qquad (11\cdot 8\cdot 17)$$

余下的,完全可仿照 §11·1 定理 1 的证明得出

$$\psi(\alpha x,z)=\alpha\psi(x,z). \qquad (11\cdot 8\cdot 18)$$

还可以类似地证明

$$\psi(x,y+z)=\psi(x,y)+\psi(x,z), \qquad (11\cdot 8\cdot 19)$$

$$\psi(x,\alpha y)=\bar{\alpha}\psi(x,y). \qquad (11\cdot 8\cdot 20)$$

(11·8·17)—(11·8·20) 正说明 $\psi(x,y)$ 是双线性的. ▌

满足 $\psi(x,x)=\varphi(x)$ 的双线性泛函 $\psi(x,y)$ 称为由**二次函数** φ **所决定的双线性泛函**.

定理 3 每个实二次泛函 $\varphi(\cdot)$ 决定唯一的 Hermite 泛函 $\psi(\cdot,\cdot)$,如果 φ 有界则 ψ 也有界,且

$$\|\psi\|=\|\varphi\|. \qquad (11\cdot 8\cdot 21)$$

证明 设 $\psi(x,y)$ 为定理 2 中所定义的双线性泛函,因为 φ 是实二次泛函,因此容易看出 $\psi(x,y)=\overline{\psi(y,x)}$,即 $\psi(\cdot,\cdot)$ 是 Hermite 泛函. 再者,每一双线性泛函具有极分解式

$$\psi(x,y)=\frac{1}{4}[\psi(x+y,x+y)-\psi(x-y,x-y)$$
$$+i\psi(x+iy,x+iy)-i\psi(x-iy,x-iy)], \qquad (11\cdot 8\cdot 22)$$

因此每一二次泛函决定唯一的一个双线性泛函.

现在设 φ 有界,我们证明(11·8·21).

对任意的 $x,y\in H$,取复数 $\lambda=e^{i\theta}$,使得 $\lambda\psi(x,y)$ 为实数,于是

$$\lambda\psi(x,y)=\mathrm{Re}\lambda\psi(x,y)=\mathrm{Re}\psi(\lambda x,y)$$
$$=\frac{1}{4}[\varphi(\lambda x+y)-\varphi(\lambda x-y)],$$

从而

$$|\psi(x,y)|=\frac{1}{4}|\varphi(\lambda x+y)-\varphi(\lambda x-y)|$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\|\varphi\|[\|\lambda x+y\|^2+\|\lambda x-y\|^2]$$

$$=\frac{1}{2}\|\varphi\|(\|x\|^2+\|y\|^2),$$

取实数 $t\neq 0$，则

$$|\psi(x,y)|=|\psi(tx,\frac{y}{t})|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|\varphi\|(\|tx\|^2+\|\frac{y}{t}\|^2),$$

特别，取　$t=\left(\frac{\|y\|}{\|x\|}\right)^{1/2}$，得

$$|\psi(x,y)|\leqslant\|\varphi\|\ \|x\|\ \|y\|.$$

这说明 ψ 是有界的，且

$$\|\psi\|\leqslant\|\varphi\|,$$

但显然有 $\|\varphi\|\leqslant\|\psi\|$，因此

$$\|\psi\|=\|\varphi\|.\ \blacksquare$$

系 1　设 $\varphi(\cdot\ ,\cdot)$ 是 H 上的双线性泛函，$\varphi(x,x)$ 恒为实数，且存在 $c>0$，使

$$|\varphi(x,x)|\leqslant c\|x\|^2,\ \forall x\in \mathrm{H},$$

则

$$|\varphi(x,y)|\leqslant c\|x\|\ \ \|y\|,\ \forall x,y\in \mathrm{H}.$$

系 2　设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的双线性泛函，且

$$\mathrm{Re}\varphi(x,y)=\mathrm{Re}\varphi(y,x),$$

若存在 c 使

$$|\varphi(x,x)|\leqslant c\|x\|^2,\ \forall x\in \mathrm{H},$$

则

$$|\varphi(x,y)|\leqslant c\|x\|\ \|y\|,\ \forall x,y\in \mathrm{H}.$$

系 3　设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是定义在 H 上的 Hermite 泛函，若存在 c，使

$$|\varphi(x,x)| \leqslant c\|x\|^2, \forall x \in \mathrm{H},$$

则

$$|\varphi(x,y)| \leqslant c\|x\|\|y\|, \forall x,y \in \mathrm{H}.$$

定理4 设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是H上有界双线性泛函,则必存在唯一的有界线性算子 $A:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$,使

$$\varphi(x,y) = (Ax,y), \forall x,y \in \mathrm{H}, \tag{11·8·23}$$

且

$$\|A\| = \|\varphi\|. \tag{11·8·24}$$

证明 对每一固定的 $y \in \mathrm{H}$,令

$$\varphi_y(x) = \varphi(x,y), \forall x \in \mathrm{H},$$

显然,$\varphi_y(\cdot)$ 是H上的线性泛函. 由

$$|\varphi_y(x)| = |\varphi(x,y)| \leqslant \|\varphi\|\|y\|\|x\| \tag{11·8·25}$$

知 $\varphi_y(x)$ 是H上的连续线性泛函,且

$$\|\varphi_y\| \leqslant \|\varphi\|\|y\|. \tag{11·8·26}$$

根据 Riesz 表示定理,存在唯一的 $y^* \in \mathrm{H}$,使

$$\varphi_y(x) = (x,y^*), \tag{11·8·27}$$

且

$$\|\varphi_y\| = \|y^*\|. \tag{11·8·28}$$

这样,利用(11·8·27)我们决定了一个H→H的算子 $B: y \longmapsto y^*$. 于是,(11·8·27)可写成

$$\varphi(x,y) = \varphi_y(x) = (x,y^*) = (x,By). \tag{11·8·29}$$

现在,对任意的 $x,y,z \in \mathrm{H}, \alpha,\beta \in K$,有

$$\begin{aligned}\varphi(x,\alpha y+\beta z) &= \bar{\alpha}\varphi(x,y)+\bar{\beta}\varphi(x,z)\\ &= \bar{\alpha}(x,By)+\bar{\beta}(x,Bz)\\ &= (x,\alpha By+\beta Bz),\end{aligned}$$

因此,

$$B(\alpha y+\beta z) = \alpha By+\beta Bz, \tag{11·8·30}$$

从而 B 是 $\mathsf{H} \to \mathsf{H}$ 的线性算子，再由(11·8·26)、(11·8·28)，我们有

$$\| By \| = \| \varphi_y \| \leqslant \| \varphi \| \| y \|, \forall y \in \mathsf{H}, \tag{11·8·31}$$

因此 B 是有界线性算子，然后令 $A = B^*$，则得

$$\varphi(x,y) = (x,By) = (Ax,y). \tag{11·8·32}$$

由(11·8·31)、(11·8·32)及 $\| A \| = \| B^* \| = \| B \|$ 即知(11·8·24)成立.

算子 A 的唯一性是显然的. ▌

系 4　设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的有界 Hermite 泛函，则存在唯一的自共轭算子 $A:\mathsf{H} \to \mathsf{H}$，使

$$\varphi(x,y) = (Ax,y), \forall x,y \in \mathsf{H}, \tag{11·8·33}$$

且

$$\| \varphi \| = \| A \|. \tag{11·8·34}$$

证明　算子 A 的存在唯一性及(11·8·33)，(11·8·34)由定理 4 给出，然后由

$$\begin{aligned}(Ax,y) &= \varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)} \\ &= \overline{(Ay,x)} = (x,Ay)\end{aligned}$$

知 A 是自共轭的. ▌

定理 5　设 $\varphi(\cdot)$ 是 H 上的实有界二次泛函，则存在唯一的有界自共轭算子 $A:\mathsf{H} \to \mathsf{H}$，使

$$\varphi(x) = (Ax,x), \forall x \in \mathsf{H}, \tag{11·8·35}$$

且

$$\| \varphi \| = \| A \|. \tag{11·8·36}$$

证明　由定理 3，存在唯一的有界 Hermite 泛函 $\psi(x,y)$，使

$$\varphi(x) = \psi(x,x) \tag{11·8·37}$$

且

$$\|\psi\| = \|\varphi\|. \tag{11·8·38}$$

由系 4,存在唯一的有界自共轭算子 $A:\mathsf{H}\to\mathsf{H}$,满足

$$\psi(x,y) = (Ax,y); \tag{11·8·39}$$

$$\|A\| = \|\psi\|. \tag{11·8·40}$$

由此,并注意到(11·8·37),即知有

$$(Ax,x) = \psi(x,x) = \varphi(x), \tag{11·8·41}$$

$$\|A\| = \|\psi\| = \|\varphi\|. \blacksquare \tag{11·8·42}$$

定义 3 定义在 Hilbert 空间 H 上的双线性泛函 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 称为强迫的,如果存在 $c>0$,使

$$\varphi(x,x) \geqslant c\|x\|^2, \forall x \in \mathsf{H}.$$

定理 6 设 $\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 Hilbert 空间 H 上的有界、强迫的双线性泛函,那么,对每一有界线性泛函 $f\in\mathsf{H}^*$,存在唯一的元素 $y\in\mathsf{H}$,使

$$\varphi(x,y) = f(x), \forall x \in \mathsf{H}.$$

证明 按条件,$\varphi(\cdot,\cdot)$ 是 H 上的有界 Hermite 泛函. 依系 4,存在唯一的自共轭算子 $A:\mathsf{H}\to\mathsf{H}$,满足

$$\varphi(x,y) = (x,Ay), \forall x,y \in \mathsf{H},$$

从而存在 $c>0$ 使

$$(y,Ay) = (Ay,y) = \varphi(y,y) \geqslant c\|y\|^2, \forall y \in \mathsf{H},$$

再由 §11·3 定理 5,A 是可逆的,即 A 是 H 上的一一映射. 于是,对 $f\in\mathsf{H}^*$,依 Riesz 表示定理,可取 $y^*\in\mathsf{H}$, $\|y^*\| = \|f\|$ 使

$$f(x) = (x,y^*), \forall x \in \mathsf{H}.$$

设 $y = A^{-1}y^*$,则对任意 $x\in\mathsf{H}$ 有

$$f(x) = (x,y^*) = (x,Ay) = \varphi(x,y). \tag{11·8·43}$$

满足(11·8·43) 的 y 显然是唯一的. $\blacksquare$

* §11·9　保范算子

本节恒设 H 是复 Hilbert 空间.

定义 1　设 $U:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 为线性算子,若

$$\|Ux\| = \|x\| \quad \forall x\in \mathrm{H} \tag{11·9·1}$$

则称 U 为**保范算子**. 此时,如果 $U(\mathrm{H})=\mathrm{H}$,则称 U 为**酉算子**.

显然,如果 $U:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 是酉算子,那么,当 $x,y\in\mathrm{H}$,$x\neq y$ 时,

$$\|Ux-Uy\| = \|U(x-y)\| = \|x-y\| \neq 0,$$

因此,$U:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 是一一映射,根据逆算子定理,$U^{-1}:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 存在,从而 U^{-1} 也是酉算子.

其次,由

$$\begin{aligned}(Ux,Uy) &= \frac{1}{4}[\|Ux+Uy\|^2-\|Ux-Uy\|^2\\ &\qquad +i\|Ux+iUy\|^2-i\|Ux-iUy\|^2]\\ &=\frac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2]\\ &=(x,y)\end{aligned} \tag{11·9·2}$$

可知,酉算子保持内积不变.

再由(11·9·2),我们有

$$(x,y)=(Ux,Uy)=(U^*Ux,y),\ \forall x,y\in\mathrm{H}, \tag{11·9·3}$$

因此,

$$U^*U=I, \tag{11·9·4}$$

于是

$$U^* = U^{-1} \tag{11·9·5}$$

反之,若 $U:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 存在逆算子 U^{-1} 且满足(11·9·5),则

$$(Ux,Uy)=(x,U^*Uy)=(x,y),$$

因此,U 是酉算子.

综上所述,我们得

定理 1 设 U:H → H 为有界线性算子，则下述命题等价：

(i) U 是酉算子；

(ii) $U(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$ 且 $(Ux, Uy) = (x, y), \forall x, y \in \mathrm{H}$;

(iii) U^{-1} 存在且 $U^{-1} = U^*$ (即 $U^*U = UU^* = I$).

例 11·9·1 设 A:H → H 为自共轭有界线性算子，于是存在谱族 $\{E_\lambda\}$ 使

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \mathrm{d}E_\lambda,$$

设连续函数 $f(\lambda)$ 满足 $|f(\lambda)| = 1$，则

$$U = f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda$$

是酉算子. 事实上，

$$U^*U = \overline{f}(A)f(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}(\lambda)f(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}E_\lambda = I,$$

$$UU^* = f(A)\overline{f}(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\overline{f}(\lambda)\mathrm{d}E_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}E_\lambda = I.$$

定理 2 设 A:H → H 为有界自共轭算子，则

$$U = (A - iI)(A + iI)^{-1}$$

是酉算子，1 是 U 的正则值且

$$A = i(I + U)(I - U)^{-1}. \qquad (11 \cdot 9 \cdot 6)$$

证明 因 A 是自共轭有界线性算子，$\pm i$ 是 A 的正则值，因此，$U = (A - iI)(A + iI)^{-1}$ 是映 H 是 H 的有界线性算子. 又因为

$$U[(A + iI)(A - iI)^{-1}] = [(A + iI)(A - iI)^{-1}]U = I,$$

所以 U 为 H 上的可逆算子，从而 $U(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$，且

$$U^{-1} = (A + iI)(A - iI)^{-1}.$$

再由

$$\begin{aligned} U^* &= [(A - iI)(A + iI)^{-1}]^* = [(A + iI)^{-1}(A - iI)]^* \\ &= (A - iI)^*[(A + iI)^{-1}]^* = (A + iI)(A - iI)^{-1}, \end{aligned}$$

所以 $U^* = U^{-1}$，由定理 1，U 是酉算子.

下证 1 是 U 的正则值，为此只需证明：1°. 1 不是 U 的特征值；2°. $(U - I)(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$.

1°. 若 $x \in \mathrm{H}, Ux = x$，令 $y = (A+iI)^{-1}x$，则

$$Ux = [(A-iI)(A+iI)^{-1}](A+iI)y = (A-iI)y = x,$$

从而 $y = 0$，由此又得出 $x = 0$，因此 1 不是 U 的特征值.

2°. 设 $y \in \mathrm{H}$，取 $x \in \mathrm{H}$ 使 $y = (A+iI)^{-1}x$，即

$$x = (A+iI)y, \tag{11·9·7}$$

$$Ux = (A-iI)y, \tag{11·9·8}$$

因此

$$Ux - x = -2iy,$$

即

$$(U-I)x = -2iy, \quad (U-I)\frac{i}{2}x = y,$$

因此 $(U-I)(\mathrm{H}) = \mathrm{H}$. ▌

例 11·9·2　在空间 $\mathrm{H} = L^2(-\infty, +\infty)$ 中，对常数 $s \in R^1$，定义算子 $T:\mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 如下

$$Tx(t) = x(t+s),$$

算子 T 称为平移算子，它是酉算子.

定理 3　设 $U:\mathrm{H} \to \mathrm{H}$ 为酉算子，则 $\sigma(U)$ 包含在复平面的单位圆周上.

证明　设 $|\lambda| \neq 0$，当 $|\lambda| < 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U^{*n+1}$ 绝对收敛，且

$$(U-\lambda I)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U^{*n+1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n U^{*n+1}\right)(U-\lambda I) = I,$$

而当 $|\lambda| > 1$ 时，级数 $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} U^n$ 绝对收敛，且

$$(U-\lambda I)\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} U^n\right) = \left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} U^n\right)(U-\lambda I) = I.$$

因此当 $|\lambda| \neq 1$ 时 $U - \lambda I$ 有有界逆，即 λ 是 U 的正则值. ▌

现在，我们讨论 Hilbert 空间上酉算子 U 的谱分解问题，下面，

我们恒设

$$A=\frac{1}{2}(U+U^*),\quad B=\frac{1}{2i}(U-U^*),$$

容易验证,A, B 为 H 上的自共轭线性有界算子.算子 A, B 分别称为 U 的实部、虚部.

通过直接计算,我们有

$$A^2+B^2=I, \tag{11·9·9}$$

从而,对任一 $x\in$ H,

$$\begin{aligned}\|Ax\|^2+\|Bx\|^2&=(Ax,Ax)+(Bx,Bx)\\&=(A^2x,x)+(B^2x,x)=(x,x)\\&=\|x\|^2,\end{aligned} \tag{11·9·10}$$

因此,$\|A\|\leqslant 1$, $\|B\|\leqslant 1$.

现在、设$\{G_\mu\}$为 A 的谱族,$\{F_\lambda\}$为 B 的谱族.按定义,A 与 B 可交换,所以 G_μ 与 F_λ 也可交换,从而 $G_\mu F_\lambda=F_\lambda G_\mu$ 也是投影算子.

引理 1 设

$$I_1=(\mu_1,\mu_2],(\mu_1\leqslant\mu_2),\quad I_2=(\lambda_1,\lambda_2](\lambda_1\leqslant\lambda_2),$$

若 $\mu\in I_1,\lambda\in I_2\Rightarrow\mu^2+\lambda^2<1$(或 >1),则

$$(G_{\mu_2}-G_{\mu_1})(F_{\lambda_2}-F_{\lambda_1})=0. \tag{11·9·11}$$

证明 因 $G_{\mu_2}-G_{\mu_1}$ 与 $F_{\lambda_2}-F_{\lambda_1}$ 皆为投影算子且可交换,那么$(G_{\mu_2}-G_{\mu_1})(F_{\lambda_2}-F_{\lambda_1})$也是投影算子.如果(11·9·11)不真,则存在 $x\in$ H, $\|x\|=1$,使

$$(G_{\mu_2}-G_{\mu_1})(F_{\lambda_2}-F_{\lambda_1})x=x,$$

从而

$$G_{\mu_2}x=F_{\lambda_2}x=x,$$
$$G_{\mu_1}x=F_{\lambda_1}x=0.$$

于是

$$Ax=\int_{-\infty}^{+\infty}\mu\,\mathrm{d}G_\mu x=\int_{\mu_1}^{\mu_2}\mu\,\mathrm{d}G_\mu x,$$
$$\min_{\mu\in I_1}|\mu|\leqslant\|Ax\|\leqslant\max_{\mu\in I_1}|\mu|.$$

同理

$$\min_{\lambda\in I_2}|\lambda|\leqslant\|Bx\|\leqslant\max_{\lambda\in I_2}|\lambda|.$$

因此在定理条件下，必有 $\|Ax\|^2+\|Bx\|^2<1$（或 >1），此与 (11·9·10) 式矛盾. ▌

根据 §9·7 定理 1，然后利用引理 1，

$$A=\int_{-1-\varepsilon}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu=-G_{-1}+\int_{-1^+}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu$$

$$=-G_{-1}(F_1-F_{-1^-})+(F_1-F_{-1})\int_{-1^+}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu+F_{-1}\int_{-1^+}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu$$

$$=-G_{-1}(F_0-F_{0^-})+(F_1-F_0)\int_{-1^+}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu$$

$$+(F_0-F_{-1})\int_{-1^+}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu+F_{-1}\int_{-1^+}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu$$

$$=-G_{-1}(F_0-F_{0^-})+(F_1-F_0)\int_{0}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu+(F_1-F_0)\int_{-1^+}^{0}\mu\mathrm{d}G_\mu$$

$$+(F_0-F_{-1})\int_{-1^+}^{0}\mu\mathrm{d}G_\mu+(F_0-F_{-1})\int_{0}^{1}\mu\mathrm{d}G_\mu$$

$$=-G_{-1}(F_0-F_{0^-})+(F_1-F_0)(G_1-G_{1^-})$$

$$+(F_1-F_0)\int_{0^+}^{1^-}\mu\mathrm{d}G\mu+(F_1-F_0)\int_{-1^+}^{0^-}\mu\mathrm{d}G_\mu$$

$$+(F_0-F_{-1})\int_{-1^+}^{0^-}\mu\mathrm{d}G_\mu+(F_0-F_{-1})(G_1-G_{1^-})$$

$$+(F_0-F_{-1})\int_{0^+}^{1^-}\mu\mathrm{d}G_\mu$$

$$=\int_{1^-}^{0^+}\mu\mathrm{d}(G_{1^-}-G_{\mu^-})(F_1-F_0)+\int_{0^-}^{-1^+}\mu\mathrm{d}(G_{0^-}-G_{\mu^-})(F_{1^-}-F_0)$$

$$-G_{-1}(F_0-F_{0-})+\int_{-1^+}^{0^-}\mu\mathrm{d}(G_\mu-G_{-1})(F_0-F_{-1})$$

$$+\int_{0^+}^{1^-}\mu\mathrm{d}(G_\mu-G_0)(F_0-F_{-1})+(G_1-G_{1-})(F_0-F_{0-})$$

$$=\int_{0^+}^{\frac{\pi}{2}^-}\cos\theta\mathrm{d}(G_{1^-}-G_{\cos\theta^+})(F_{\sin\theta}-F_0)$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}^+}^{\pi^-}\cos\theta\mathrm{d}(G_{0^-}-G_{\cos\theta^+})(F_{1^-}-F_{\sin\theta^+})$$

$$+G_{-1}(F_0-F_{0^-})\cos\pi+\int_{\pi^+}^{\frac{3}{2}\pi^-}\cos\theta(\mathrm{d}G_{\cos\theta}-G_{-1})(F_{0^-}-F_{\sin\theta^+})$$

$$+\int_{\frac{3}{2}\pi^+}^{2\pi^-}\cos\theta d(G_{\cos}-G_0)(F_{\sin\theta}-F_{-1})$$
$$+(G_1-G_{1-})(F_0-F_{0^-})\cos 2\pi. \qquad (11\cdot 9\cdot 12)$$

类似地

$$B=\int_{0^+}^{\frac{\pi}{2}^-}\sin\theta d(G_{1^-}-G_{\cos\theta^+})(F_{\sin\theta}-F_0)$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}^+}^{\pi^-}\sin\theta d(G_{0^-}-G_{\cos\theta^+})(F_{1^-}-F_{\sin\theta^+})$$
$$+(G_0-G_{0^-})(F_1-F_{1^-})\sin\frac{\pi}{2}$$
$$+\int_{\pi^+}^{\frac{3}{2}\pi^-}\sin\theta d(G_{\cos\theta}-G_{-1})(F_{0^-}-F_{\sin\theta^+})$$
$$+(G_0-G_{0-})(F_{-1}-F_{-1^-})\sin\frac{3}{2}\pi$$
$$+\int_{\frac{3}{2}\pi^+}^{2\pi^-}\sin\theta d(G_{\cos\theta}-G_0)(F_{\sin\theta}-F_{-1}). \qquad (11\cdot 9\cdot 13)$$

现在,令

$$E_\theta=\begin{cases}(G_{1^-}-G_{\cos\theta^+})(F_{\sin\theta}-F_0), & \theta\in[0,\frac{\pi}{2});\\ (G_{1^-}-G_0)(F_{1^-}-F_0)+(G_0-G_{0^-})(F_1-F_{1^-}), & \theta=\frac{\pi}{2};\\ E_{\frac{\pi}{2}}+(G_{0^-}-G_{\cos\theta^+})(F_{1^-}-F_{\sin\theta^+}), & \theta\in(\frac{\pi}{2},\pi);\\ E_{\frac{\pi}{2}}+(G_{0^-}-G_{-1})(F_{1^-}-F_0)+G_{-1}(F_0-F_{0^-}), & \theta=\pi\\ E_\pi+(G_{\cos\theta}-G_{-1})(F_0-F_{\sin\theta^+}), & \theta\in(\pi,\frac{3}{2}\pi);\\ E_\pi+(G_{0^-}-G_{-1})(F_{0^-}-F_{-1})+(G_0-G_{0^-})F_{-1}, & \theta=\frac{3}{2}\pi;\\ E_{\frac{3}{2}\pi}+(G_{\cos\theta}-G_0))(F_{\sin\theta}-F_{-1}), & \theta\in(\frac{3}{2}\pi,2\pi);\\ E_{\frac{3}{2}\pi}+(G_{-1}-G_0)(F_{0^-}-F_{-1})+(G_{1^-}-G_{1^-})(F_0-F_{0^-}), & \theta=2\pi.\end{cases} \qquad (11\cdot 9\cdot 14)$$

则表达式(11·9·12)(11·9·13) 可写成

$$A=\int_0^{2\pi}\cos\theta \mathrm{d}E_\theta,\qquad B=\int_0^{2\pi}\sin\theta \mathrm{d}E_\theta. \tag{11·9·15}$$

(11·9·14) 式中，$E_{\frac{i}{2}\pi}(i=1,2,3,4,0)$ 的值，利用引理 1，可直接写成

$$E_{\frac{\pi}{2}}=(G_{1^-}-G_{0^-})(F_1-F_0),$$
$$E_\pi=G_{1^-}(F_1-F_{0^-}),$$
$$E_{\frac{3}{2}\pi}=G_{1^-}(F_1-F_{0^-})+(G_0-G_{-1})F_0,$$
$$E_{2\pi}=I,\qquad E_0=0.$$

按 E_θ 的定义，E_θ 在强收敛下右连续，且当 $0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi$ 时，$E_{\theta 1}\leqslant E_{\theta 2}$，$E_\theta$ 显然是投影算子. 又如果有界线性算子 C 与 U 可交换，即 $CU=UC$，则 $U^*C=CU^*$，从而 $CA=AC$，$CB=BC$，因此，C 与 G_u，F_λ 皆可交换，从而 E_θ 与 C 也可交换. 最后，

$$U=A+iB=\int_0^{2\pi}\cos\theta \mathrm{d}E_\theta+i\int_0^{2\pi}\sin\theta \mathrm{d}E_\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}E_\theta.$$

于是，我们得出

定理 4　设 $U:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 是酉算子，则必存在 H 上的投影算子族 $\{E_\theta \| 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$，满足

1)　$E_0=0$，$E_{2\pi}=I$；如果有界线性算子 C 与 U 可交换，则 E_θ 与 C 也可交换；

2)　当 $0\leqslant\theta_1\leqslant\theta_2\leqslant 2\pi$ 时，$E_{\theta_1}\leqslant E_{\theta_2}$；

3)　在强收敛意义下，E_θ 右连续；

4)　$U=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{d}E_\theta$.

注　定理中的投影算子族 $\{E_\theta\}$ 称为酉算子 U 的谱族.

如果令

$$C=\int_0^{2\pi}\theta \mathrm{d}E_\theta,$$

则可验证,C:H → H 是有界自共轭线性算子.于是,根据算子函数的定义,我们有

$$U = e^{iC},$$

这样,我们就证明了

系 1 设 U:H → H 为酉算子,则必存在 H 上的有界自共轭线性算子 A,使 $U = e^{iA}$.

利用谱分解定理,还可推出

系 2 数 $e^{i\theta_0}$ $(0 < \theta_0 < 2\pi)$ 是酉算子 U 的正则值的充分必要条件是,存在 $\delta > 0$,使得 U 的谱族 E_θ 在 $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ 上是常算子;1 为 U 的正则值的充分必要条件是,存在 $\delta > 0$,使当 $\theta \in (0,\delta)$ 时 $E_\theta = 0$,当 $\theta \in (2\pi - \delta, 2\pi)$ 时 $E_\theta = I$.

系 3 数 $e^{i\theta}$ $(0 < \theta \leqslant 2\pi)$ 是酉算子 U 的特征值的充分必要条件是 $E_\theta \neq E_{\theta^-}$.

系 2、系 3 可仿 §11·7 的方法来证明. ▌

* §11·10 正常算子

前面,我们讨论了 Hilbert 空间中有界自共轭算子的性质及谱分解,并利用自共轭算子的谱分解定理证明了酉算子的谱分解定理.在这一节,我们将简单地讨论更广泛的一类算子 —— 正常算子.

定义 1 设 H 是复 Hilbert 空间,A:H → H 为有界线性算子,如果 $AA^* = A^*A$,则称 A 为**正常算子**.

对于 H 上的有界线性算子 A,令

$$A_1 = \frac{A + A^*}{2}, A_2 = \frac{A - A^*}{2i},$$

容易看出,A_1,A_2 都是有界自共轭算子,且

$$A = A_1 + iA_2.$$

类似于酉算子情形，我们分别称 A_1, A_2 为 A 的实部和虚部. 当 A 为正常算子时，容易验证 A_1 与 A_2 可交换；反之，若 A_1 与 A_2 可交换：$A_1A_2 = A_2A_1$，则 A 与 A^* 也可交换：$AA^* = A^*A$，从而 A 是正常算子. 这样，我们得到

定理1　设H为复Hilbert空间，有界线性算子$A:\mathsf{H}\to\mathsf{H}$为正常算子的充分必要条件是它的实部与虚部可交换.

现在设 $A:\mathsf{H}\to\mathsf{H}$ 为正常算子. A 的实部和虚部A_1、A_2 都是有界自共轭算子，设其上界与下界分别是 M_1, M_2, m_1, m_2. $\{E_\lambda^{(1)}\}$，$\{E_\lambda^{(2)}\}$ 分别为对应于 A_1, A_2 的谱族. 因为 A_1 与 A_2 可交换，根据§11·7定理1，$E_\lambda^{(1)}$ 与$E_\lambda^{(2)}$ 可交换，因此，$E_{\lambda\mu} = E_\lambda^{(1)}E_\mu^{(2)} = E_\mu^{(2)}E_\lambda^{(1)}$ 也是投影算子.

对复数 $z = x + iy$，令

$$E_z = E_{x+iy} = E_x^{(1)}E_y^{(2)},$$

由上所述，E_z 是投影算子，它满足

1）当$x < m_1$（或$y < m_2$）时$E_z = 0$，且当$x \geqslant M_1, y \geqslant M_2$时 $E_z = I$；

2）$\lim\limits_{x'\to x+} E_{x'+iy} = \lim\limits_{y'\to y+} E_{x+iy'} = E_{x+iy}$；

3）当 $x_1 \leqslant x_2, y_1 \leqslant y_2$ 时 $E_{x_1+iy_1} \leqslant E_{x_2+iy_2}$.

现在，设 $\Delta = (a,b] \times (c,d]$，记

$$\begin{aligned} E(\Delta) &= E_{b+id} - E_{b+ic} - E_{a+id} + E_{a+ic} \\ &= E_b^{(1)}E_d^{(2)} - E_b^{(1)}E_c^{(2)} - E_a^{(1)}E_d^{(2)} + E_a^{(1)}E_c^{(2)} \\ &= (E_b^{(1)} - E_a^{(1)})(E_d^{(2)} - E_c^{(2)}), \end{aligned}$$

及 $R = [m_1, M_1] \times [m_2, M_2]$，

$$R_\varepsilon = (m_1 - \varepsilon, M_1] \times (m_2 - \varepsilon, M_2]，其中\ \varepsilon > 0.$$

如果对某 $\varepsilon > 0$ 有 $\Delta \cap R_\varepsilon = \varnothing$，则显然有 $E(\Delta) = 0$.

对任意固定的 $\varepsilon > 0$，任作两组分点

$$m_1 - \varepsilon = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = M_1;$$

$$m_2-\varepsilon=y_0<y_1<\cdots<y_m=M_2;$$

记

$$\Delta_{lr}=(x_{l-1},x_l]\times(y_{r-1},y_r],$$

$$\delta_{lr}=[(x_l-x_{l-1})^2+(y_r-y_{r-1})^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\delta=\max_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\1\leqslant r\leqslant m}}\delta_{lr}.$$

在 Δ_{lr} 中任取一点(ξ_l,η_r),作和式

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\1\leqslant r\leqslant m}}(\xi_l+i\eta_r)E(\Delta_{lr})\\
&=\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}(\xi_l+i\eta_r)(E_{x_l}^{(1)}-E_{x_{l-1}}^{(1)})(E_{y_r}^{(2)}-E_{y_{r-1}}^{(2)})\\
&=\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\xi_l(E_{x_l}^{(1)}-E_{x_{l-1}}^{(1)})(E_{y_r}^{(2)}-E_{y_{r-1}}^{(2)})\\
&+i\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=1}^{m}\eta_r(E_{x_l}^{(1)}-E_{x_{l-1}}^{(1)})(E_{y_r}^{(2)}-E_{y_{r-1}}^{(2)})\\
&=\sum_{l=1}^{n}\xi_l(E_{x_l}^{(1)}-E_{x_{l-1}}^{(1)})+i\sum_{r=1}^{m}\eta_r(E_{y_r}^{(2)}-E_{y_{r-1}}^{(2)}),
\end{aligned}$$

于是有

$$\lim_{\delta\to0^+}\sum_{\substack{1\leqslant l\leqslant n\\1\leqslant r\leqslant m}}(\xi_l+iy_r)E(\Delta_{lr})=A_1+iA_2.$$

把上述极限记作

$$A=\iint_{R_z}z\,\mathrm{d}Ez. \tag{11·10·1}$$

最后,我们注意到

$$\begin{aligned}
&\|Ax\|^2=(Ax,Ax)=((A_1+iA_2)x,(A_1+iA_2)x)\\
&=((A_1-iA_2)(A_1+iA_2)x,x)\\
&=((A_1^2+A_2^2)x,x)=\|A_1x\|^2+\|A_2x\|^2,
\end{aligned}$$

所以,

$$\|A_1\|\leqslant\|A\|,\|A_2\|\leqslant\|A\|.$$

根据自共轭算子上、下界的性质，我们有

$$-\|A\| \leqslant m_1,\ m_2,\ M_1,\ M_2 \leqslant \|A\|.$$

这样，我们证明了

定理 2 （**正常算子的谱分解**）设 H 为复 Hibert 空间，A：H→H 为正常算子，则必存在投影算子族 $\{E_Z\}$，它与任何与 A 可交换的有界线性算子可交换，满足 1)，2)，3) 且有(11·10·1) 式成立. 且有

$$-\|A\| \leqslant m_1, m_2, M_1, M_2 \leqslant \|A\|.$$

定理 2 中的投影算子族 $\{E_Z\}$ 称作算子 A 的平面谱族.

注　按定义，(11·10·1) 可写成

$$A = \iint\limits_{R_\varepsilon} z\mathrm{d}E_z = \int_{m_1-\varepsilon}^{M_1}\int_{m_2-\varepsilon}^{M_2}(x+iy)\mathrm{d}E_x\mathrm{d}E_y$$

$$= \iint\limits_{R^2} z\mathrm{d}E_x\mathrm{d}E_y = \iint\limits_{R^2} z\mathrm{d}E_z.$$

类似于自共轭算子情形，对于任一连续函数 $f(z) = f(x+iy)$，可以定义算子函数

$$f(A) = \iint\limits_{R_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}E_z = \iint\limits_{R^2} f(z)\mathrm{d}E_z.$$

系 1　设 A 为正常算子，$\{E_z\}$ 为 A 的平面谱族，则 z_0 是 A 的正则点的充分必要条件是存在矩形 Δ，z_0 为 Δ 的内点，且 $E(\Delta) = 0$.

证明　设 z_0 为 Δ 的内点且 $E(\Delta) = 0$. 类似于 §11·7 定理 3 的证明，引入算子

$$R_{z_0} = \iint\limits_{R^2} \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}E_z.$$

易证

$$R_{z_0}(A - z_0 I) = (A - z_0 I)R_{z_0} = I,$$

因此，z_0 是 A 的正则值.

反之，如果对于任一以 $z_0 = x_0 + iy_0$ 为内点的矩形 Δ，皆有

$E(\Delta) \neq 0$，那么，对任意自然数 n 记

$$\Delta_n = (x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}] \times (y_0 - \frac{1}{n}, y_0 + \frac{1}{n}],$$

则 $E(\Delta_n) \neq 0$. 任取一 $x_n \in E(\Delta_n)(\mathrm{H})$，$\| x_n \| = 1$，那么，对任意 Δ，只要 $\Delta \cap \Delta_n = \varnothing$，就有 $E(\Delta)x_n = 0$，于是

$$\begin{aligned}(A - z_0 I)x_n &= \iint_{R^2} (z - z_0)\mathrm{d}E_z x_n \\ &= \iint_{\Delta_n} (z - z_0)\mathrm{d}E_z x_n,\end{aligned}$$

因此，

$$\| (A - z_0 I)x_n \| \leqslant \frac{2}{n} \| x_n \| = \frac{2}{n},$$

所以 z_0 不是 A 的正则值. ▌

习 题 十 一

1. 证明：§11·1(11·1·13) 式所定义的(·,·)满足内积的四条公理.

2. 设 H 是实内积空间，$x,y \in H$，证明：$x \perp y$ 的充要条件是 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

3. 设 X 是由 t 的所有次数不高于 2 的实多项式和零多项式所组成的实线性空间，定义

$$\varphi(x,y) = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}t, \quad x、y \in X,$$

证明：$\varphi(x,y)$ 定义了 X 上的一个内积，且在这个内积下 X 是完备的.

4. 空间 X 如上题，设 $Y = \{x(t) \in X \mid x(0) = 0\}$，问 Y 是 X 的闭了空间吗？试证之.

5. 设 H 是 Hilbert 空间，$\{x_n\} \subset H$，$x \in H$，证明：$x_n \to x(n \to \infty)$ 的充要条件是 $\|x_n\| \to \|x\|$，且 $(x_n,x) \to (x,x)(n \to \infty)$.

6. 设 A 为 Hilbert 空间 H 的线性子空间，证明：

(1) $A \subset A^{\perp\perp}(= (A^{\perp})^{\perp})$；

(2) $A^{\perp\perp} = \overline{A}$.

7. 设 M 是 Hilbert 空间 H 中的非空集合，证明：$M^{\perp}$ 是 H 的闭子空间.

8. 设 M 是 Hilbert 空间 H 的子空间，证明 $\overline{M} = H$ 的充要条件是：$x \perp M \Rightarrow x = 0$.

9. 求出第 3 题中空间 X 的一个就范直交基.

10. 求一 $n(n = 0,1,2)$ 次多项式 $P_n(t)$，使得：按 $L^2[-1,1]$ 中范数，$\|e^t - P_n(t)\|$ 极小.

11. 设 L_1, L_2 是 Hilbert 空间 H 的子空间，$L_1 \perp L_2$，$L = L_1 \oplus$

L_2,证明:L 是闭子空间的充要条件是 L_1,L_2 均为闭子空间.

12. 举例说明内积空间中完全就范直交系未必是完备的.

13. 设 $\{e_k'\}$,$\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 中两个就范直交系,且 $\sum\limits_k \| e_k - e_k' \|^2 < 1$,证明:当 $\{e_k\}$ 完备时,$\{e_k'\}$ 也完备.

14. 举出一些线性赋范空间 E,E 上的范数不能由内积导出.

15. 设 $H_1, H_2, \cdots H_n, \cdots$ 是一列内积空间,令

$$H = \{(x_i) \mid x_i \in H_i, \sum_i \| x_i \|^2 < \infty\},$$

当 (x_i)、$(y_i) \in H$ 时规定

$$\alpha(x_i) + \beta(y_i) = (\alpha x_i + \beta y_i)\ (\alpha,\beta \text{是数}),$$

$$((x_i),(y_i)) = \sum_i (x_i, y_i),$$

证明:H 是内积空间;如果所有的 H_n 都是 Hilbert 空间,则 H 也是 Hilbert 空间.

16. 设H是内积空间,M和N是H的子集,证明:如果 $M \perp N$,则 $M \subset N^\perp$,$N \subset M^\perp$,且 $(M \cap N)\backslash\{0\} = \varnothing$.

17. 设 f 是 Hilbert 空间 H 的子空间 H_0 上的有界线性泛函,证明:f 在 H 上存在唯一的保范延拓.

18. 设 T 为 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子,$\| T \| \leqslant 1$,证明:$\{x \mid Tx = x\} = \{x \mid T^* x = x\}$.

19. 设 H 为 Hilbert 空间,A,B 为 H 上的线性算子,证明:如果 $(Ax, y) = (x, By)$ 对任意 $x, y \in$ H 成立,则 A、B 都是有界的.

20. 设 H 是复内积空间,$A \in \mathscr{B}(H)$,证明:如果对任意的 $x \in$ H 都有 $(Ax, x) = 0$,则 $A = 0$;对实空间,此结果成立否?

21. 设 H 是 Hilbert 空间,$T \in \mathscr{B}(H)$,记 N 为 T 的零子空间,R 为 T^* 的值域,证明 $N \perp R$.

22. 设 T 为 $L^2[a,b]$ 上的自共轭全连续线性算子,且存在 $L^2[a,b]$ 中完备就范直交系 $\{e_n\}$ 使 $\sum\limits_n \| Te_n \|^2 < \infty$,证明:存在 a

$\leqslant t,s\leqslant b$ 上的平方可积函数 $K(t,s)$ 适合 $K(t,s)=\overline{K(s,t)}$，且对一切 $x(t)\in L^2[a,b]$，

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s.$$

23. 设 H 为 Hilbert 空间，$\{e_n\}$ 为 H 中完备的就范直交系，证明：如果对任何 n,m 皆有 $(e_n,Te_m)=\overline{(e_m,Te_n)}$，则 T 为自共轭算子.

24. 设 H 为 Hilbert 空间. $T\in\mathscr{B}(\mathrm{H})$，若存在 $\alpha_0>0$ 使 $(Tx,x)\geqslant\alpha_0(x,x)(\forall x\in\mathrm{H})$，则称 T 为正定的. 证明：凡正定算子必有有界逆算子 T^{-1}，且 $\|T^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{\alpha_0}$.

25. 设 E^n 为 n 维酉空间，T 为 $n\times n$ 复矩阵. 定义 $T:E^n\to E^n$：$x\longmapsto x\mathrm{T}$. 写出 T^* 的矩阵表示.

26. 如果 $T:E^n\to E^n$ 由一对角阵表示，证明：T 自共轭的充要条件是 T 的矩阵是实矩阵.

27. 设 $A:l^2\to l^2$ 由下式定义：$Ax=A(\xi_i)=(\lambda_i\xi_i)$，其中 $\{\lambda_i\}$ 为一有界数列，求 A^*.

28. 在上题中，若 λ_i 都是实数，证明：A 是自共轭的，且 $\lambda_i(i=1,2,\cdots)$ 都是 A 的特征值. 如果 $\{\lambda_i\}\subset[a,b]$，问在什么条件下有 $[a,b]\subset\sigma(A)$.

29. 设 $\mathrm{H}_0\subsetneqq\mathrm{H}$ 是 H 的闭子空间，求投影算子 $P:\mathrm{H}\to\mathrm{H}_0$ 的上界和下界.

30. 设 A,B 为 Hilbert 空间 H 上的有界自共轭线性算子，设 $A\geqslant B,B\geqslant A$，证明：$A=B$.

31. 设 $A:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ 为有界线性算子，证明：AA^*A^*A 皆为非负自共轭算子.

32. 设 H 为 Hilbert 空间，$A\in\mathscr{B}(\mathrm{H})$，证明：对任意 $\lambda>0$，$A^*A+\lambda I$ 存在有界逆.

33. 设 H 为 Hilbert 空间，$A\in\mathscr{B}(\mathrm{H})$，证明：$A$ 全连续的充要条

件是 A^*A 全连续.

34. 设 P_1,P_2 为可交换的投影算子,证明:$P=P_1+P_2-P_1P_2$ 也是投影算子.

35. 设$\{e_k \mid k=1,2,\cdots\}$是 Hilbert 空间 H 中的就范直交系,L 是$\{e_k\}$张成的闭线性子空间,证明:H 到 L 上的投影算子 P 可表示成

$$Px=\sum_k (x,e_k)e_k.$$

36. 设 P 是 Hilbert 空间 $L^2[a,b]$ 中投影算子,如果对$[a,b]$上任何有界可测函数 φ,都有

$$P(\varphi f)=\varphi Pf,\quad f\in L^2[a,b],$$

证明:存在$[a,b]$的可测子集 M,使

$$PL^2[a,b]=\{f \mid 当\ x\overline{\in} M\ 时, f(x)=0\}.$$

37. 设H是 Hilbert 空间,$\{P_n\}$是H中一列两两直交的非零投影算子,又设$\{\lambda_n\}$是一有界数列,证明:存在 $A\in\mathscr{B}(\mathrm{H})$ 使

$$A=(强)\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\lambda_n P_n,$$

且$\{\lambda_n\}$是 A 的特征值,A 的对应于λ_n 的特征子空间是 $P_n(\mathrm{H})$.

38. 设 $T:l^2\to l^2, T(\xi_1,\xi_2\cdots)=(0,0,\xi_3,\xi_4,\cdots)$ 求 T 的正平方根.

39. 设 $I\geqslant A\geqslant \delta I\ (1>\delta>0)$,证明:迭代序列

$$B_0=0, B_{n+1}=B_n+\frac{1}{2}(A-B_n{}^2),\quad n=0,1,\cdots$$

一致收敛于 $\sqrt{A}$.

40. 设 $T:l^2\longmapsto l^2:(\xi_i)\to(\frac{1}{i}\xi_i)$,求 T 的一个就范直交特征向量组;求出 T 的谱族.

41. 对上题中的 T,证明

$$T=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}P_j,$$

其中 P_j 表在由 $e_j=(\delta_{ji})$ 所张成的子空间上的投影算子.

42. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的自共轭算子,$\{E_\lambda\}$ 为 T 的谱族,证明:T 的值域的闭包是$[(I-E_0)+E_{0^-}](\mathrm{H})$.

43. 在 28 题中,证明 A 的谱$\sigma(A)=\overline{\{\lambda_n\}}$.并证明 A 的谱族满足

$$(E_\lambda x,y)=\sum_{\lambda_i\leqslant\lambda}\xi_i\eta_i,\qquad x=(\xi_i),\quad y=(\eta_i).$$

* 第十二章　抽象函数・Banach 代数

§12・1　抽象函数

设 K 为复(实)数域,$G\subset K$,E 为赋范线性空间,我们把 G 到 E 的映射称为抽象函数,记作 $x(t)(t\in G)$. 抽象函数 $x(t)$ 称为在 $t_0\in G$ 连续,是指当 $t\in G$, $|t-t_0|\to 0$ 时, $\|x(t)-x(t_0)\|\to 0$. 如果 $x(t)$ 在 G 上每一点连续,我们就说 $x(t)$ 在 G 上连续. 显然,如果 $x(t)$ 是 G 上的连续抽象函数,那么, $\|x(t)\|$ 就是通常的 G 上连续实值函数. 因此,如果 G 是 K 中有界闭集,那么, $\|x(t)\|$ 作为通常实值连续函数在 G 上有界,并在 G 上达到上确界和下确界;此外,类似于数学分析中所用的方法,还可证明,若抽象函数 $x(t)$ 在有界闭集 G 中连续,则必一致连续,即对任一 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使当 $t_1,t_2\in G$, $|t_1-t_2|<\delta$ 时 $\|x(t_1)-x(t_2)\|<\varepsilon$.

显然,如果 $x(t)$ 是 G 上的抽象连续函数,那么,对每一 $f\in$ E*, $f(x(t))$ 就是通常的复(实)值连续函数.

定义 1　定义在 $G\subset K$ 上,在赋范线性空间 E 中取值的抽象函数 $x(t)$ 称为在 $t_0\in G$ 处**强可导**(或称**强可微**),如果存在 $x_0\in$ E 使

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{x(t_0+\tau)-x(t_0)}{\tau}=x_0, \qquad (12\cdot 1\cdot 1)$$

即

$$\lim_{\tau\to 0}\left\| \frac{x(t_0+\tau)-x(t_0)}{\tau}-x_0\right\| = 0,$$

我们称 $x(t)$ 在 t_0 处**弱可导**(或称**弱可微**),如果存在 $x_0 \in \mathsf{E}$,使对每一 $f \in \mathsf{E}^*$ 都有

$$\lim_{\tau\to 0} f\left(\frac{x(t_0+\tau)-x(t_0)}{\tau}\right) = f(x_0) \qquad (12 \cdot 1 \cdot 2)$$

这时,x_0 就称为 $x(t)$ 在 t_0 处的**强导数**(相应地,**弱导数**). 如果 $x(t)$ 在 t_0 强可导,它在 t_0 处的强导数记作 $x(t_0)$. 如果 $x'(t)$ 在 G 上处处强可导(相应地,弱可导),我们就说 $x(t)$ 在 G 上强可导(相应地,弱可导).

类似地,我们还可定义 $x(t)$ 的 n 阶导数 $x^{(n)}(t)$ 与 n 阶弱导数.

定理 1 若 $x(t)$ 在 G 上某点强可导,则必弱可导. 且有

$$f'(x(t_0)) = f(x'(t_0)).$$

证明　设　$\displaystyle\lim_{\tau\to 0}\frac{x(t_0+\tau)-x(t_0)}{\tau} = x_0 = x'(t_0)$

则

$$\begin{aligned} f(x'(t_0)) &= f\left(\lim_{\tau\to 0}\frac{x(t_0+\tau)-x(t_0)}{\tau}\right) \\ &= \lim_{\tau\to 0}\frac{f(x(t_0+\tau))-f(x(t_0))}{\tau} \\ &= f'(x(t_0)) \end{aligned}$$

系 1　设 G 为复平面 K 中开区域,E 为复 Banach 空间,若 $x(t)$ 在 G 上强可导,则对每一 $f \in \mathsf{E}^*$,$f(x(t))$ 是 G 上的解析函数.

证明　根据定理 1,$f(x(t)$ 是 G 上的可微复值函数. 根据复变函数论中的熟知定理,$f(x(t))$ 在 G 上任意阶可微. 它是 G 上的解析函数. ▌

当 E 是复 Banach 空间,G 为复平面 K 中的开区域,$x(t) \in \mathsf{E}$ $(t \in G)$ 为 G 上连续抽象函数,当 $x(t)$ 在 G 上强可导时,我们称 $x(t)$ 为 G 上的解析抽象函数.

定理 2　设 $x(t)$ 是在全复平面上定义的有界解析抽象函数，那末，$x(t)$ 在 E 中取常值 $x(0)$. 即 $x(t)\equiv x(0)$.

证明　根据系 1，对每一 $f\in\mathsf{E}^*$，$f(x(t))$ 是全平面上的解析函数，且 $|f(x(t))|\leqslant\|f\|\,\|x(t)\|$，因此，$f(x(t))$ 在全复平面上有界，根据解析函数的 Liouville 定理，$f(x(t))$ 在 K 上取常值，即

$$f(x(t)-x(0))=f(x(t))-f(x(0))\equiv 0.$$

因 $f\in\mathsf{E}^*$ 是任意的，故 $x(t)-x(0)=0$. 即 $x(t)$ 在 K 上取常值 $x(0)$. ▌

现在，我们讨论连续抽象函数的曲线积分.

设 G 是复平面 K 中一个区域，$\Gamma\subset G$ 是一条可度长的曲线，$x(\lambda)$ 是定义在 G 上并在 Banach 空间 E 取值的连续抽象函数. 在 Γ 上取定一个方向，设 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 Γ 上沿着这个方向顺序排列的一组分点(当 Γ 是一条非封闭曲线时，λ_0 与 λ_n 分别为 Γ 的始端和末端，当 Γ 是一条封闭曲线时，$\lambda_0=\lambda_n$). Γ 上以 λ_{i-1} 与 λ_i 为端点的曲线段记作 $(\lambda_{i-1},\lambda_i)$，任取 $\xi_i\in(\lambda_{i-1},\lambda_i)$. 对于每个这样的分划(记作 D) 作有限和

$$S_D=\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1}).$$

令 $\delta(D)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i-\lambda_{i-1}|$，不难证明，当 $\delta(D)\to 0$ 时，S_D 的极限存在且属于 E，这个极限就称为连续抽象函数 $x(\lambda)$ 在 Γ 上的积分，记作

$$\begin{aligned}\int_\Gamma x(\lambda)\mathrm{d}\lambda&=\lim_{\delta(D)\to 0}S_D\\&=\lim_{\delta(D)\to 0}\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1}).\end{aligned}\qquad(12\cdot 1\cdot 3)$$

现在，设 $f\in\mathsf{E}^*$，由(12・1・3)，我们得到

$$f\Big(\int_\Gamma x(\lambda)\mathrm{d}\lambda\Big)=f\Big(\lim_{\delta(D)\to 0}\sum_{i=1}^{n}x(\xi_i)(\lambda_i-\lambda_{i-1})\Big)$$

$$= \lim_{\delta(D)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x(\xi_i))(\lambda_i - \lambda_{i-1})$$

$$= \int_{\Gamma} f(x(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda. \qquad (12 \cdot 1 \cdot 4)$$

根据积分表达式(12・1・4) 及系 1,我们得到

定理3　若抽象函数 $x(\lambda)$ 在闭曲线 Γ 所围的区域 G 内解析且在 $\overline{G}$ 上连续,那么

$$\int_{\Gamma} x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

证明　设 $y = \int_{\Gamma} x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \in \mathbf{E}$,根据表达式(4),对 $f \in \mathbf{E}^*$ 有

$$f(y) = f\Big(\int_{\Gamma} x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\Big) = \int_{\Gamma} f(x(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda.$$

根据系 1,$f(x(\lambda))$ 在 Γ 所围的区域 G 内解析,$f(x(\lambda))$ 在 G 上连续,由平常复变函数论中的 Cauchy 定理,我们有

$$\int_{\Gamma} f(x(\lambda))\,\mathrm{d}\lambda = 0,$$

因此,$f(y) = 0$. 由于 $f \in \mathbf{E}^*$ 是任意的,所以 $y = 0$,即

$$\int_{\Gamma} x(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = 0. \ \blacksquare$$

定理4　设 G 是复平面 K 中的开区域,$\mathbf{E}$ 为 Banach 空间. $x(\lambda) \in \mathbf{E}$ $(\lambda \in G)$ 是 G 上的解析抽象函数,那么,对每一非负整数 n,$x(\lambda)$ 的 n 阶强导数 $x^{(n)}(\lambda)$ 存在(规定 $x^{(0)}(\lambda) = x(\lambda)$),且有

$$x^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{x(z)}{(z-\lambda)^{n+1}}\,\mathrm{d}z. \qquad (12 \cdot 1 \cdot 5)$$

其中 Γ 可取为任意一个以 λ 为内点、含于 G 内的圆的圆周.

证明　当 $n = 0$ 时,对任一 $f \in \mathbf{E}^*$,根据 Cauchy 公式,有

$$f(x(\lambda)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(x(z))}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} f\left(\int_{\Gamma} \frac{x(z)}{z-\lambda}\,\mathrm{d}z\right).$$

由于 $f \in \mathbf{E}^*$ 是任意的,因此

$$x(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(z)}{z-\lambda}\mathrm{d}z.$$

现在设(12·1·5)对 n 成立,当 $|\tau|$ 充分小时,$\lambda+\tau$ 也属于 Γ 的内部,我们有

$$\begin{aligned}&\frac{x^{(n)}(\lambda+\tau)-x^{(n)}(\lambda)}{\tau}\\&=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{\tau}\left[\frac{x(z)}{(z-\lambda-\tau)^{n+1}}-\frac{x(z)}{(z-\lambda)^{n+1}}\right]\mathrm{d}z,\end{aligned}\qquad(12\cdot1\cdot6)$$

当 $\tau\to0$ 时,(12·1·6)右端被积函数一致收敛,从而

$$\begin{aligned}x^{(n+1)}(\lambda)&=\lim_{\tau\to0}\frac{x^{(n)}(\lambda+\tau)-x^{(n)}(\lambda)}{\tau}\\&=\lim_{\tau\to0}\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{\tau}\left[\frac{x(z)}{(z-\lambda-\tau)^{n+1}}-\frac{x(z)}{(z-\lambda)^{n+1}}\right]\mathrm{d}z\\&=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\lim_{\tau\to0}\frac{1}{\tau}\left[\frac{x(z)}{(z-\lambda-\tau)^{n+1}}-\frac{x(z)}{(z-\lambda)^{n+1}}\right]\right)\mathrm{d}z\\&=\frac{(n+1)!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{x(z)}{(z-\lambda)^{n+2}}\mathrm{d}z.\end{aligned}\qquad(12\cdot1\cdot7)$$

于是,公式(12·1·5)对 $n+1$ 也成立. 根据归纳法原理对所有自然数 n,(12·1·5)成立. ▌

定理 5 (Taylor 展开). 以 G 表示复平面上的圆形区域 $\{\lambda \mid |\lambda-\lambda_0|<\rho_0\}$. 设 $x(\lambda)$ 是 G 上的抽象解析函数,那么在这圆域中有

$$x(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{(n)}(\lambda_0)}{n!}(\lambda-\lambda_0)^n,\quad\forall\lambda\in G.\qquad(12\cdot1\cdot8)$$

证明 以 Γ_ρ 表以 λ_0 为中心,$\rho(0<\rho<\rho_0)$ 为半径的圆周. 令 $M_\rho=\sup\limits_{\lambda\in\Gamma_\rho}\|x(\lambda)\|$,则 $0\leqslant M_\rho<+\infty$. 根据定理 4

$$\begin{aligned}\|x^{(n)}(\lambda_0)\|&=\frac{n!}{2\pi}\left\|\int_{\Gamma_\rho}\frac{x(z)}{(z-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\right\|\\&\leqslant\frac{n!}{2\pi}\int_{\Gamma_\rho}\frac{\|x(z)\|}{|z-\lambda_0|^{n+1}}\mathrm{d}s\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot M_\rho\cdot\rho^{-n-1}\cdot2\pi\rho\end{aligned}$$

$$= n!M_\rho \rho^{-n},$$

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| x^{(n)}(\lambda_0) \|}{n!} |\lambda - \lambda_0|^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} M_\rho \rho^{-n} |\lambda - \lambda_0|^n.$$

对任一 $\lambda \in G$，只需取 $|\lambda - \lambda_0| < \rho < \rho_0$，即知(12・1・8) 右端级数对任一 $\lambda \in G$ 绝对收敛，从而(12・1・8) 右端收敛于 $\mathbf{E}$ 中某元 $y(\lambda)$. 现在考虑平常的解析函数 $f(x(\lambda))$，其中 $f \in \mathbf{E}^*$. 根据平常解析函数的 Taylor 展开定理，并注意到，对每一 n，

$$f^{(n)}(x(\lambda_0)) = f(x^{(n)}(\lambda_0)),$$

我们有

$$\begin{aligned} f(x(\lambda)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x(\lambda_0))}{n!}(\lambda - \lambda_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x^{(n)}(\lambda_0))}{n!}(\lambda - \lambda_0)^n \\ &= f\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(\lambda_0)}{n!}(\lambda - \lambda_0)\right] = f(y(\lambda)). \end{aligned}$$

由于 $f \in \mathbf{E}^*$ 是任意的，因此 $x(\lambda) = y(\lambda)$. 从而(12・1・8) 成立. ▌

定理 6(Laurent) 展开) 设 $x(\lambda)$ 是环形区域 G:

$$0 \leqslant \rho_1 < |\lambda - \lambda_0| < \rho_2 \leqslant +\infty$$

内的抽象解析函数，那末，$x(\lambda)$ 可展成 Laurent 级数

$$x(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n, \quad \forall \lambda \in G, \quad (12 \cdot 1 \cdot 9)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma x(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{-n-1} \mathrm{d}\lambda.$$

积分围道为任一以 λ_0 为中心，$\rho \in (\rho_1, \rho_2)$ 为半径的圆周.

证明 根据定理 3，a_n 与积分围道 Γ 的半径选取无关，设

$$M_\rho = \max_{|\lambda-\lambda_0|=\rho} \| x(\lambda) \|,$$

则

$$\| a_n \| \leqslant M_\rho \rho^{-n},$$

当 $\rho_1 < |\lambda - \lambda_0| < \rho_2$ 时，取 ρ 满足 $|\lambda - \lambda_0| < \rho < \rho_2$，即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

绝对收敛；取 ρ 满足 $\rho_1 < \rho < |\lambda - \lambda_0|$，当 $n \leqslant -1$ 时，

$$\| a_n (\lambda - \lambda_0)^n \| \leqslant M_\rho \left(\frac{\rho}{|\lambda - \lambda_0|} \right)^{-n},$$

由此可知，级数

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n$$

也绝对收敛. 因此，(12 • 1 • 9) 右端对每一 $\lambda (\rho_1 < |\lambda - \lambda_0| < \rho_2)$ 绝对收敛，然后，对 $f \in \mathrm{E}^*$，利用

$$f(a_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(x(\lambda))(\lambda - \lambda_0)^{-n-1} \mathrm{d}\lambda,$$

及

$$f\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n\Big) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(a_n)(\lambda - \lambda_0)^n,$$

再根据平常解析函数的 Laurent 展开定理

$$\begin{aligned} f(x(\lambda)) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(a_n)(\lambda - \lambda_0)^n \\ &= f\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (\lambda - \lambda_0)^n\Big). \end{aligned}$$

由于 $f \in \mathrm{E}^*$ 是任意的，故(12 • 1 • 9) 成立. ▌

注 这里我们再强调指出，级数(12 • 1 • 9) 对环形区域中每一 λ 是绝对收敛的.

当 $\rho_2 = +\infty$ 时，我们有

系 2 设抽象函数 $x(\lambda)$ 在区域 $\{\lambda \mid |\lambda - \lambda_0| > \rho_0\}$ 内解析，若 $\| x(\lambda) \|$ 在无穷远处有界，即存在 $M > 0, \rho_1 > \rho_0$，使得

$$|\lambda-\lambda_0|>\rho_1 \Rightarrow \|x(\lambda)\| \leqslant M,$$

则

$$x(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda-\lambda_0)^{-n}, \qquad (12 \cdot 1 \cdot 10)$$

其中

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} x(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{n-1}\,\mathrm{d}\lambda.$$

积分围道 Γ 取任一以 λ_0 为中心，$\rho>\rho_0$ 为半径的圆周.

证明　根据定理 6，只需证明(12 · 1 · 9) 中

$$a_n=0, \quad (n>0). \qquad (12 \cdot 1 \cdot 11)$$

事实上，记

$$M_\rho=\max_{|\lambda-\lambda_0|=\rho}\|x(\lambda)\|,$$

当 $\rho>\rho_1$ 时，$M_\rho \leqslant M$. 从而，当 $n>0$ 时

$$\|a_n\|=\frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\Gamma} x(\lambda)(\lambda-\lambda_0)^{-n-1}\,\mathrm{d}\lambda\right\| \leqslant M\rho^{-n}.$$

令 $\rho \to +\infty$，即得 $\|a_n\|=0$. 从而(12 · 1 · 10) 成立. ∎

§ 12 · 2　Banach 代数

设 E 为 Banach 空间，我们知道，$\mathscr{B}(\mathrm{E})=\mathscr{B}(\mathrm{E} \to \mathrm{E})$ 按算子范数也成一 Banach 空间，且若 $T_1, T_2 \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$，那末 $T_1T_2 \in \mathscr{B}(\mathrm{E})$，且 $\|T_1T_2\| \leqslant \|T_1\|\,\|T_2\|$. 这就是说，在 Banach 空间 $\mathscr{B}(\mathrm{E})$ 中，除了加法运算外，还可定义乘法运算，且乘法运算按算子范数还是连续的. 对于这类具有乘法运算的 Banach 空间，我们称它为 Banach 代数. 下面，我们就详细地来讲述它.

定义 1　设 R 为数域 K 上的赋范线性空间，如果在 R 中定义了乘法运算，它满足

1) $x(yz)=(xy)z$;

2) $x(y+z)=xy+xz$;

3) $(x+y)z=xz+yz$;

4) 对固定的 $y\in \mathrm{R}$,当 $x_n\to x\in \mathrm{R}$ 时,$x_ny\to xy$,$yx_n\to yx$,

则称R为赋范代数;如果R是Banach空间,则称R为Banach代数.

例 12·2·1 设E为Banach空间,在 $\mathscr{B}(E)$ 中,令 $(T_1T_2)x=T_1(T_2x)$,则可验证,$\mathscr{B}(\mathrm{E})$ 是一 Banach 代数.

例 12·2·2 数域 K 按通常的加法运算和乘法运算,是一 Banach 代数.

例 12·2·3 在 $C[0,1]$ 中,对 $x(t)$、$y(t)\in C[0,1]$,令 $(xy)(t)=x(t)y(t)$,在这样定义的乘法运算下,$C[0,1]$ 是一 Banach 代数.

例 12·2·4 设 $L(Z)=\{(\cdots,\xi_n,\cdots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n\cdots)\mid \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}|\xi_i|<+\infty\}$,对 $x=(\cdots,\xi_{-n},\cdots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n,\cdots)$,

令 $\|x\|=\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty}|\xi_i|$,容易验证 $L(Z)$ 是一Banach空间. $L(Z)$ 中元素的加法运算定义为:

$$x=(\xi_i),y=(\eta_i),\quad \alpha x+\beta y=(\alpha\xi_i+\beta\eta_i).$$

我们再在 $L(Z)$ 中引入乘法运算:$x=(\xi_i)$,$y=(\eta_i)$ 令

$$\zeta_i=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\xi_{i-k}\eta_k=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\xi_k\eta_{i-k},\qquad (12\cdot 2\cdot 1)$$

定义 $xy=(\zeta_i)$,则 $L(Z)$ 成一 Banach 代数.

在上述例子中我们看到,Banach 代数中的乘法,一般地说,不满足交换律,但对例 12·2·2～3 中的乘法运算是满足交换律的. 如果 Banach 代数 R 中的乘法满足交换律,我们就称 R 为赋范环.

定义 2 设R为Banach代数,$e\in \mathrm{R}$ 称为左(右)单位元,如果对所有 $x\in \mathrm{R}$ 都有

$$ex = x, (\text{相应地}, xe = x).$$

注　若 R 同时有左单位元 e 和右单位元 e'，则必有 $e = e'$，这由等式 $e = ee' = e'$ 可以看出. 这时，我们就简单地称 e 为单位元.

例如，例 12·2·1 中的不变算子 I：$Ix = x$ 是 $\mathscr{B}(E)$ 中的单位元；例 12·2·2 中的数 1 就是 K 中单位元；例 12·2·3 中的 $x(t) \equiv 1$ 就是 $C[0,1]$ 中的单位元，例 12·2·4 中的 $e = (\delta_i)$ $\left(\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = 0 \\ 0 & \text{当 } i \neq 0 \end{cases}\right)$ 是 $L(Z)$ 的单位元. 但是，并非所有的 Banach 代数都有单位元，没有单位元的 Banach 代数的例子可参看关肇直著《泛函分析讲义》第二章 §7.

定义 3　数域 K 上的 Banach 代数 R 的子集 N 称为 R **赋范子代数**，如果 N 按 R 中运算与范数为一赋范代数；如果 N 又是闭的，则称 N 为 R 的 **Banach 子代数**.

例 12·2·5　设 Banach 代数 R 中有单位元 e，令

$$\mathrm{N} = \{\alpha e \mid \alpha \in K\}$$

则 N 是 R 的 Banach 子代数，如果把 α 与 αe 看成等同，我们也可以说，数域 K 是 R 的子代数.

定义 4　数域 K 上的 Banach 代数 R_1 与 R 称为**同构**，如果存在由 R_1 到 R 上的线性映射 φ，满足

1) $\|\varphi(x)\| = \|x\|$；

2) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$，

映射 φ 就称为 R_1 与 R 间的一个同构映射.

定理 1　每个 Banach 代数 R 必同构于一个具有单位元的 Banach 代数的子代数.

证明　如果 R 有单位元，结论自然成立，此时 R 与本身同构.

设 R 没有单位元. 设 e 是一抽象元素，令

$$\mathrm{R}' = \{x + \lambda e \mid x \in \mathrm{R}, \lambda \in K\}.$$

在 R′ 中定义运算

$$(x+\lambda e)(y+\mu e)=xy+\lambda y+\mu x+\lambda\mu e;$$
$$(x+\lambda e)+(y+\mu e)=(x+y)+(\lambda+\mu)e;$$
$$\|x+\lambda e\|=\|x\|+|\lambda|.$$

容易验证,R′ 是一 Banach 代数,且 R 是 R′ 的一个子代数. ▌

以后,如不特别声明,总设 R 有单位元.

下设 R 是 Banach 代数,对于 $x\in$ R,我们定义一个 R→R 的算子 A_x,如下:

$$A_x y=xy,\qquad \forall y\in \text{R},$$

则由

$$A_x(\alpha y+\beta z)=x(\alpha y+\beta z)=\alpha xy+\beta xz=\alpha A_x y+\beta A_x z$$

知,A_x 是线性算子.根据 Banach 代数的定义,当 $y_n\to y$ 时,$xy_n\to xy$,这意味着,当 $y_n\to y$ 时,$A_x y_n\to A_x y$.因此,对每一 $x\in$ R 所决定的线性算子 A_x 是一有界线性算子.

其次,当 x、$y\in$ R,$x\neq y$ 时必有 $A_x\neq A_y$.这由

$$A_x e=xe=x,A_y e=ye=y$$

可以看出.

令 $\mathscr{B}_0=\{A_x|x\in \text{R}\}\subset\mathscr{B}(\text{R})$,由

$$(\alpha A_x+\beta A_y)z=\alpha A_x z+\beta A_y z=\alpha xz+\beta yz$$
$$=(\alpha x+\beta y)z=A_{(\alpha x+\beta y)}z\qquad \forall z\in \text{R}$$

可知,$\mathscr{B}_0$ 是 $\mathscr{B}(\text{R})$ 的线性子空间.再由

$$(A_xA_y)z=A_x(A_y z)=A_x(yz)$$
$$=x(yz)=(xy)z,\quad \forall z\in \text{R}$$

即得 $A_xA_y=A_{xy}\in\mathscr{B}_0$,因此,$\mathscr{B}_0$ 是 $\mathscr{B}(\text{R})$ 的赋范子代数.

引理 1 设 A:R→R 为有界线性算子,$A\in\mathscr{B}_0$ 的充分必要条件是,对任意 $y,z\in$ R 有

$$A(yz)=(Ay)z.\tag{12·2·2}$$

证明 充分性:设 e 是 R 中单位元,由条件,对任一 $y\in$ R,

$$Ay=A(ey)=(Ae)y,\quad \forall y\in \text{R},$$

令 $x = Ae$，即得 $A = A_x$. 反之，设 $A = A_x$，则

$$A(yz) = A_x(yz) = x(yz) = (xy)z = (A_x y)z = (Ay)z.$$ ▌

引理 2　设 $A_n \in \mathscr{B}_0$，$A_n \to A \in \mathscr{B}(\mathrm{R})$，则 $A \in \mathscr{B}_0$.

证明　设 y、$z \in \mathrm{R}$，则

$$Ayz = \lim_{n\to\infty} A_n yz = \lim_{n\to\infty}(A_n y)z = (Ay)z$$

根据引理 1，$A \in \mathscr{B}_0$. ▌

于是，根据引理 2，$\mathscr{B}_0$ 是 $\mathscr{B}(\mathrm{R})$ 的 Banach 子代数.

现在考虑 $\mathscr{B}_0 \to \mathrm{R}$ 的映射 T：$TA_x = x$. 由前面所述，T 是 1—1 线性映射. 其次，由

$$\frac{\|x\|}{\|e\|} = \frac{\|xe\|}{\|e\|} \leqslant \sup_{y\neq 0}\frac{\|xy\|}{\|y\|} = \sup_{y\neq 0}\frac{\|A_x y\|}{\|y\|} = \|A_x\|$$

即得 $\|TA_x\| = \|x\| \leqslant \|e\|\ \|A_x\|$. 因此 T 是有界线性算子，根据逆算子定理，T 有有界逆 T^{-1}：$\mathrm{R} \to \mathscr{B}_0$，即

$$\|A_x\| = \|T^{-1}x\| \leqslant \|T^{-1}\|\ \|x\|.$$

定理 2　若 Banach 代数 R 中有单位元 e，必可赋予一个等价的范数 $\|\cdot\|_1$，使

1) $\|\mathrm{e}\|_1 = 1$;

2) $\|xy\|_1 \leqslant \|x\|_1\|y\|_1$，　$\forall x, y \in \mathrm{R}$.

证明　利用前面的记号，令 $\|x\|_1 = \|A_x\|$，则

$$\|x\| = \|TA_x\| \leqslant \|T\|\ \|A_x\| = \|T\|\ \|x\|_1,$$

$$\|x\|_1 = \|A_x\| = \|T^{-1}x\| \leqslant \|T^{-1}\|\ \|x\|,$$

因此，$\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|$ 等价，且

1) $\|e\|_1 = \|A_e\| = 1$（注意，A_e 实际上就是 R 上的恒同映射）.

2) $\|xy\|_1 = \|A_{xy}\| = \|A_x A_y\|$

$$\leqslant \|A_x\|\ \|A_y\| = \|x\|_1\|y\|_1.$$ ▌

根据定理 2，我们在下面总设具有单位元的 Banach 代数 R 中的范数满足定理 2 的条件，即 $\|e\| = 1$，$\|xy\| \leqslant \|x\|\ \|y\|$.

定义 5　以 e 表 Banach 代数 R 中的单位元，$x, y \in \mathrm{R}$，若 $xy =$

e,则称 x 为 y 的**左逆元**,y 为 x 的**右逆元**.这时,我们也说 y 有左逆(相应地,x 有右逆).如果 R 中元 x 同时有左逆元 y_l,又有右逆元 y_r,那么,由 $y_l = y_l e = y_l(xy_r) = (y_l x)y_r = ey_r = y_r$,可知左逆元和右逆元必相等,这时,我们简单地称 x 有逆,x 的**逆元**通常记作 x^{-1}.如果 x 在 R 中有逆,则称 x 为**正则元**,否则称 x 为**奇异元**.

一般地说,一个元素有左逆,它未必有右逆,反过来也一样.比如,在 l^2 中考虑算子 A、B,其定义如下:设 $x = (\xi_1,\xi_2,\cdots) \in l^2$,

$$Ax = (0,\xi_1,\xi_2,\cdots)$$

$$Bx = (\xi_2,\xi_3,\cdots)$$

则 $BAx = B(Ax) = B(0,\xi_1,\xi_2,\cdots) = (\xi_1,\xi_2,\cdots) = x$ 因此,$BA = I$,即 A 有左逆,B 有右逆,但是,显然,A 没有右逆,B 没有左逆.

引理 3 设 $x \in$ R,若 $\|x\| < 1$,则 $e - x$ 有逆元$(e-x)^{-1}$,且

$$(e-x)^{-1} = e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n. \qquad (12\cdot 2\cdot 3)$$

证明 因级数 $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\|x\|^n$ 收敛,故(3) 右端级数绝对收敛,从而 $e + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 收敛于 R 中某元 y.且

$$\begin{aligned}(e+\sum_{n=1}^{\infty}x^n)(e-x) &= (e+\sum_{n=1}^{\infty}x^n) - (e+\sum_{n=1}^{\infty}x^n)x \\ &= e+\sum_{n=1}^{\infty}x^n - (x+\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}) \\ &= e+\sum_{n=1}^{\infty}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}x^n = e.\end{aligned}$$

同理可证,$(e-x)(e+\sum_{n=1}^{\infty}x^n) = e$.因此$(12\cdot 2\cdot 3)$ 成立. ▌

引理 4　若 $x,y\in R$ 都有逆，则 xy 也有逆，并且

$$(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}.$$

证明　设 x,y 有逆 x^{-1},y^{-1}，则

$$(xy)(y^{-1}x^{-1})=x(yy^{-1})x^{-1}=xx^{-1}=e;$$

$$(y^{-1}x^{-1})(xy)=y^{-1}(x^{-1}x)y=e,$$

因此 xy 有逆 $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$. ▌

定理 3　Banach 代数 R 中正则元的全体是 R 中开集.

证明　正则元的全体记作 G(R). 设 $x\in G(R)$，取 $\varepsilon>0$，使

$$\varepsilon\|x^{-1}\|<1,$$

当 $y\in R$, $\|y-x\|<\varepsilon$ 时，

$$y=x-(x-y)=x[e-x^{-1}(x-y)].$$

因

$$\|x^{-1}(x-y)\|\leqslant\|x^{-1}\|\,\|x-y\|<\|x^{-1}\|\varepsilon<1,$$

由引理 3，$e-x^{-1}(x-y)$ 有逆，又 x 有逆，根据引理 4，

$$y=x[e-x^{-1}(x-y)]$$

也有逆，即 $y\in G(R)$. ▌

定理 4　映射 $x\mapsto x^{-1}$ 是 G(R) 上的连续映射，即

$$x_n\in G(R),x_n\to x\in G(R)\Rightarrow x_n^{-1}\to x^{-1}.$$

证明　设 $x_n\to x$，依乘法的连续性，有

$$x_nx^{-1}\to xx^{-1}=e. \tag{12·2·4}$$

因此存在 N，当 $n\geqslant N$ 时，$\|x_nx^{-1}-e\|<\frac{1}{2}$. 根据引理 3，

$$(xx_n^{-1})^{-1}=[e-(e-x_nx^{-1})]^{-1}$$

$$=e+\sum_{m=1}^{\infty}(e-x_nx^{-1})^m,$$

从而

$$\|xx_n^{-1}\| = \|(x_nx^{-1})^{-1}\| \leqslant \|e\| + \sum_{m=1}^{\infty}\|(e-x_nx^{-1})^m\|$$

$$\leqslant 1+\sum_{m=1}^{\infty}\|e-x_nx^{-1}\|^m < 2,$$

因此

$$\begin{aligned}\|e-xx_n^{-1}\| &= \|xx_n^{-1}(x_nx^{-1}-e)\| \\ &\leqslant \|xx_n^{-1}\|\,\|x_nx^{-1}-e\| \\ &\leqslant 2\|x_nx^{-1}-e\| \to 0,\end{aligned}$$

即 $xx_n^{-1}\to e$. 从而

$$x_n^{-1} = (x^{-1}x)x_n^{-1} = x^{-1}(xx_n^{-1}) \to x^{-1}. \blacksquare$$

定义 6 设R是Banach代数,$\lambda\in K$,如果 $x-\lambda e$ 是R中正则元,则称复数 λ 为 $x\in$ R 的**正则值**,否则,就称 λ 是 x 的**谱点**.

x 的正则值的全体记为 $\rho(x)$,称为 x 的**正则值集**,或称**豫解集**;x 的谱点的全体记为 $\sigma(x)$,称为 x 的**谱集**或简称为**谱**. 当 $\lambda\in\rho(x)$ 时,$(x-\lambda e)^{-1}$ 记作 $R(\lambda,x)$,

引理 5 设$0\leqslant a_{n+m}\leqslant a_na_m(n,m=1,2,\cdots)$,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n^{\frac{1}{n}} = \inf_n a_n^{\frac{1}{n}}.$$

证明: 设 $\alpha=\inf a_n^{\frac{1}{n}}$,对于任意给定的正数 ε,存在 N,使

$$a_N^{\frac{1}{N}} < \alpha+\varepsilon,$$

对于任一自然数 n,令 $n=mN+q\ (0\leqslant q<N)$. 从而

$$\begin{aligned}a_n^{\frac{1}{n}} &= (a_{mN+q})^{\frac{1}{n}} \leqslant (a_{mN}\cdot a_q)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant (a_N{}^m\cdot a_q)^{\frac{1}{n}} = a_q^{\frac{1}{n}}\cdot a_N^{\frac{m}{N}} \\ &\leqslant a_1^{\frac{q}{n}}\cdot(\alpha+\varepsilon)^{\frac{Nm}{n}}.\end{aligned}$$

注意到 $a_1^{\frac{q}{n}}\to 1,\dfrac{N_m}{n}\to 1$,故得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha+\varepsilon,$$

$\varepsilon > 0$ 既然是任意的，所以

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\alpha_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \alpha = \inf_n \alpha_n^{\frac{1}{n}},$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^{\frac{1}{n}} = \alpha = \inf\limits_n \alpha_n^{\frac{1}{n}}$ ▌

引理 6 对任一 $a \in R$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \| a^n \|^{\frac{1}{n}}. \qquad (12 \cdot 2 \cdot 5)$$

证明 令 $\alpha_n = \| a^n \|$，则

$$\alpha_{n+m} = \| a^n \cdot a^m \| \leqslant \| a^n \| \, \| a^m \| = \alpha_n \cdot \alpha_m,$$

然后利用引理 5 即可. ▌

定理 5 设 $\lambda_0 \in \rho(a)$. 则当

$$|\lambda - \lambda_0| < \left[\lim_{n\to\infty} \| R(\lambda_0, a)^n \|^{\frac{1}{n}}\right]^{-1}$$

时，$\lambda \in \rho(a)$. 且

$$R(\lambda, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, a)^{n+1}. \qquad (12 \cdot 2 \cdot 6)$$

证明 令

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, a)^{n+1},$$

则右端级数当 $|\lambda - \lambda_0| < \left[\lim\limits_{n\to\infty} \| R(\lambda_0, a)^n \|^{\frac{1}{n}}\right]^{-1}$ 时绝对收敛，于是，

$$z(a - \lambda e) = z[(a - \lambda_0 e) - (\lambda - \lambda_0)e]$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, a)^{n+1}\right](a - \lambda_0 e)[e - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, a)]$$

$$= \left[e + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, a)^n\right][e - (\lambda - \lambda_0)R(\lambda_0, a)] = e.$$

同理，$(a - \lambda e)z = e$. 因此

$$z = (a - \lambda e)^{-1} = R(\lambda, a).$$

即 $\lambda \in \rho(a)$. ▌

定理 6 $R(\lambda, a)$ 是 $\rho(a)$ 上的解析抽象函数.

证明 设$\lambda_0 \in \rho(a)$,依定理5,存在$\varepsilon > 0$使当$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$时,

$$R(\lambda, a) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R(\lambda_0, a)^{n+1}$$

从而

$$\frac{R(\lambda, a) - R(\lambda_0, a)}{\lambda - \lambda_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^{n-1} R(\lambda_0, a)^{n+1}$$

令$\lambda \to \lambda_0$,即得

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{R(\lambda, a) - R(\lambda_0, a)}{\lambda - \lambda_0} = R(\lambda_0, a)^2 \in \mathrm{R}. \blacksquare$$

定理 7 设$a \in \mathrm{R}$,$r = \lim\limits_{n \to \infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}}$,那末,当$|\lambda| > r$时,$\lambda \in \rho(a)$,且

$$R(\lambda, a) = -\left[\lambda^{-1} e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n\right]. \qquad (12 \cdot 2 \cdot 7)$$

证明 当$|\lambda| > r$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} a^n$绝对收敛,故

$$-(\lambda^{-1} e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n)$$

收敛于R中一元z.且

$$z(a - \lambda e) = -(\lambda^{-1} e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n)(a - e\lambda) = e;$$

$$(a - \lambda e) z = -(a - \lambda e)(\lambda^{-1} e + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1}) = e.$$

即$-(\lambda^{-1} e + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n) = (a - \lambda e)^{-1} = R(\lambda, a)$. $\blacksquare$

注 根据定理7,若$\lambda \in \sigma(a)$,则$|\lambda| \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}}$.从而

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda| \leqslant \lim_{n \to \infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}}.$$

我们称$r(a)$为a的谱半径.

定理 8 设$a \in \mathrm{R}$,则$r(a) = \lim\limits_{n \to \infty} \| a^n \|^{\frac{1}{n}}$.

证明　当 $|\lambda| > \|a\|$ 时，

$$\|R(\lambda,a)\| = \|\lambda^{-1}e + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n-1}a^n\|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^{-n-1}\|a\|^n = \frac{1}{|\lambda|}\cdot\frac{1}{1-\frac{\|a\|}{|\lambda|}}$$

$$= \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

因此，当 $|\lambda| > \|a\| + 2$ 时，$\|R(\lambda,a)\| \leqslant \frac{1}{2}$.

根据上节系 2，

$$R(\lambda,a) = \sum_{n=0}^{+\infty}c_{-n}\lambda^{-n}, (|\lambda| > r(a)) \qquad (12\cdot 2\cdot 8)$$

且(12 · 2 · 8) 式右端对每一 $\lambda(|\lambda| > r(a))$ 是绝对收敛. 其中

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R(\lambda,a)\lambda^{n-1}\mathrm{d}\lambda,$$

这里，Γ 可取任意一个以 0 为圆心，$\rho(> r(a)$ 为半径的圆. 特别，取 $\rho = \|a\| + 2$，则

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} - (\lambda^{-1}e + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k-1}a^k)\lambda^{n-1}\mathrm{d}\lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} - \lambda^{n-k-2}a^k\mathrm{d}\lambda,$$

故 $c_0 = 0, c_{-n} = -a^{n-1}$，其中 $a^0 = e$. 于是

$$R(\lambda,a) = \sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}\lambda^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty}a^{n-1}\lambda^{-n}$$

$$= -[\lambda^{-1}e + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n-1}a^n], \quad (|\lambda| > r(a))$$

$$(12\cdot 2\cdot 9)$$

且右端级数当 $|\lambda| > r(a)$ 时绝对收敛，即

$$|\lambda|^{-1}+\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|^{-n-1}\|a^n\| \qquad (12\cdot 2\cdot 10)$$

收敛. 但当 $|\lambda|<\varlimsup\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ 时(12・2・10)发散,因此,

$$r(a)\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

于是,根据定理 7 下的注,我们即知 $r(a)=\lim\limits_{n\to\infty}\|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. ▌

现在设 $x\in R$,那末,$\sum\limits_{k=0}^{n}a_k x^k=p(x)\in R$(其中 $x^0=e$),它称为 x 的**多项式**.

下面的定理是讨论 x 的多项式的谱与 x 的谱的关系.

定理 9 设 R 是 Banach 代数,$x\in R$,$p(x)$ 是 x 的多项式,那末

$$\sigma(p(x))=\{p(\lambda)\,|\,\lambda\in\sigma(x)\}. \qquad (12\cdot 2\cdot 11)$$

证明 设 $\lambda\in\sigma(x)$,我们证明

$$p(\lambda)\in\sigma(p(x))$$

即证 $p(x)-p(\lambda)e$ 是奇异元. 事实上,因

$$\begin{aligned}p(x)-p(\lambda)e&=\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k x^k-\alpha_k\lambda^k e)\quad(\text{其中 }\lambda^0=1)\\&=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x-\lambda e)(x^{k-1}+\lambda x^{k-2}+\cdots+\lambda^{k-1}e)\\&=(x-\lambda e)\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(x^{k-1}+\lambda x^{k-2}+\cdots+\lambda^{k-1}e)\\&=(x-\lambda e)p_1(x)=p_1(x)(x-\lambda e),\end{aligned}$$

若 $p(x)-p(\lambda)e$ 有逆元 z,则

$$(x-\lambda e)p_1(x)z=z(x-\lambda e)p_1(x)=zp_1(x)(x-\lambda e)=e.$$

因此 $(x-\lambda e)$ 有左逆又有右逆,从而 $x-\lambda e$ 有逆. 故得矛盾,因此 $p(\lambda)\in\sigma(p(x))$.

现在证明

$$\sigma(p(x)) \subset p(\sigma(x)).$$

设 $\lambda \overline{\in} p(\sigma(x))$，考虑 $\lambda - p(t)$ 的因式分解

$$\lambda - p(t) = \alpha(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n),$$

于是，当 $t \in \sigma(x)$ 时，$\lambda - p(t) \neq 0$，故

$$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \overline{\in} \sigma(x).$$

因此

$$(x-\lambda_i e)^{-1} \in \mathsf{R} \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

现在，

$$p(x) - \lambda e = -\alpha(x-\lambda_1 e)\cdots(x-\lambda_n e)$$

因 $x-\lambda_i e$ $(i=1,\cdots,n)$ 皆有逆，故 $p(x)-\lambda e$ 也有逆，即$\lambda \overline{\in} \sigma(p(x))$. 因此，$\sigma(p(x)) \subset p(\sigma(x))$. ▌

* 第十三章　凸锥理论

为了研究 Banach 空间 E 中算子方程的正解问题，必须在空间 E 中建立序结构 $\geqslant$，自然，这种序结构必须与 E 中的线性结构相符，即

1) $x \geqslant y \Rightarrow x+z \geqslant y+z$;

2) $x \geqslant y, \lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \geqslant \lambda y$.

这样，E 即成一半序空间，利用这种序结构即可定义 E 中的正元 $x: x \geqslant 0$. E 中正元素的全体成为 E 中的一个锥形集. 但在实际问题中，我们是把具有某些性质的元称为正元，然后利用正元集合来定义半序 $\geqslant$，使得由 $\geqslant$ 所给出的正元集与原来的正元集一致，这样一来，原来的所谓正元素集合 P 也必然就是一锥形集，因此，对 Banach 空间锥体的研究是很有意义的. 凸锥理论在研究算子方程的正解问题中起着重要的作用. 在这一章中我们将介绍关于凸锥理论的基础知识.

§ 13 · 1　线性半群与锥

定义 1　Banach 空间 E 中子集 P 称为(线性) 半群，如果

1) $x \in P, \lambda \geqslant 0 \Rightarrow \lambda x \in P$;

2) $x, y \in P \Rightarrow x+y \in P$.

若 P 含有内点，则称 P 为**体半群**. 半群 P 称为非平凡的，是指至少存在一点 $x \in P$，使 $-x \overline{\in} P$.

由定义，任一半群都是凸集，且空间 E 中原点(零元素)$0 \in P$.

设 $P \subset \mathrm{E}$ 是一半群，我们用 $\mathring{P}$ 表 P 的内部，以 $\dot{P}$ 表集合 $P\backslash\{0\}$.

利用 E 中线性半群 P，我们可以在 E 中引入一个半序关系. 我们定义，

如果 $x - y \in P$，则称 $x \geqslant y(y \leqslant x)$；

如果 $x - y \in \dot{P}$，则称 $x > y(y < x)$；

如果 $x - y \in \mathring{P}$(当 $\mathring{P} \neq \varnothing$)，则称 $x \gg y(y \ll x)$.

按定义，$x \geqslant 0$ 意味着 $x \in P$. 如果存在 E 中元 $z \neq 0$，使 $z \in P$，$-z \in P$，那么，关系 $x \geqslant y$ 与 $x \leqslant y$ 在 $x \neq y$ 时可以同时成立. 如果 E 中不存在这样的非零元素 z：使 $z \in P$，$-z \in P$，那么，由 $x \geqslant y$，$x \leqslant y$ 可以推出 $x = y$.

命题 1　关系"$\leqslant$"具有下述性质：

a) 如果 $x \leqslant y$，$y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$；

b) 如果 $x \leqslant y$，则 $-x \geqslant -y$；

c) 如果 $x_1 \leqslant y_1$，$x_2 \leqslant y_2$，则 $x_1 + x_2 \leqslant y_1 + y_2$；

d) 如果 $x \geqslant y$，$\lambda \geqslant 0$，则 $\lambda x \geqslant \lambda y$.

命题中的结论很容易根据定义直接验证.

命题 2　若 P 是体半群，即 $\mathring{P} \neq \varnothing$，则有下述结论成立：

1) 如果 $x \gg y$，$\lambda > 0$，则 $\lambda x \gg \lambda y$；

2) 如果 $P \neq \mathrm{E}$，$u \gg 0$，则 $-u \overline{\in} P$；

3) 如果 $x \leqslant y$，$y \leqslant z$ 中有一个"$\leqslant$"改为"$\ll$"，则 $x \ll z$；

4) 如果 $x_1 \ll y_1$，$x_2 \ll y_2$，则 $x_1 + x_2 \ll y_1 + y_2$；

5) 对任一 $x \in \mathrm{E}$，存在 $u, v \in P$ 使 $x = u - v$.

证明　1)，3)，4) 显然.

2) 因 $u \in \mathring{P}$，故存在 $\rho > 0$，使

$$B(u, \rho) \subset P \quad (\text{其中 } B(u, \rho) = \{x \in \mathrm{E} \mid \| x - u \| < \rho\}),$$

于是对任一 $a \in P$ 有 $B(u+a,\ \rho) \subset P$,因此如果 $-u \in P$,那么取 $a=-u$ 即得 $B(0,\rho) \subset P$,再由半群的定义即得 $\mathsf{E} \subset P$,从而 $\mathsf{E}=P$,它与 $\mathsf{E} \neq P$ 的假设矛盾.

5) 事实上,任取一 $u_1 \gg 0$,设 $B(u_1,\rho) \subset P$,那么对任一 $x \in \mathsf{E}$,$x \neq 0$,有

$$u_1 \pm \frac{\rho}{2} \frac{x}{\|x\|} \gg 0,$$

从而 $\dfrac{2\|x\|}{\rho} u_1 \pm x \gg 0$,现在设

$$u=\frac{1}{2}\left(\frac{2\|x\|}{\rho} u_1+x\right), \quad v=\frac{1}{2}\left(\frac{2\|x\|}{\rho} u_1-x\right),$$

则 u、$v \in P$ 且 $x=u-v$. ▌

定义 2 如果 $P \subset \mathsf{E}$ 为闭线性半群,且 $x \in P, x \neq 0 \Rightarrow -x \,\overline{\in}\, P$,那么就称 P 为**锥**.

锥既是线性半群,它在 E 中产生一个半序关系,此半序关系具有性质

$$x \geqslant y, y \geqslant x \Rightarrow x=y.$$

如同线性半群一样,一般的锥 P 末必有内点,如果 $\dot{P} \neq \varnothing$,则称 P 为**体锥**.

例 13·1·1 $C[a,b]$ 中非负函数的全记作 C^+,则 C^+ 是一体锥,$L^p(\Omega)$ 中非负函数的全体记作 L_+^p,它是一个锥,但不是体锥.

例 13·1·2 设 E 为 Banach 空间,$x \in \mathsf{E}, x \neq 0$,则对任一 $\rho \in (0,\|x\|)$,集合 $P=\{\lambda z \mid \lambda \geqslant 0,\|z-x\| \leqslant \rho\}$ 是 E 中体锥.

事实上,因为 $B(x,\rho) \subset P$,所以 $\dot{P} \neq \varnothing$. P 是线性半群也是明显的. 余下的还要验证 P 是闭集且 $y \in P, y \neq 0 \Rightarrow -y \,\overline{\in}\, P$.

设 $y_n \in P, y_n \rightarrow y_0$. 依定义,存在

$$\lambda_n \geqslant 0, \quad z_n \in \overline{B}(x,\rho) \quad 使\ y_n = \lambda_n z_n.$$

$\{z_n\}$ 有界，如果存在 $\lambda_{nk} \to 0$，则 $y_0 = 0 \in P$. 于是可设 $\lambda_n \geqslant \lambda > 0$. 因为

$$\| z_n \| \geqslant \| x \| - \rho = \rho_0 > 0,$$

所以

$$\lambda_n = \| y_n \| / \| z_n \| \leqslant \| y_n \| / \rho_0,$$

故 $\{\lambda_n\}$ 也有界. 不失一般性，可设 $\lambda_n \to \lambda_0 (n \to \infty)$，于是

$$z_n = \frac{1}{\lambda_n} y_n \to \frac{1}{\lambda_0} y_0 = z_0.$$

由 $z_n \in \overline{B}(x,\rho)$ 推出 $z_0 \in \overline{B}(x,\rho)$，因此 $y_0 = \lambda_0 z_0 \in P$.

现在设 $y \in P, y \neq 0$. 按定义，

$$y = \lambda z_1 (\lambda > 0, \| z_1 - x \| \leqslant \rho).$$

若 $-y = -\lambda z_1 \in P$，则有

$$-y = \mu z_2 (\mu > 0, \| z_2 - x \| \leqslant \rho),$$

因此 $-\lambda z_1 = \mu z_2$. 从而

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \| x \| &= \| \lambda x + \mu x \| = \| \lambda x - \lambda z_1 + \lambda z_1 + \mu x \| \\ &= \| \lambda x - \lambda z_1 + \mu x - \mu z_2 \| \leqslant (\lambda + \mu)\rho.\end{aligned}$$

此与 $\rho < \| x \|$ 矛盾.

定义 3　E 中锥 P 称为正规的，如果存在 $\delta > 0$，使对任意 $x, y \in P$, $\| x \| = \| y \| = 1$ 有 $\| x + y \| \geqslant \delta$. 此时，$\delta > 0$ 称为锥 P 的一个**正规常数**.

定理 1　设 P 是 Banach 空间 E 中锥，则下列条件等价：

1) P 是正规的；

2) 存在常数 $\delta > 0$，使对任意 x、$y \in P$ 有

$$\| x + y \| \geqslant \delta \max\{ \| x \|, \| y \| \};$$

3) $x_n, y_n \in P, x_n + y_n \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$;

4) 存在常数 $N > 0$，使　$0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \| x \| \leqslant N \| y \|$.

证明 1)⇒2):设 P 是正规的,于是存在 $\delta_1>0$,使对任意

$$x,y\in P,\ \|x\|=\|y\|=1\quad 有$$

$$\|x+y\|\geqslant\delta_1.$$

设 $x,y\in P,\|x\|\geqslant\|y\|>0$,于是

$$2\|x+y\|=\|x+y\|+\|x+y\|$$

$$=\|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|x\|}\right\|+\|x+y\|$$

$$=\|x\|\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}-\left(\frac{1}{\|y\|}-\frac{1}{\|x\|}\right)y\right\|+\|x+y\|$$

$$\geqslant\delta_1\|x\|-\|x\|+\|y\|+\|x\|-\|y\|$$

$$=\delta_1\|x\|,$$

取 $\delta=\frac{1}{2}\delta_1$,即得

$$\|x+y\|\geqslant\delta\|x\|=\delta\max(\|x\|,\|y\|).$$

2)⇒3):设 $x_n,y_n\in P,x_n+y_n\to 0(o\to\infty)$,由 2),存在 $\delta>0$,使

$$\|x_n+y_n\|\geqslant\delta\max(\|x_n\|,\|y_n\|)\geqslant\delta\|x_n\|.$$

在上式中,令 $n\to\infty$,即知 $x_n\to 0$.

3)⇒4),在 3) 的假定下,如果 4) 不成立,那么,必有 $x_n,y_n\in P$,使

$$0\leqslant x_n\leqslant y_n,\ \|x_n\|>n\|y_n\|.$$

不失一般性,可设 $\|x_n\|=1$. 于是 $y_n\to 0\ (n\to\infty)$. 由

$$y_n=x_n+(y_n-x_n),\quad y_n-x_n\in P,$$

由 3),$x_n\to 0$,此与 $\|x_n\|=1$ 矛盾.

4)⇒1):设 $x,y\in P,\|x\|=\|y\|=1$,由

$$x\leqslant x+y$$

及 4),存在 N(与 x,y 无关),使

$$\| x \| \leqslant N \| x+y \|,$$

即

$$\| x+y \| \geqslant \frac{1}{N}. \blacksquare$$

注　E 中锥 P 如果满足定理 1 中的条件 4)，我们就说，锥 P 中的元素的范数是**半单调的**.

定理 2　若 E 中锥 P 是正规的，则任何区间

$$[x_1, x_2] = \{x \in \mathrm{E} \mid x_1 \leqslant x \leqslant x_2\}$$

是有界的.

证明　设 $x \in [x_1, x_2]$，则有 $0 \leqslant x - x_1 \leqslant x_2 - x_1$，由于锥 P 是正规的，由定理 1，存在 $N > 0$，使

$$\begin{aligned}\| x \| &= \| x_1 + x - x_1 \| \leqslant \| x_1 \| + \| x - x_1 \| \\ &\leqslant \| x_1 \| + N \| x_2 - x_1 \|. \blacksquare\end{aligned}$$

定理 3　设实 Banach 空间 E 中锥 P 是正规的，$u_0 \in \dot{P}$，令

$$\mathrm{E}_{u_0} = \{x \in \mathrm{E} \mid \text{存在 } \lambda \geqslant 0 \text{ 使 } -\lambda u_0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0\},$$

则 E_{u_0} 是 E 的一个线性子空间，且对于 $x \in \mathrm{E}_{u_0}$，

$$\| x \|_{u_0} = \inf\{\lambda \mid \lambda \geqslant 0, -\lambda u_0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0\} \tag{13·1·1}$$

定义了 E_{u_0} 中元的范数，称作 x 的 **u_0－范数**. u_0－范数具有性质

i) 存在 $K > 0$，使 $\| x \| \leqslant K \| x \|_{u_0}$；

ii) E_{u_0} 在 u_0－范数下是完备的，从而是 Banach 空间，

iii) 在 u_0－范数下 $P_{u_0} = P \cap \mathrm{E}_{u_0}$ 是 E_{u_0} 的**正规锥**.

证明　E_{u_0} 是 E 的线性子空间是显然的. 我们首先证明(13·1·1)确实定义了 E_{u_0} 中元的范数. 当 $x = 0$ 时，显然 $\| x \|_{u_0} = 0$. 若 $x \in \mathrm{E}_{u_0}$，$x \neq 0$，由于

$$-\lambda u_0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0 \Leftrightarrow -\lambda u_0 \leqslant -x \leqslant \lambda u_0.$$

故 $\| x \|_{u_0} = \| -x \|_{u_0}$. 从而 $\| \alpha x \|_{u_0} = |\alpha| \, \| x \|_{u_0}$. 其次，因

$x\neq 0$，故 x 与 $-x$ 中至少有一个不属于 P，不失一般性，可设 $-x \overline{\in} P$. 因 P 是闭集，故 $\rho(-x,P)=d>0$，于是由 $-\lambda u_0\leqslant x\leqslant\lambda u_0$ 得 $-x+\lambda u_0\in P$，从而 $\|\lambda u_0\|\geqslant d$，由此即知 $\lambda\geqslant d/\|u_0\|$，从而 $\|x\|_{u_0}>0$.

现在证明三角不等式. 设 $x,y\in \mathrm{E}_{u_0}$，由

$$-\lambda_1 u_0\leqslant x\leqslant\lambda_1 u_0,\ -\lambda_2 u_0\leqslant y\leqslant\lambda_2 u_0$$

可得

$$-(\lambda_1+\lambda_2)u_0\leqslant x+y\leqslant(\lambda_1+\lambda_2)u_0,$$

从而

$$\begin{aligned}\|x+y\|_{u_0}&=\inf\{\lambda\,|\,\lambda\geqslant 0,-\lambda u_0\leqslant x+y\leqslant\lambda u_0\}\\&\leqslant\inf\{\lambda_1+\lambda_2\,|\,\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0,-\lambda_1 u_0\leqslant x\leqslant\lambda_1 u_0,\\&\qquad -\lambda_2 u_0\leqslant y\leqslant\lambda_2 u_0\}\\&=\inf\{\lambda_1\,|\,\lambda_1\geqslant 0,-\lambda_1 u_0\leqslant x\leqslant\lambda_1 u_0\}\\&\qquad+\inf\{\lambda_2\,|\,\lambda_2\geqslant 0,-\lambda_2 u_0\leqslant y\leqslant\lambda_2 u_0\}\\&=\|x\|_{u_0}+\|y\|_{u_0}.\end{aligned}$$

现在证明性质 i)，设 $x\in\mathrm{E}_{u_0}$，$\alpha=\|x\|_{u_0}$，则

$$-2\alpha u_0\leqslant x\leqslant 2\alpha u_0,$$

从而 $0\leqslant x+2\alpha u_0\leqslant 4\alpha u_0$，由于 P 是正规的，故存在 $N>0$ 使

$$\|x+2\alpha u_0\|\leqslant N\|4\alpha u_0\|,$$

从而

$$\begin{aligned}\|x\|&\leqslant\|x+2\alpha u_0\|+\|-2\alpha u_0\|\\&\leqslant 4N\alpha\|u_0\|+2\alpha\|u_0\|=K\alpha=K\|x\|_{u_0},\end{aligned}$$

其中 $K=4N\|u_0\|+2\|u_0\|$.

再证性质 ii). 设 $\{x_n\}$ 是 E_{u_0} 中一基本列，即

$$\|x_n-x_m\|_{u_0}\to 0\quad(n,m\to\infty),$$

由 i) 的结果，

$$\|x_n-x_m\|\leqslant K\|x_n-x_m\|_{u_0},$$

故 $\{x_n\}$ 是 E 中基本列，由 E 的完备性知，存在 $x^*\in$ E，使

$$\|x_n - x^*\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

现在,对任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在自然数 N,使当 $n, m \geqslant N$ 时恒有 $\|x_n - x_m\|_{u_0} \leqslant \varepsilon$,从而

$$-\varepsilon u_0 \leqslant x_n - x_m \leqslant \varepsilon u_0, \quad (n, m \geqslant N).$$

在上式中固定 n,而令 $m \to \infty$,即得

$$-\varepsilon u_0 \leqslant x_n - x^* \leqslant \varepsilon u_0 \quad (n \geqslant N),$$

从而 $\|x_n - x^*\|_{u_0} \leqslant \varepsilon\ (n > N_2)$,由此可知 $x^* \in \mathsf{E}_{u_0}$ 且

$$\|x_n - x^*\|_{u_0} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

最后证明 iii). 事实上,设 $0 \leqslant x \leqslant y$,由于由 $0 \leqslant y \leqslant \lambda u_0$ 可推出 $0 \leqslant x \leqslant \lambda u_0$,从而可得:$\|x\|\ u_0 \leqslant \|y\|\ u_0$,即 P_{u_0} 是正规的(定理 1). ▌

注　容易看出,P_{u_0} 是 E_{u_0} 中一个体锥. 事实上,u_0 是 P_{u_0} 的一个内点.

定义 4　如果 E 中任一单调上升的有界序列:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots \leqslant y \in \mathsf{E}$$

都有极限,则称锥 P 是正则的.

定理 4　若锥 P 是正则的,则 P 必是正规的.

证明　用反证法. 如果 P 不是正规的,则必有

$$\{x_n\}, \{y_n\} \subset P, \|x_n\| = \|y_n\| = 1,$$

而

$$\|x_n + y_n\| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ 收敛,令

$$u = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i + y_i), \quad z_n = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

显然,$z_n \leqslant u (n = 1, 2, \cdots)$ 且是单调上升的. 但是

$$\|z_{n+1} - z_n\| = \|x_n\| = 1$$

. 此与锥 P 的正则性相矛盾. ▍

定义 5 设 P 是 E 中锥,若对任一 $x \in \mathrm{E}$,都存在 $y,z \in P$,使

$$x = y - z$$

则称锥 P 是再生的.

定理 5 体锥是再生的.

证明 体锥是体半群,然后由命题 2 之 5) 即知体锥是再生的. ▍

定理 4 证明了正则的锥必是正规的,但相反的结论不真,即在一般的 Banach 空间中正规锥未必是正则的.

例 13·1·3 考虑 $C[0,1]$ 中非负函数锥 C^+,它是正规的,因为,对 $x(t) \geqslant 0, y(t) \geqslant 0$,我们有

$$\| x(t) + y(t) \| \geqslant \max(\| x(t) \|, \| y(t) \|).$$

根据定理 1,C^+ 是正规的. 但它不是正则的. 设

$$x_n(t) = 1 - t^n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

它是一单调上升有界序列,但它在 C^+ 中没有极限,这说明 C^+ 不是正则的.

定理 6 设 P 为 Banach 空间 E 中体锥,$u_0 \in \dot{P}$,则 P 是正规的充分必要条件是$[-u_0, u_0] = I_{u_0}$ 有界.

证明 必要性已由定理 2 得出,下证充分性.

取正数 $\rho > 0$,使 $\overline{B}(u_0, \rho) \subset P$. 则对任一 $x \in \mathrm{E}, x \neq 0$,有 $u_0 \pm \rho \dfrac{x}{\| x \|} \in P$,即

$$-\frac{\| x \|}{\rho} u_0 \leqslant x \leqslant \frac{\| x \|}{\rho} u_0. \qquad (13 \cdot 1 \cdot 2)$$

设 $x, y \in P, \| x \| = \| y \| = 1$,命 $\mu = \| x + y \|$,依 $(13 \cdot 1 \cdot 2)$ 式有

$$-\frac{\mu}{\rho} u_0 \leqslant x + y \leqslant \frac{\mu}{\rho} u_0,$$

从而

$$-\frac{1}{\rho}u_0 \leqslant \frac{-x-u}{\mu} \leqslant \frac{x}{\mu} \leqslant \frac{x+y}{\mu} \leqslant \frac{1}{\rho}u_0,$$

即　$\frac{\rho}{\mu}x \in I_{u_0}$. 根据 I_{u_0} 有界的假设，存在正数 α（它与 $x \in \mathrm{E}$ 无关）使 $\frac{\rho}{\mu}\|x\| \leqslant \alpha$，即 $\mu \geqslant \frac{\rho}{\alpha} = \delta$. 这意味着 $\|x+y\| \geqslant \delta$. x、y 既是任意的，按定义 P 是正规的. ▌

若 P 是 E 中体锥，$u_0 \in \dot{P}$，那么，从集合论观点，有 $\mathrm{E}_{u_0} = \mathrm{E}$，因此，对每一 $x \in \mathrm{E}$，可以定义 u_0 — 范数 $\|x\|_{u_0}$. 若 P 是正规的，E 在 $\|\cdot\|_{u_0}$ 下成一 Banach 空间.

定理 7　设 P 是 Banach 空间 E 中正规的体锥，$u_0 \in \dot{P}$，则对任一 $x \in \mathrm{E}$，有 $\|x\|_{u_0} \leqslant K\|x\|$，其中 K 是与 x 无关的正常数.

证明　设 $x \in \mathrm{E}$，$\|x\| = 1$. 因 $u_0 \in \dot{P}$，故存在正数 ρ，使

$$u_0 + \overline{B}(0,\rho) \subset P,$$

因此，$u_0 \pm \rho x \in P$，这意味着 $\pm \rho x \leqslant u_0$，即

$$-\frac{1}{\rho}u_0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\rho}u_0.$$

所以 $\|x\|u_0 \leqslant \frac{1}{\rho}$. 现在设 $x \in \mathrm{E}$，$x \neq 0$，则

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|_{u_0} \leqslant \frac{1}{\rho}$$

从而 $\|x\|u_0 \leqslant \frac{1}{\rho}\|x\|$. ▌

由定理 3 及定理 7 即得：

定理 8　设 P 是 Banach 空间 E 中的正规体锥，$u_0 \in \dot{P}$，则 $\|\cdot\|_{u_0}$ 与 $\|\cdot\|$ 等价.

§13·2 正线性泛函

定义 1 设 P 为 Banach 空间 $\mathbf{E}$ 中线性半群，$f \in \mathbf{E}^*$ 称为(相对于 P) **非负线性泛函**(记作 $f \geqslant 0$)，如果 $x \in P \Rightarrow f(x) \geqslant 0$；非负线性泛函 f 称为**正的**(记作 $f > 0$)，如果至少存在一元 $x_0 \in P$，使 $f(x_0) > 0$.)

$\mathbf{E}^*$ 中(相对于线性半群 P) 非负线性泛函的全体记为 P^*，P^* 显然也是线性半群，称为 P 的共轭半群.

按定义，P^* 显然是闭线性半群；此外，若 $f > 0$，则 $-f \overline{\in} P^*$.

利用线性半群 P^*，我们也可在 $\mathbf{E}^*$ 中引入半序关系 "$\geqslant$"("$\leqslant$")，$f, g \in \mathbf{E}^*$，称 $f \geqslant g$，如果 $x \in P \Rightarrow f(x) \geqslant g(x)$.

显然，如果 $f \in P^*$，$x \geqslant y$，则有 $f(x) \geqslant f(y)$.

引理 1 设 P 为 $\mathbf{E}$ 中体半群，如果可加泛函 f 满足

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in P \tag{13·2·1}$$

那么，$f \in \mathbf{E}^*$，从而 $f \in P^*$.

证明 首先注意到，由 f 的可加性，那么，对任一有理数 λ，有 $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

任取 $u \gg 0$，有理数 $\rho > 0$，使 $B(u, \rho) \subset P$. 于是，对任一 $x \in \mathbf{E}$，$\|x\| \leqslant 1$，有

$$u \pm \rho x \geqslant 0,$$

从而，由(13·2·1) 可得

$$f(u) \pm \rho f(x) \geqslant 0$$

即 $|f(x)| \leqslant \frac{1}{\rho} f(u)$ $(\forall x \in \mathbf{E}, \|x\| \leqslant 1)$，因此，$f$ 在单位球上有界，从而 $f \in \mathbf{E}^*$. ▌

引理 2 如果 $f \geqslant 0$，$B(u, \rho) \subset P$，那么

$$f(u)\geqslant\rho\|f\|.$$

证明　对任一 $e\in E,\|e\|=1$,那么,

$$f(u\pm\rho e)=f(u)\pm f(\rho e)\geqslant 0$$

所以,

$$f(u)\geqslant\rho|f(e)|\ (\forall e\in E,\|e\|=1);\quad 即$$

$$f(u)\geqslant\rho\|f\|.\ \blacksquare$$

此引理说明,如果 P 是体半群,$f\neq 0,f\geqslant 0$,那么 $f>0$,从而 $-f\overline{\in}P^*$,因而有

系 1　若 P 是体半群,P^* 必是锥.

定理 1　**(正线性泛函的延拓)** 设 $P\subset E$ 为体半群,设子空间 $G\subset E$ 至少含有一个严格正元 $u\gg 0$,那么,定义于 G 上的正线性泛函 $f(x)$,可以延拓成 E 上的正线性泛函.

证明　按条件,存在 $u\in G,\rho>0$,使 $B(u,\rho)\subset P$,设 $y_0\in E\backslash G$,以 x',x'' 表 G 中这样的两元:

$$x'\leqslant y_0\leqslant x'',\tag{13·2·2}$$

比如由 $u\pm\rho\dfrac{y_0}{\|y_0\|}\in P$,可取

$$x'=-\frac{\|y_0\|}{\rho}u,\quad x''=\frac{\|y_0\|}{\rho}u.$$

由(13·2·2),$f(x')\leqslant f(x'')$,取 ξ,使

$$\sup f(x')\leqslant\xi\leqslant\inf f(x'').\tag{13·2·3}$$

这里,上(下)确界取于满足(13·2·2)的 $x'(x'')$ 上.

现在考察线性子空间是 $G_0\supset G$,其中,G_0 由所有形状为 $y=x+ty_0$ 的元素组成的(式中 $x\in G$,t 为实数).令

$$\varphi(y)=f(x)+t\xi,$$

易证函数 φ 是 G_0 上的正线性泛函(即对任一 $x\in P\cap G_0\Rightarrow\varphi(x)\geqslant 0$).$\varphi$ 的线性性质是显然的;φ 的正性,是因为若 $y=x+ty_0\geqslant 0(t\neq 0)$,那么

$$y_0 \geqslant -\frac{x}{t}\ (\text{当 } t > 0), \quad y_0 < -\frac{x}{t}\ (\text{当 } t < 0);$$

由(13·2·3)

$$\xi \geqslant -\frac{1}{t} f(x)\ (\text{当 } t > 0\ )\ \text{及}\ \xi \leqslant -\frac{1}{t} f(x),\ (\text{当 } t < 0).$$

在两种情形,皆有

$$\varphi(y) = f(x) + t\xi \geqslant 0.$$

类似于泛函延拓定理的证明,可把 f 延拓成整个 E 上的正线性泛函,然后再由引理 1,延拓后的泛函是有界线性泛函. ▌

系 2　对于任意一个非平凡体半群,至少存在一个正泛函.

证明　设 P 是一个非平凡的体半群,任取 $u \gg 0$,则 $-u \overline{\in} P$(请予验证) 于是,可在由 u 生成的一维子空间上可定义一正线性泛函,然后由定理 1,它可延拓成整个 E 上的有界线性正泛函. ▌

定理 2　设 $P_1 (\subset \mathrm{E})$ 为体半群,P_2 为任意半群,且 $P_2 \cap \dot{P}_1 = \varnothing$,那么必存在这样的 $f \in \mathrm{E}^*$,$f \neq 0$,使得

$$x \in P_1 \Rightarrow f(x) \geqslant 0\ (\leqslant 0);$$

$$x \in P_2 \Rightarrow f(x) \leqslant 0\ (\text{相应地},\ \geqslant 0).$$

证明　P_1, P_2 既为半群,它们就都是凸集,由 P_1 是体平群,因此 $\dot{P}_1 \neq \varnothing$,根据凸集分离定理(§9·6. 定理 3),存在 $f \in \mathrm{E}^*$,$f \neq 0$,及实数 γ,使

$$x \in P_1 \Rightarrow f(x) \geqslant \gamma\ (\text{或} \leqslant \gamma);$$

$$x \in P_2 \Rightarrow f(x) \leqslant \gamma\ (\text{相应地},\ \geqslant \gamma).$$

再注意到 $0 \in P_1 \cap P_2$,即得 $\gamma = 0$. ▌

系 3　如果 $P \subsetneqq \mathrm{E}$ 为闭半群,则必存在 $f \in \mathrm{E}^*$,$f \neq 0$ 使 $x \in P \Rightarrow f(x) \geqslant 0$.

证明　以 $x_0 \in \mathrm{E} \backslash P$, $\| x_0 \| = 1$, 因 P 闭,那么

$$\rho(x_0, P) = \inf_{x \in P} \| x - x_0 \| = d > 0.$$

令

$$\overline{B} = \overline{B}(x_0, d) = \{x \in \mathrm{E} \mid \| x - x_0 \| \leqslant d\},$$

$$P_1 = \{\lambda x \mid x \in \overline{B}, \lambda \geqslant 0\},$$

由 §13·1 例 13·1·2，P_1 是体锥，$\dot{P}_1 \neq \varnothing$. 显然，$P \cap \dot{P}_1 = \varnothing$，根据定理 1，存在 $f \in \mathrm{E}$，$f \neq 0$，使

$$x \in P \Rightarrow f(x) \geqslant 0;$$

$$x \in P_1 \Rightarrow f(x) \leqslant 0. \blacksquare$$

系 4　如果 $P \subsetneqq \mathrm{E}$ 为体半群，G 为 E 的子空间，且 $\mathrm{G} \cap \dot{P} = \varnothing$，那么必存在正线性泛函 f，使 $x \in \mathrm{G} \Rightarrow f(x) = 0$.

证明　G 为子空间，因此也是线性半群，由定理 2，存在 $f \in \mathrm{E}^*$，$f \neq 0$ 使

$$x \in P \Rightarrow f(x) \geqslant 0; \tag{13·2·4}$$

$$x \in G \Rightarrow f(x) \leqslant 0. \tag{13·2·5}$$

由于 G 是子空间，从而对任意 $x \in \mathrm{G}$ 有 $f(x) = 0$. 由(13·2·4)，f 是非负泛函，再根据引理 2，f 就是正泛函. ▌

定理 3　设 P 为一线性半群，$x_0 \in \mathrm{E}$，$\rho(x_0, P) = d > 0$，则存在线性泛函 $f \in P^*$，$f \neq 0$，使

$$f(x_0) \leqslant -d \| f \|.$$

此外，若 P 是体半群，那么，对于 P 的每个边界元 y_0，存在正线性泛函 f，使 $f(y_0) = 0$.

证明　如同证明系 3 那样，取

$$P_1 = \{z = \lambda(x_0 + u) \mid \lambda \geqslant 0, \| u \| \leqslant d\},$$

则 P_1 是体半群，$P \cap \dot{P}_1 = \varnothing$ 由定理 2，存在 P 上非负线性泛函 $f \neq 0$，使

$$f(z)=\lambda f(x_0+u)\leqslant 0,\qquad \forall z\in P_1$$

因此，

$$f(x_0)\leqslant -f(u)\quad (\forall u\in \mathrm{E},\|u\|\leqslant d),$$

从而

$$f(x_0)\leqslant -\sup_{\|u\|\leqslant d}|f(u)|=-d\|f\|.$$

当 P 为体半群，$y_0\in\mathrm{E}$ 为 P 的边界元时取 G 为由 y_0 所生成的子空间，即 $\mathrm{G}=\{\lambda y_0\mid\lambda\in R^1\}$，再利用系 4，即知存在 $f>0$ 使 $f(y_0)=0$. ▌

系 5 设 P 为线性半群，$x_0\in\overline{P}$ 的充分必要条件是对所有 $f\in P^*$ 有 $f(x_0)\geqslant 0$.

系 6 设 $P\neq\mathrm{E}$ 为体半群，$x_0\in\dot{P}$ 的充分必要条件是，对所有 $f\in P^*$，$f\neq 0$，有 $f(x_0)>0$.

注 显然，若 P 是半群，那么 $\overline{P}$ 也是半群，且 $P^*=\overline{P}^*$.

定理 4 设 P 为闭半群，若 $x_0\in P$，$-x_0\,\overline{\in}\,P$ 则存在正泛函 $f\in P^*$，使 $f(x_0)>0$.

证明 因 $-x_0\,\overline{\in}\,P$，P 闭，则 $\rho(-x_0,P)=d>0$. 则定理 3，存在 $f\in P^*$，$f\neq 0$，使

$$f(-x_0)\leqslant -d\|f\|<0$$

从而， $f(x_0)\geqslant d\|f\|>0$. ▌

定理 5 设 P 是 Banach 空间 E 的一个再生锥，则 P^* 是 E^* 中的锥，称为 P 的**共轭(对偶)锥**.

证明 由于 P^* 是闭线性半群，因此，为证 P^* 是锥，只需证明，对任一 $f\in P^*$，$f\neq 0$，必有 $-f\,\overline{\in}\,P^*$.

事实上，如果不然，必存在 $f_0\in P^*$，$f_0\neq 0$，且 $-f_0\in P^*$. 于是，对任一 $u\in P$，有

$$f_0(u)\geqslant 0,\qquad -f_0(u)\geqslant 0,$$

从而

$$f_0(u) = 0, \quad \forall u \in P.$$

现在设 $x \in \mathsf{E}$,因 P 是再生的,故存在 $u,v \in P$,使 $x = u-v$,由此可知

$$f_0(x) = f_0(u) - f_0(v) = 0$$

即 $f_0 = 0$,它与假设矛盾. ▌

系 7　若 P 是生成Banach空间 E 的锥,那么,对每一 $f \in P^*$, $f \neq 0$,必有 $x_0 \in P$,使

$$f(x_0) > 0.$$

系 8　若 P 是 Banach 空间 E 中体锥,则 P^* 是 E^* 中锥.

定理 6　设 P 是可分 Banch 空间 E 中锥,那么,存在线性泛函 $f \in \mathsf{E}^*$,使对所有 $x \in P$,有

$$f(x) > 0. \qquad (13 \cdot 2 \cdot 6)$$

证明　设 $\{x_n\} \subset B(0,1)$ 为球 $B(0,1)$ 的可数稠集,再设 $R = B^* \cap P^*$,其中 B^* 为 E^* 中单位球. 由于 E 可分,因此 B^* 是弱 * 列紧. 在 R 中引入距离 $d(\cdot,\cdot)$:设 $f_1, f_2 \in B^*$,令

$$d(f_1, f_2) = \sup_n \frac{|f_1(x_n) - f_2(x_n)|}{n},$$

容易验证,在此距离下 R 是一完备距离空间,且

$$f_n \to f_0 (\text{在距离 } d \text{ 下}) \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{\text{弱}^*} f_0.$$

因此由 B^* 的弱 * 列紧性推出 R 是 $d(\cdot,\cdot)$ 紧集,R 作为距离空间就是可分的,因而在 R 中存在一可数稠集 $\{f_n\}$. 现在令

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n},$$

因它按 E^* 中范数收敛,故 $f \in \mathsf{E}^*$,又因诸 $f_n \in P^*$,P^* 是线性半群,故 $f \in P^*$. 现在我们证明,对任一 $x \in P$,$x \neq 0$,有 $f(x) > 0$.

如果不然,必存在 $x_0 \in P$,$x_0 \neq 0$,使 $f(x_0) = 0$. 从而对所有的 n,$f_n(x_0) = 0$. 因 P 是锥,故 $-x_0 \overline{\in} P$,由定理 4,必有 $\overline{f} \in P^*$, $\overline{f}(x_0) > 0$. 可设 $\|\overline{f}\| < 1$. 从而 $\{f_n\}$ 中必有一个子列 $\{f_{n_k}\}$ 按距

离 $d(\cdot,\cdot)$ 收敛于 $\overline{f}$. 因而 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{弱}^*} \overline{f}$. 于是 $f_{n_k}(x_0) \to \overline{f}(x_0) > 0$. 此与 $f_{n_k}(x_0) = 0$ 矛盾. ▌

定理 7 设 P 是 Banach 空间 E 中一个体锥, $u \in \dot{P}$, $f \in \mathsf{E}^*$, 则存在 $g, h \in P^*$ 使 $f = g - h$ 的充分必要条件是: f 在

$$I_u = \{x \in \mathsf{E} \mid -u \leqslant x \leqslant u\}$$

上有界.

证明 设 $f = g - h$, $g, h \in P^*$. 于是, 对任一 $x \in I_u$ 有

$$-g(u) \leqslant g(x) \leqslant g(u), \quad -h(u) \leqslant h(x) \leqslant h(u),$$

从而

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |g(x) - h(x)| \leqslant |g(x)| + |h(x)| \\ &\leqslant |g(u)| + |h(u)| \end{aligned}$$

即 f 在 I_u 上有界. 充分性. 设 $f \in \mathsf{E}^*$ 在 I_u 上有界. 即

$$\mu = \sup_{x \in I_u} |f(x)| < +\infty.$$

不失一般性, 设 $\|u\| = 1$. 否则, 以 $\dfrac{u}{\|u\|} = u_0 \in \dot{P}$ 代替 u.

取 $\rho > 0$, 使 $\overline{B}(u, \rho) \subset P$. 从而对任一 $x \in \mathsf{E}$, $x \neq 0$, 有

$$u \pm \rho \frac{x}{\|x\|} \in P, \quad \text{即} -u \leqslant \rho \frac{x}{\|x\|} \leqslant u.$$

于是

$$\left| f\left(\rho \frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leqslant \mu, \quad \text{或写成} |f(x)| \leqslant \frac{\mu}{\rho} \|x\|.$$

当 $x \in \dot{P}$, $0 \leqslant y \leqslant x$ 时,

$$0 \leqslant \frac{\rho}{\|x\|} y \leqslant \frac{\rho}{\|x\|} x \leqslant u,$$

所以 $\quad \dfrac{\rho}{\|x\|} y \in Iu$, 从而

$$\left|f\left(\frac{\rho}{\|x\|}y\right)\right| \leqslant \mu,$$

即

$$|f(y)| \leqslant \frac{\mu}{\rho}\|x\|, \quad \forall 0 \leqslant y \leqslant x. \qquad (13 \cdot 2 \cdot 7)$$

现在令

$$p(x) = \sup_{0 \leqslant y \leqslant x} f(y),$$

由(13·2·7)，$p(x)$对一切$x \in P$有定义. 显然当$x \in P$时，$p(x) \geqslant 0$，$p(x) \geqslant f(x)$，且$p(\lambda x) = \lambda p(x)(\lambda \geqslant 0)$. 此外，当$x, y \in P$时

$$p(x) + p(y) = \sup_{0 \leqslant z_1 \leqslant x} f(z_1) + \sup_{0 \leqslant z_2 \leqslant y} f(z_2)$$

$$= \sup_{\substack{0 \leqslant z_1 \leqslant x \\ 0 \leqslant z_2 \leqslant y}} f(z_1 + z_2) \leqslant \sup_{0 \leqslant z \leqslant x+y} f(z) = p(x+y).$$

令$\mathrm{L}_0 = \{\lambda u \mid \lambda \in R^1\}$，在$\mathrm{L}_0$上定义

$$g_0(\lambda u) = \lambda p(u),$$

则g_0是L_0上的非负连续线性泛函. 且当$x \in P \cap \mathrm{L}_0$时，.

$$g_0(x) = g_0(\lambda u) = \lambda p(u) = p(\lambda u) = p(x).$$

现在设$\mathrm{L} \supset \mathrm{L}_0$，且$g_0$已延拓成$\mathrm{L}$上的非负线性泛函$g$，满足当$x \in P \cap \mathrm{L}$时，$g(x) \geqslant p(x)$，如果$\mathrm{L} \neq \mathrm{E}$，取$x_0 \overline{\in} \mathrm{L}$，令

$$\mathrm{L}_1 = \{x + \lambda x_0 \mid x \in \mathrm{L}, \lambda \in R^1\},$$

那么，L_1中元素v可唯一地表示成$v = x + \lambda x_0$的形状. 由

$$-\frac{\|x_0\|}{\rho}u \leqslant x_0 \leqslant \frac{\|x_0\|}{\rho}u$$

及$u \in \mathrm{L}_0 \subset \mathrm{L}$知存在$y, z \in \mathrm{L}$，使

$$x_0 + y \in P, \quad z - x_0 \in P.$$

于是，对任意满足$-y \leqslant x_0 \leqslant z$的$\mathrm{L}$中元$y, z$，

$$y + z = (y + x_0) + (z - x_0) \in P$$

所以$y + z \in P \cap \mathrm{L}$. 且

$$g(y) + g(z) = g(y+z) \geqslant p(y+z),$$

但

$$p(y+z)=p(y+x_0+z-x_0)\geqslant p(y+x_0)+p(z-x_0),$$

所以

$$p(y+x_0)-g(y)\leqslant -p(z-x_0)+g(z).$$

令

$$\alpha_1=\sup_{\substack{y\in L\\ y+x_0\in P}}[p(y+x_0)-g(y)],$$

$$\alpha_2=\inf_{\substack{y\in L\\ y-x_0\in P}}[-p(y-x_0)+g(y)],$$

则 $\alpha_1\leqslant\alpha_2$. 任取实数 γ_0,使

$$\alpha_1\leqslant\gamma_0\leqslant\alpha_2.$$

对每一 $v=x+\lambda x_0\in \mathsf{L}_1$,令

$$g_1(v)=g(x)+\lambda\gamma_0\quad(x\in \mathsf{L},\lambda\in R^1),$$

显然,$g_1(v)$ 是 L_1 上的线性泛函,且它是 g 在 L_1 上的延拓. 现在证明,g_1 是 L_1 上的非负泛函. 设 $v=x+\lambda x_0\in P\cap L_1$,那么

1) 当 $\lambda>0$ 时,$\dfrac{x}{\lambda}+x_0\in P$,从而

$$p\left(\frac{x}{\lambda}+x_0\right)-g\left(\frac{x}{\lambda}\right)\leqslant\alpha_1\leqslant\gamma_0;$$

$$p(x+\lambda x_0)-g(x)\leqslant\lambda\gamma_0;$$

2) 当 $\lambda<0$ 时,$-\dfrac{x}{\lambda}-x_0\in P$,从而

$$-p\left(-\frac{x}{\lambda}-x_0\right)+g\left(-\frac{x}{\lambda}\right)\geqslant\alpha_2\geqslant\gamma_0,$$

$$p(x+\lambda x_0)-g(x)\leqslant\lambda\gamma_0.$$

因此,对任一 $v\in \mathsf{L}_1\cap P$,恒有

$$g_1(v)=g(x)+\lambda\gamma_0\geqslant p(v),$$

从而 g_1 是 L_1 上的非负线性泛函,因此也是连续的.

利用 Zorn 引理,即知,$g_1(x)$ 可以延拓成全 E 上非负线性泛函

$g(x)$，满足，当 $x \in P$ 时，

$$g(x) \geqslant p(x) \geqslant f(x)$$

特别，$g \in P^*$. 现在令

$$h(x) \equiv g(x) - f(x)$$

则 $h \in P^*$，且 $f = g - h$. ▌

系 9　若 E 中体锥 P 是正规的，那么 P^* 是 E^* 的再生锥.

§13·3　正线性算子

在这一节中，我们主要研究映 Banach 空间中锥入自身的全连续线性算子的某些性质.

定义 1　设 E 为 Banach 空间，P 为 E 中锥，线性算子 $A: E \to E$ 称为正的，如果 $A(P) \subset P$.

定理 1　设 P 是 E 中锥，$A: E \to E$ 为线性有界算子，那么，$A(P) \subset P \Leftrightarrow A^*(P^*) \subset P^*$.

证明　设 $A(P) \subset P$. 对任一 $x \in P$ 有 $Ax \in P$，那么，对 $f \in P^*$，$x \in P$ 有

$$A^* f(x) = f(Ax) \geqslant 0,$$

因此 $A^* f \in P^*$.

反之，设 $A^*(P^*) \subset P^*$. 若 $A(P) \not\subset P$，则必有 $x_0 \in P$，但 $Ax_0 \overline{\in} P$，于是存在 $f \in P^*$，使 $f(Ax_0) < 0$，即 $A^* f(x_0) < 0$，此与 $A^* f \in P^*$ 矛盾. ▌

定理 2　设 P 为体锥，$A(P) \subset P$. 若存在 $x_0 \in E$ 使 $Ax_0 \gg 0$，那么对所有 $x \gg 0$ 有 $Ax \gg 0$.

证明　由 $A(P) \subset P$，可知，当 $x_1 \geqslant x_2$ 时，有 $Ax_1 \geqslant Ax_2$. 设 $x \gg 0$，则存在 $\delta > 0$，使 $x \gg \delta x_0$ 从而 $Ax \geqslant A(\delta x_0) = \delta A x_0 \gg 0$. ▌

定理 3　设 $P \subset E$ 为体锥，$\Gamma = \{A\}$ 为一正线性算子族，且 Γ

中元两两可交换. 如果 Γ 在 $\mathring{P}$ 中有公共不动点 v,那么,

$$\Gamma^* = \{A^* \mid A \in \Gamma\}$$

在 P^* 中有公共不动点 φ:$A^*\varphi = \varphi\ (\forall A \in \Gamma)$.

证明 对 $x \in \mathsf{E}$,令

$$\| x \|_v = \inf\{t \mid -tv \leqslant x \leqslant tv\}$$

显然 $\| x \|_v$ 具有下列性质:

1° $\| x \|_v \geqslant 0$;

2° $\| x+y \|_v \leqslant \| x \|_v + \| y \|_v$;

3° $\| \lambda x \|_v = |\lambda| \, \| x \|_v$;

由 $-tv \leqslant x \leqslant tv$ 可得,当 $A \in \Gamma$ 时,$-tAv \leqslant Ax \leqslant tAv$,又 $Av = v$,故

4° $\| Ax \|_v \leqslant \| x \|_v$.

考虑集合

$$\mathsf{G} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (A_i x_i - x_i) \,\middle|\, x_i \in \mathsf{E}, A_i \in \Gamma, n \in N \right\}$$

其中 N 表自然数集. 显然,G 是 E 的子空间. 我们证明,

$$\mathsf{G} \cap \mathring{P} = \varnothing.$$

否则,设 G 含有 P 的某一内点 y,它可表示为

$$y = \sum_{i=1}^{n} (A_i x_i - x_i), \tag{13·3·1}$$

故存在 $\rho > 0$,使 $y > \rho v$.

设 m 为某一自然数,置

$$B_m = \frac{1}{m^n} \sum_{k_1, \cdots, k_n = 1}^{m} A_1^{k_1} \cdots A_n^{k_n}, \tag{13·3·2}$$

那么,$BP \subset P$,因此

$$B_m y \geqslant \rho B_m v = \rho v,\ \| B_m y \|_v \geqslant \rho. \tag{13·3·3}$$

另一方面,由性质 4°

$$\| A_1^{k_1}\cdots A_n^{k_n}x_j \|_v \leqslant \| x_j \|_v.$$

再由(13·3·1)(13·3·2),

$$m^n B_m y = \Big(\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{m} A_1^{k_1}\cdots A_n^{k_n}\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}(A_i x_i - x_i)\Big)$$

$$= \sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(A_1^{k_1}\cdots A_n^{k_n})(A_i x_i - x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k_1,\cdots,k_n=1}^{m}(A_1^{k_1}\cdots A_{i-1}^{k_i-1}A_{i+1}^{k_i+1}\cdots A_n^{k_n})\cdot(A_i^{k_i+1} - A_i^{k_i})x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k_1,\cdots,k_{i-1}k_{i+1},\cdots,k_n=1}^{m} A_1^{k_1}\cdots A_{i-1}^{k_i-1}A_{i+1}^{k_i+1}\cdots A_n^{k_n}(A_i^{m+1}x_i - A_i x_i)\Big]$$

上式右端共有 $2n\cdot m^{n-1}$ 项. 故得

$$\| m^n B_m y \|_v \leqslant 2nm^{n-1}\| x_i \|_v \leqslant 2nm^{n-1}d,$$

其中 $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\| x_i \|_v$. 从而 $\| B_m y \|_v \leqslant \dfrac{2n}{m}d$. 令 $m \to +\infty$,即得

$\| B_m y \|_v \to 0$,它与(13·3·3)矛盾. 因此,$\mathrm{G}\cap\dot{P} = \varnothing$. 于是,有 $\varphi\in P^*$,使 $\varphi(\mathrm{G}) = 0$,特别,对任一 $A\in\Gamma$,$x\in \mathrm{E}$ 有

$$\varphi(Ax - x) = 0,\text{即}(A^*\varphi - \varphi)x = 0,$$

这意味着,对于任一 $A\in\Gamma$,$A^*\varphi = \varphi$. ▌

系 1　设 $P\subset \mathrm{E}$ 是体锥,A:$\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ 为有界线性算子,$A(P)\subset P$. 若 A 在 $\dot{P}$ 中有不动点 v,则 A^* 在 P^* 也有不动点 φ.

定理 4　设 P 为 Banach 空间 E 中锥且 $\mathrm{E} = P - P$. A:$\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ 为全连续线性算子,$A(P)\subset P$. 若 A 有非零固有值,那么,A 必有一正固有值 ρ,满足:$\rho\geqslant|\lambda|$,$\forall\lambda\in\sigma(A)$;而与 ρ 对应的至少有一正固有元 v(即 $v\in\dot{P}$,$Av = \rho v$),同时存在 $\varphi\in\dot{P}^*$,使 $A^*\varphi = \rho\varphi$.

证明　1°. 先设 A 有一个按绝对值最大的正固有值 λ_0,在此假定下,我们证明,存在 $v\in P$,$\varphi^*\in P^*$,使 $Av = \lambda_0 v$,$A^*\varphi = \lambda_0\varphi$.

$R_\lambda = (A - \lambda\mathrm{I})^{-1}$ 在 λ_0 的邻域中可展成

$$R_\lambda = \sum_{i=-n}^{\infty} C_i(\lambda - \lambda_0)^i, \quad C_{-n} \neq 0, \qquad (13 \cdot 3 \cdot 4)$$

C_i 是有界线性算子，展开式右端按算子范数收敛(证明见复旦大学数学系主编《实变函数论与泛函分析概要》1963 年第二版附录§4). 由于 P 是再生锥，$C_{-n} \neq 0$，故必存在 $u \in P$，使 $C_{-n}u \neq 0$.

由(13·3·4)得

$$(\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} C_{-n+i}(\lambda - \lambda_0)^i,$$

于是

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda u &= \sum_{i=0}^{\infty} C_{-n+i}(\lambda - \lambda_0)^i u \\ &= C_{-n}u + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^i C_{-n+i}u.\end{aligned}$$

令 $\lambda \to \lambda_0$，即得

$$C_{-n}u = \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda u. \qquad (13 \cdot 3 \cdot 5)$$

此外，当 $\lambda > \lambda_0$ 时，

$$R_\lambda u = (A - \lambda I)^{-1} u = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} u,$$

因为 $A^n u \in P$，故 $-R_\lambda u \in P$. 特别当 $\lambda \to \lambda_0 + 0$ 时依(13·3·5)式可得出 $-C_{-n}u \in P$. 令 $v = -C_{-n}u$，并注意到

$$(A - \lambda I)R_\lambda = I \Rightarrow AR_\lambda = \lambda R_\lambda + I,$$

即得

$$\begin{aligned}Av = A(-C_{-n}u) &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} [-(\lambda - \lambda_0)^n AR_\lambda u] \\ &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} [-(\lambda - \lambda_0)^n (\lambda R_\lambda + I)u] \\ &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} [-\lambda(\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda u] - \lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)^n u \\ &= \lambda_0 \lim_{\lambda \to \lambda_0} [-(\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda u] \\ &= \lambda_0 v.\end{aligned}$$

注意，在上面的证明过程中，$u \in P$ 是任意一个满足 $C_{-n}u \neq 0$ 的 P 中元，由此可知，$-C_{-n}(P) \subset P$. 现在，由(13·3·4)可得

$$R_\lambda^* = \sum_{i=-n}^{\infty} C_i^* (\lambda - \lambda_0)^i. \tag{13·3·6}$$

取 $\varphi \in P^*$，使 $\varphi(v) > 0$，命

$$\psi = -C_{-n}^* \varphi,$$

那么，对任意 $x \in P$ 有

$$\psi(x) = -C_{-n}^* \varphi(x) = \varphi(-C_{-n}x) \geqslant 0,$$

故 $\psi \in P^*$. 再由

$$\psi(u) = (-C_{-n}^* \varphi)u = \varphi(-C_{-n}u) = \varphi(v) > 0$$

知 $\psi \neq 0$. 现在，由(13·3·6)得

$$-(\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda^* = -C_{-n}^* - \sum_{i=1}^{\infty} C_{-n+i}^* (\lambda - \lambda_0)^i,$$

从而

$$\begin{aligned}
\psi &= -C_{-n}^* \varphi = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \sum_{i=0}^{\infty} [-C_{-n+i}^* (\lambda - \lambda_0)^i] \varphi \\
&= \lim_{\lambda \to \lambda_0} [-(\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda^* \varphi];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^* \psi &= A^* (-C_{-n}^* \varphi) \\
&= A^* \lim_{\lambda \to \lambda_0} [-(\lambda - \lambda_0)^n R_\lambda^* \varphi] \\
&= \lim_{\lambda \to \lambda_0} [-(\lambda - \lambda_0)^n A^* R_\lambda^* \varphi] \\
&= \lim_{\lambda \to \lambda_0} [-(\lambda - \lambda_0)^n (\lambda R_\lambda + I)^* \varphi] \\
&= \lambda_0 \psi.
\end{aligned}$$

2°. 设 A 的按绝对值最大的诸固有值之中有一个是正数的整数次方根，即

$$Au = \lambda_0 u, \lambda_0^n > 0.$$

于是，A^n 有固有值 $\lambda_0^n > 0$. 因为 $A^n(P) \subset P$，A^n 的固有值皆可表成 A 的固有值 λ 的 n 次方，所以 λ_0^n 就是 A^n 的按绝对值最大的正固有

值,依 1° 所证,必存在 $v \in P, v \neq 0$,使

$$A^n v = \lambda_0^n v.$$

令

$$v' = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_0|^{n-i} A^{i-1} v, \qquad (13 \cdot 3 \cdot 7)$$

则 $v' \in P$. 显然,$v' \neq 0$,事实上,若 $v' = 0$,则有

$$|\lambda_0|^{n-1} v = -\sum_{i=2}^{n} |\lambda_0|^{n-i} A^{i-1} v,$$

从而必有 $\lambda_0 = 0$ 或 $v = 0$. 它与前面的假设矛盾. 由(13·3·7) 即得

$$Av' = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_0|^{n-i} A^i v = \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_0|^{n-i} A^i v + |\lambda_0|^n v$$

$$= |\lambda_0| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_0|^{n-i} A^{i-1} v = |\lambda_0| v'.$$

上式表明,若 A 的按绝对值最大的诸固有值中,有一个是正数的整数次方根,它必有一个按绝对值最大的正固有值 ρ. 依 1° 所证,对此固有值 ρ, A, A^* 有对应于 ρ 的正固有元 v 及 ψ.

3°. 设 λ_0 是 A 的按绝对值最大的固有值中实数部分最大的一个固有值

$$\lambda_0 = \rho(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0),$$

由 2° 所证,若 λ_0 不是正数,那么,θ_0 就不可能是 2π 的有理数倍. 对于 A 的任一固有值 λ_i,若 $|\lambda_i| < \rho$,那么,当 $\varepsilon > 0$ 充分小时,$|\lambda_j + \varepsilon\lambda_j^2| < \rho$. 当 $|\lambda_j| = \rho$ 时,我们令

$$\lambda_j = \rho(\cos\theta_j + i\sin\theta_j),$$

于是

$$\lambda_j + \varepsilon\lambda_j^2 = \rho(\cos\theta_j + i\sin\theta_j) + \varepsilon\rho^2(\cos 2\theta_j + i\sin 2\theta_j)$$

$$= (\rho\cos\theta_j + \varepsilon\rho^2\cos 2\theta_j) + i(\rho\sin\theta_j + \varepsilon\rho^2\sin 2\theta_j)$$

$$|\lambda_j + \varepsilon\lambda_j^2| = \rho[1 + \varepsilon^2\rho^2 + 2\varepsilon\rho\cos\theta_j]^{1/2}.$$

因 $\cos\theta_j \leqslant \cos\theta_0$，故 $|\lambda_j + \varepsilon\lambda_j^2| \leqslant |\lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2|$.

现在对小正数 $\varepsilon > 0$，考虑算子

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon A^2,$$

那么 A_ε 的谱是数集

$$\{\lambda_j + \varepsilon\lambda_j^2 \mid \lambda_j \in \sigma(A)\}$$

根据上面的讨论，对充分小的 $\varepsilon > 0$，$\lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2$ 是 A_ε 的按绝对值最大的固有值. 现在取 $\varepsilon > 0$ 充分小，且使 $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2$ 的幅角是 2π 的有理数倍，即使 $\lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2$ 是某正数的整数次方根. 那么由 2° 所证，$|\lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2|$ 就是 A_ε 的按绝对值最大的固有值. 注意到，当 $\lambda_j \neq \lambda_0, \bar{\lambda}_0$ 时，$|\lambda_j + \varepsilon\lambda_j| < |\lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2|$，且 A_ε 的固有值皆可表成 $\lambda_j + \varepsilon\lambda_j^2$ 的形式，故必有

$$|\lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2| = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2$$

$$\text{或} |\lambda_0 + \varepsilon\lambda_0^2| = \bar{\lambda}_0 + \varepsilon\bar{\lambda}_0^2.$$

只要取 ε 足够小，即可知道 $\lambda_0 > 0$. ▌

定理 5　设 E 是 Banach 空间，P 为 E 的再生锥. A: E → E 为全连续线性算子，$A(P) \subset P$. 若存在 $u \in P$，$\|u\| = 1$ 及正数 γ、自然数 p，使

$$A^p u \geqslant \gamma u, \tag{13·3·8}$$

则 A 必有一个非零固有值，而且在其按绝对值最大的诸固有值中必有一个是正的且不小于 $\sqrt[p]{\gamma}$. 记此正固值为 $\rho(\geqslant\sqrt[p]{\gamma})$，且 A 有一个对应于 ρ 的正固有元 $v' \in \dot{P}$：

$$Av' = \rho v'.$$

A^* 有一个固有元 $\psi \in \dot{P}^*$：

$$A^*\psi = \rho\psi.$$

证明　根据定理 4，只需证明 A 的谱半径 $\geqslant \sqrt[p]{\gamma}$. 由(13·3·8)，

$$A^{np} u \geqslant \gamma^n u.$$

现在取 $f \in P^*$, $f(u) > 0$，则

$$\gamma^n f(u) = f(\gamma^n u) \leqslant f(A^{np}u) \leqslant \| f \| \, \| A^{np}u \|$$
$$\leqslant \| f \| \, \| A^{np} \| \, \| u \| = \| f \| \, \| A^{np} \|,$$

故

$$\| A^{np} \| \geqslant \gamma^n \cdot \frac{f(u)}{\| f \|},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[np]{\| A^{np} \|} \geqslant \sqrt[p]{\gamma},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| A^n \|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[np]{\| A^{np} \|} \geqslant \sqrt[p]{\gamma}.$$

即 A 的谱半径 $\gamma(A) \geqslant \sqrt[p]{\gamma}$. 由于谱是闭集，故 A 的按绝对值最大的固有值中有一个是正的，它等于谱半径. ▌

系 2 设 P 为 Banach 空间 E 中锥，A:E → E 为全连续线性算子，$A(P) \subset P$，若存在 $u_0 \in P$, $\| u_0 \| = 1$ 及 $\gamma > 0$，使

$$Au_0 \geqslant \gamma u_0,$$

则 A 必有一正固有值，它对应于一个正固有元.

证明 令 $\mathrm{E}_0 = P - P$，则 $\mathrm{E}_0 \subset \mathrm{E}$ 为 E 的闭子空间. A 在 E_0 上的限制仍记作 A. 由于 $A(P) \subset P$，故 $A(\mathrm{E}_0) \subset \mathrm{E}_0$. 因此，$A$ 可看作映 E_0 入 E_0 的全连续线性算子，且 P 是生成 E_0 的锥. 于是由定理 5 即知 A 在 E_0 中有一正固有值，对应于这个正固有值，A 有一正固有元 $v \in P$. ▌

定义 2 设 E 是 Banach 空间，P 为 E 中体锥. A:E → E 为有界线性算子. 称 A 按 P 是**强正的**，如果对每一 $x \in \dot{P}$，存在 $n = n(x)$，使 $A^n x \gg 0$.

定理 6 若 A 按 P 强正，则对每一 $x \in \dot{P}$ 有 $Ax \in \dot{P}$.

证明 任取一 $x \in \dot{P}$，有 $n = n(x)$，使

$$A^n x \gg 0,$$

令 $v = A^{n-1}x$，则 $Av \gg 0$. 于是，根据定理 2. 对所有 $x \in \dot{P}$ 有 $Ax \gg 0$. ▌

定理 7　设 P 是 Banach 空间 E 中体锥. A:E→E 为有界线性算子，$A(P) \subset P$. 设有 $v \gg 0, \rho > 0$ 使 $Av = \rho v$，那么对任一 $x \gg 0$，元列 $\{\rho^{-p}A^p x\}$ 与 P 的边界间的距离 $d > 0$.

证明　设 $x \gg 0$. 取 $\delta > 0$ 使 $x \geqslant \delta v$. 则

$$\rho^{-p}A^p x \geqslant \rho^{-p}A^p \delta v \geqslant \delta v \quad (p = 1,2,3,\cdots)$$

现在取 $\alpha > 0$，使

$$B(\delta v, \alpha) = \{x \in \mathrm{E} \mid \|\delta v - x\| < \alpha\} \subset P,$$

则

$$B(\rho^{-p}A^p x, \alpha) = B(\delta v, \alpha) + \rho^{-p}A^p x - \delta v \subset P$$

即 $\{\rho^{-p}A^p x\}$ 与 P 的边界间的距离 $d \geqslant \alpha > 0$. ▌

定理 8　设 A:E→E 为全连续线性算子，P 是 E 中体锥. A 按 P 是强正的，那么，算子 A 具有下列性质：

1) A 在 P 中恰有一个固有元 v，$\|v\| = 1$，它对应于正固有值 ρ

$$Av = \rho v;$$

2) 共轭算子 A^* 在 P^* 中恰有一个固有元 ψ，$\|\psi\| = 1$，使

$$A^* \psi = \rho\psi,$$

且 ψ 是严格正泛函，即 $x \in P, x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \psi(x) > 0$;

3) 与这些固有元相应的固有值 ρ 是简单的，即它的秩等于 1，且按绝对值大于 A 的其他固有值.

反之，如果 A 是全连续线性算子，$A(P) \subset P$，且具有性质 1) ~ 3)，那么 A 是按 P 强正的.

证明　设 A 是按 P 强正的. 依定理 6，对 $x \gg 0$ 有 $Ax \gg 0$. 取 $\gamma > 0$ 充分小，则有

$$Ax \geqslant \gamma x.$$

又由于体锥是再生的,故由定理 5,A 有一正固有值ρ,它按绝对值不小于 A 的其他固有值,且存在 $v \in \mathring{P}$,$\psi \in \mathring{P}^*$ 使

$$Av = \rho v, A^* \psi = \rho\psi.$$

由于 A 是强正的,故有 $n = n(v)$,使

$$A^n v = \rho^n v \gg 0,$$

即 $v \gg 0$. 下面证明 ψ 是严格正的.

设 $x \in P, x \neq 0$,则有 $n = n(x)$ 使 $A^n x \gg 0$,由 §13·1 引理 2,$\psi(A^n x) > 0$,从而

$$\psi(x) = \rho^{-n}(A^{*n}\psi)(x) = \rho^{-n}\psi(A^n x) > 0.$$

现在证明固有值ρ的秩等于1,即证它的代数重数等于1. 为此只需证明,若 $x_0 \in \mathbf{E}, x_0 \neq 0$,存在自然数 m,使

$$(A - \rho I)^m x_0 = 0 \qquad (13 \cdot 3 \cdot 9)$$

必有 $x_0 = \lambda v (\lambda \in R^1)$.

设 m 是满足(13·3·9)的最小自然数. 令

$$y_0 = (A - \rho I)^{m-1} x_0,$$

依假定 $y_0 \neq 0$ 且

$$Ay_0 = \rho y_0. \qquad (13 \cdot 3 \cdot 10)$$

我们首先指出,y_0 必与 v 线性相关,如若不然,则对任一 $t \in R^1$,$v + ty_0 \neq 0$,且

$$A(v + ty_0) = Av + Aty_0 = \rho v + \rho t y_0 = \rho(v + ty_0).$$

由于 y_0 与 $-y_0$ 中必有一个不属于 P,故必有 $t_0 \in R^1$,使 $v + t_0 y_0$ 属于 P 的边界. 但由于 A 是强正的,又有 $v + t_0 y_0 \gg 0$,这是矛盾的. 因此 y_0 必与 v 线性相关,即有 $\lambda \in R^1$,使 $y_0 = \lambda v$. 下面证明 $y_0 = x_0$. 为此只需证明 $m = 1$. 实际上,若 $m > 1$,则

$$\begin{aligned}\lambda\psi(v) = \psi(\lambda v) = \psi(y_0) &= \psi[(A - \rho i)^{m-1} x_0] \\ &= [(A^* - \rho I)^{m-1}\psi](x_0) = 0\end{aligned}$$

从而 $\psi(v)=0$,这是不可能的. 因此 $x_0=y_0=\lambda v$,即 ρ 是简单的.

现在证明 v 是 A 的唯一的含于 P 中的固有元,设 $v_1\in P$,$Av_1=\rho_1 v_1$,因 $AP\subset P$,故 $\rho_1>0$,又由于 ρ 是单重的,故 $\rho_1<\rho$. 那么

$$\rho^{-n}A^n v_1=\rho^{-n}\rho_1{}^n v_1=\left(\frac{\rho_1}{\rho}\right)^n v_1\to 0,\text{当 } n\to\infty.$$

此与定理 7 矛盾. 同理,ψ 是 A^* 的唯一属于 P^* 的固有元. 事实上,若还有 $\psi_1\neq\psi$,$\psi_1\in\dot{P}^*$,使 $A^*\psi_1=\rho_1\psi_1$,由 ρ 的简单性,有 $\rho_1<\rho$,从而

$$\rho\psi_1(v)=\psi_1(\rho v)=\psi_1(Av)=A^*\psi_1(v)=\rho_1\psi_1(v),$$

所以 $\psi_1(v)=0$,此与 $v\gg 0$(从而 $\psi_1(v)>0$) 矛盾.

余下的,还要证明 ρ 按绝对值大于 A 的其他固有值. 如果不然,必有 $\lambda_0\neq\rho$,$|\lambda_0|=\rho$,$x_0\in\mathsf{E}$,$x_0\neq 0$ 使

$$Ax_0=\lambda_0 x_0.$$

设 $\lambda_0=\rho e^{i\theta}$,$\theta\neq 0$,由上面所证,$x_0\,\overline{\in}\,P$. 取 $t\in R^1$,使 $v+tx_0$ 属于 P 的边界,显然 $v+tx_0\neq 0$. 设 $x=v+tx_0$,取一自然数列 $n_k\uparrow$,使 $e^{in_k\theta}\to 1(k\to\infty)$,我们可设 $n_1>n(x)$,则

$$\begin{aligned}\rho^{-n_k}A^{n_k}x&=\rho^{-n_k}A^{n_k}(v+tx_0)\\&=\rho^{-n_k}A^{n_k}v+\rho^{-n_k}A^{n_k}tx_0\\&=v+te^{in_k\theta}x_0\to v+tx_0=x.\end{aligned}$$

但 $A^{n_1}x\gg 0$,故依定理 7,$\{\rho_k^{-n}A^{n_k}x\}$ 与 P 的边界的距离 $d>0$,此与 $\rho^{-n_k}A^{n_k}x\to x$ 矛盾.

现在证明逆命题. 设 $A:\mathsf{E}\to\mathsf{E}$ 为全连续线性算子,$A(P)\subset P$,且 1)—3) 成立. 设 ψ 是 A^* 的对应于 ρ 的固有元,v 是 A 的对应于 ρ 的固有元,$v\in P$,$\psi\in P^*$ 严格正,即对 $x\in P$,$x\neq 0\Rightarrow\psi(x)>0$. 特别,$\psi(v)>0$. 把 ψ 规范化,可设 $\psi(v)=1$. 令

$$A_1x=Ax-\rho\psi(x)v,\quad x\in\mathsf{E},\qquad(13\cdot 3\cdot 11)$$

那末,除了 ρ 外 A_1 与 A 有相同的固有值,且 ρ 不是 A_1 的固有值. 事

实上,设λ是A的固有值,$y\in \mathsf{E}$是A的对应于λ的固有元:$Ay=\lambda y(y\neq 0,\lambda\neq 0,\rho)$,那么,由

$$\lambda\psi(y)=\psi(Ay)=(A^*\psi)(y)=\rho\psi(y)$$

可知$\psi(y)=0$,所以

$$A_1y=Ay-\rho\psi(y)v=Ay=\lambda y$$

反之,设$\lambda\neq 0,y\in \mathsf{E},y\neq 0,A_1y=\lambda y$,那末

$$\begin{aligned}\lambda\psi(y)&=\psi(A_1y)=\psi(Ay-\rho\psi(y)v)\\&=\psi(Ay)-\rho\psi(y)=(A^*\psi)(y)-\rho\psi(y)\\&=\rho\psi(y)-\rho\psi(y)=0,\end{aligned}$$

故

$$Ay=A_1y+\rho\psi(y)v=A_1y=\lambda y.$$

ρ显然不是A_1的固有值.否则,设ρ是A_1的固有值,y是A_1的对应于ρ的固有元,由上所证y就是A的对应于ρ的固有元,由性质2),$y=rv$,所以

$$A_1y=Ay-\rho\psi(y)v=\rho rv-\rho rv=0.$$

得出矛盾.这样一来,A_1的谱半径

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A_1{}^n\|}=\rho_1<\rho. \tag{13·3·12}$$

由(13·3·11),

$$Ax=A_1x+\rho\psi(x)v,\ \forall\, x\in \mathsf{E}. \tag{13·3·13}$$

设$A^nx=A_1^nx+\rho^n\psi(x)v$,那末,根据(13·3·13)有

$$\begin{aligned}A^{n+1}x&=A(A^nx)=A_1A^nx+\rho\psi(A^nx)v\\&=A_1(A_1^nx+\rho^n\psi(x)v)+\rho\psi(A^nx)v\\&=A_1{}^{n+1}x+\rho^n\psi(x)A_1v+\rho\psi(A^nx)v.\end{aligned}$$

注意到

$A_1v=0,\psi(A^nx)=\psi(A_1{}^nx+\rho^n\psi(x)v)=\psi(A_1{}^nx)+\rho^n\psi(x)$,

即得:

$$A^{n+1}x=A_1{}^{n+1}x+\rho^{n+1}\psi(x)v+\rho\psi(A_1{}^nx)v \tag{13·3·14}$$

但对任一 $x \in \mathsf{E}$

$$\psi(A_1 x) = \psi(Ax - \rho\psi(x)v) = (A^* \psi)(x) - \rho\psi(x)$$
$$= \rho\psi(x) - \rho\psi(x) = 0,$$

因此 $\psi(A_1{}^n x) = \psi(A_1(A_1{}^{n-1}x)) = 0$. 代入(13·3·14)即得

$$A^{n+1}x = A_1{}^{n+1}x + \rho^{n+1}\psi(x)v. \qquad (13 \cdot 3 \cdot 15)$$

依归纳法原理,对所有 n 有

$$\rho^{-n}A^n x - \psi(x)v = \rho^{-n}A_1{}^n x,$$

从而由(13·3·12)可得

$$\lim_{n\to\infty} \| \rho^{-n}A^n x - \psi(x)v \| = \lim_{n\to\infty} \| \rho^{-n}A_1{}^n x \| = 0.$$

但当 $x \in \dot{P}$ 时,$\psi(x) > 0$,故 $\psi(x)v \gg 0$,从而必有 n,使

$$\rho^{-n}A^n x = \psi(x)v + \rho^{-n}A_1{}^n x \gg 0,$$

也即:$A^n x \gg 0$. ▌

系 3 设 P 为 E 的体锥,$A:\mathsf{E} \to \mathsf{E}$ 线性全连续,$A(\dot{P}) \subset \dot{P}$,则 A 在 P 中有唯一的固有元 $v \gg 0$,对应于 v 的固有值 $\rho > 0$ 按绝对值大于 A 的其他固有值,且 ρ 是简单的.

系 4 设 P 为 E 的体锥,$\Gamma = \{A\}$ 为全连续线性算子族,Γ 中算子两两可交换,且对 $A \in \Gamma$,$A(\dot{P}) \subset \dot{P}$. 那末,必存在 $v \in P$,使

$$Av = \rho_A v, \quad A \in \Gamma.$$

证明 Γ 中每个 A 是按 P 强正的,根据定理 8,A 在 P 中有唯一的固有元 $v \gg 0$,$\| v \| = 1$,$Av = \rho_A v$. 现在设 $A_1 \in \Gamma$,则

$$A_1 A v = \rho_A A_1 v = A A_1 v$$

此式说明,$A_1 v$ 也是 A 的正固有元. 由于 A 的固有值 ρ_A 是简单的,故 $A_1 v = rv$,即 v 也是 A_1 的固有元,从而 $A_1 v = \rho_{A_1} v$. A_1 既然是任意的,那么 v 就是 Γ 中诸 A 的公共固有元. ▌

注 根据定理 3,$\Gamma^* = \{A^*\}$ 在 P^* 中有唯一的公共固有元 $\psi \in P^*$,$\| \psi \| = 1$.

* 第十四章　广义函数

在这一章中，我们将介绍广义函数的某些基本运算及其性质，为了以后的叙述的方便，我们先引入一些记号.

设 R^n 是 n 维欧几里得空间，$x=(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$，它的模(范数)定义为

$$\|x\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

设 N 为整数集，$N^n=\{p=(p_1,\cdots,p_n)\,|\,p_i\in N,i=1,\cdots,n\}$，记

$$|p|=\sum_{i=1}^{n}|p_i|,$$

若 p、$q\in N^n$，定义 $p+q=(p_1+q_1,\cdots,p_n+q_n)$.

我们再在 R^n 中引入一个半序关系：设 $x,y\in R^n$，$x=(x_i)$，$y=(y_i)$，若 $x_i\leqslant y_i\quad(i=1,\cdots,n)$，则称 $x\leqslant y$. 若 $x_i<y_i\quad(i=1,\cdots n)$，则称 $x<y$. 类似地可定义 N^n 中两元 p,q 的半序关系.

设 $x\in R^n$，$p\in N^n$，记 $x^p={x_1}^{p_1}\cdots{x_n}^{p_n}$，则 n 个变元的多项式可写作

$$P(x)=\sum_{|p|\leqslant m}a_px^p.$$

当 a_p 是常数时，$P(x)$ 就称为常系数多项式，当 a_p 是 x 的实(或复)函数时，就称 $P(x)$ 为变系数多项式.

最后，我们引入偏导数记号

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\quad 1\leqslant i\leqslant n;$$

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n});$$

$$\partial^p = (\frac{\partial}{\partial x})^p = \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1{}^{p_1}} \cdots \frac{\partial^{p_n}}{\partial x_n{}^{p_n}}$$

$$= \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1{}^{p_1} \cdots \partial x_n{}^{p_n}} = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}.$$

及偏微分算子

$$P(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \sum_{|p| \leqslant m} a_p(x) (\frac{\partial}{\partial x})^p$$

$$= P(x, \partial) = \sum_{|p| \leqslant m} a_p(x) \partial^p.$$

§ 14·1　基本函数空间与广义函数

定义 1　设 $\varphi(x)$ 是定义 R^n 上的函数,集合 $\{x \in R^n \mid \varphi(x) \neq 0\}$ 的闭包称为函数 $\varphi(x)$ 的**支集(支柱)**,记作 $\mathrm{supp}\varphi$.

定义 2　定义在 R^n 上具有各阶连续偏导数且支集有界的实函数 $\varphi(x)$ 的全体记作 K,称 K 为一个基本函数空间,K 中的函数 $\varphi(x)$ 称作**基本函数或检验函数**.

显然,两个基本函数相加或一个基本函数与实数相乘,其结果仍是一个基本函数,因此,按通常的函数的代数运算 K 成一实线性空间.

例 14·1·1　设 $a > 0$,令

$$\varphi(x,a) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2 - \|x\|^2}\right), & \text{当 } \|x\| < a; \\ 0, & \text{当 } \|x\| \geqslant a. \end{cases}$$

其中 $\exp(x) = e^x$,容易看出,$\varphi(x,a)$ 具有各阶连续偏导数,且它的支集就是 $\{x \in R^n \mid \|x\| \leqslant a\}$,($R^n$ 中以原点为中心,a 为半径

的闭球),因此,$\varphi(x,a)\in K$. 通过变数替换,可知 $\varphi(x-b,a)=$

$$\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{a^2}{a^2-\|x-b\|^2}\right), & 当\ \|x-b\|<a;\\ 0, & 当\ \|x-b\|\geqslant a.\end{cases}$$

也是一个基本函数. 例 14·1·1 表明空间K是非零空间. 下面定理表明,空间 K 中具有充分多的非零函数.

设

$$\varphi(x,1)=\begin{cases}c\exp\left(-\dfrac{1}{1-\|x\|^2}\right), & 当\ \|x\|<1;\\ 0, & 当\ \|x\|\geqslant 1.\end{cases}$$

其中 $c>0$ 满足

$$\int_{R^n}\varphi(x,1)\mathrm{d}x=1.$$

然后,对任一局部可积函数 $f(x)$,定义

$$\begin{aligned}f_h(x)&=h^{-n}\int_{R^n}\varphi\left(\frac{x-y}{h},1\right)f(y)\mathrm{d}y\\&=h^{-n}\int_{\|x-y\|\leqslant h}\varphi\left(\frac{x-y}{h},1\right)f(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

定理 1 设 $f(x)$ 连续,那末,当 $h\to 0^+$ 时,$f_h(x)$ 在任一有界区域 Ω 中一致收敛于 $f(x)$.

证明 设 $\Omega\subset\overline{B}(0,r)=\{x\in R^n\mid \|x\|\leqslant r\}$. 按定义,我们有

$$\begin{aligned}f_h(x)&=h^{-n}\int_{\|x-y\|\leqslant h}\varphi\left(\frac{x-y}{h},1\right)f(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{\|z\|\leqslant 1}\varphi(z,1)f(x-h,z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

其中 $z=\dfrac{x-y}{h}$. 因此

$$\sup_{\Omega}|f(x)-f_h(x)|$$

$$= \sup_{\Omega}\left|\int_{\|z\|\leqslant 1}\varphi(z,1)(f(x)-f(x-hz))\mathrm{d}z\right|$$
$$\leqslant \sup_{\Omega}\int_{\|z\|\leqslant 1}\varphi(z,1)\,|f(x)-f(x-hz)|\,\mathrm{d}z$$
$$\leqslant \sup_{x\in\Omega,\ \|z\|\leqslant 1}|f(x)-f(x-hz)|$$
$$\leqslant \sup_{\substack{x,y\in B(0,r+1)\\ \|x-y\|\leqslant h}}|f(x)-f(y)|. \qquad (\text{当 } h<1)$$

因为 $f(x)$ 是 R^n 上的连续函数，它必在有界区域上一致连续，因此定理的结论成立. ▌

注　按 $f_h(x)$ 的定义，对每一 $h>0$，$f_h(x)$ 显然具有各阶连续偏导数，并且如果 $f(x)$ 的支集有界，那么 $f_h(x)$ 的支集也有界. 此时，当 $h\to 0^+$ 时，$f_h(x)$ 在整个空间上一致收敛于 $f(x)$. 具有紧支集的连续函数的全体通常记作 $C_0(R^n)$，于是，定理 1 说，按上确界范数，K 在 $C_0(R^n)$ 中稠密.

下面，我们引入空间 K 中函数列收敛性的概念.

定义 3　设 $\{\varphi_n|n=1,2,\cdots\}\subset$ K，$\varphi(x)\in$ K，如果：(i) 存在一个有界集 $\Omega\subset R^n$，使 $\mathrm{supp}\varphi_n\subset\Omega$ $(n=1,2,\cdots)$，即函数列 $\varphi_n(x)$ 的支集是一致有界的；(ii) 函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 及其各阶偏导数 $\{\partial^p\varphi_n\}$ 都（在 R^n 上）一致收敛于 $\partial^p\varphi$，则称 φ_n 在 K 中收敛于 φ，记作 $\varphi_n\xrightarrow{\mathrm{K}}\varphi$ 或 $\varphi_n\longrightarrow\varphi(\mathrm{K})$，这里（及以后）我们规定 $\partial^0\varphi(x)\equiv\varphi(x)$.

例 14·1·2　设 $\varphi_n(x)=\dfrac{1}{n}\varphi(x-n,1)$ 则 $\varphi_n(x)$ 连同各阶偏导数在 R^n 上一致收敛于 0，但它并不在 K 中收敛于 0，因为，所有这些函数的支集不是一致有界的.

现在，我们分析一下 K 中函数列的收敛性概念.

设 $B(r)$ 为一个具有正半径 r 的闭球. 设 $\varphi_n\xrightarrow{\mathrm{K}}\varphi$. 根据定义，必存在一个 $B(r)$，使得

$$\mathrm{supp}\varphi_n\subset B(r)\quad(n=1,2,\cdots),\mathrm{supp}\varphi\subset B(r).$$

现在,我们考虑 K 中所有支集含于 $B(r)$ 中的子集 $\mathrm{K}(B(r))$,显然它是 K 的一个线性子空间,于是 $\varphi_n \xrightarrow{\mathrm{K}} \varphi$ 等价于存在一个 $B(r)$,使 $\{\varphi_n\} \subset \mathrm{K}(B(r))$,$\varphi \in \mathrm{K}(B(r))$,且 $\partial^p \varphi_n$ 一致地收敛于 $\partial^p \varphi(p \in N^n)$.

对于 K 的子空间 $\mathrm{K}(B(r))$,我们可以很自然地引入距离.

$$\rho(\varphi,h) = \sum_p \frac{1}{|p|!2^{|p|}} \frac{\max|\partial^p\varphi(x) - \partial^p h(x)|}{1+\max|\partial^p\varphi(x) - \partial^p h(x)|}.$$

这样,φ_n 在 K 中收敛于 φ 就等价于存在一个 $B(r)$,φ_n 按 $\mathrm{K}(B(r))$ 中的距离收敛于 φ.

但是,我们要指出,尽管我们可以对 K 的每个子空间 $\mathrm{K}(B(r))$ 定义距离,使得 K 中函数列 φ_n 在 K 中收敛等价于 φ_n 在某个 $\mathrm{K}(B(r))$ 上按距离收敛,但却不能在 K 中定义距离,使得 K 中函数列的收敛性与按 K 中所定义的距离收敛性等价.

事实上,设 $\rho(\cdot,\cdot)$ 是 K 上的一个距离函数,对每一固定的自然数 k,记 $b_k = (k,\cdots,k) \in R^n$,令

$$\varphi_n{}^{(k)}(x) = \frac{1}{n}\varphi(x-b_k,1)$$

则

$$\varphi_n{}^{(k)}(x) \xrightarrow{\mathrm{K}} 0,(n \to \infty).$$

于是存在 $n_k > 0$,使当 $n \geqslant n_k$ 时,

$$\rho(\frac{1}{n}\varphi(x-b_k,1),0) < \frac{1}{2^k},$$

然后令

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{n_k}\varphi(x-b_k,1),$$

则

$$\rho(\varphi_k,0) < \frac{1}{2^k},$$

从而 $\varphi_k(x)$ 按距离收敛于 0. 但是因诸 φ_k 的支集不是一致有界的，所以函数列 φ_k 不是在 K 中收敛于 0，这就证明了，K 中无论以什么方式定义距离，它都不能与原来的收敛意义等价.

但是，由于要在 K 上进行各种分析运算，我们就必需考虑 K 中算子或泛函的连续性概念.

定义 4　设算子 A：K → K，$\varphi(x) \in$ K，如果对任意的 $\{\varphi_n(x)\} \subset$ K

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathrm{K}} \varphi \Longrightarrow A\varphi_n \xrightarrow{\mathrm{K}} A\varphi,$$

则称 A 在 φ 点连续；若 A 在 K 中的每一点连续，则称 A 在 K 连续，此时称 A 为连续算子.

定义在 K 上的泛函的连续性概念可类似地给出.

例 14·1·3　对每一 $p \in \mathrm{N}^n$，求导运算

$\partial^p : \varphi \longmapsto \partial^p \varphi \quad \forall \varphi \in$ K

就是定义在 K 上的连续线性算子.

定义 5　称定义在基本函数空间 K 上的连续线性泛函为**广义函数**. K 空间上广义函数的全体称为**广义函数空间**，利用通常共轭空间的记法，把广义函数空间记作 K*.

设 f 是广义函数，f 在点 $\varphi \in$ K 的值，写成对偶的形式，记作 (f,φ).

例 14·1·4　设 $f(x)$ 是 R^n 上的一个局部可积函数，用下式定义 K 上的泛函 F

$$F(\varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi(x) \in \mathrm{K}, \tag{14·1·1}$$

则 F 是一连续线性泛函，我们把 F 叫作由局部可积函数 f 所**界定的广义函数**.

事实上，由于 $\varphi(x) \in$ K，$\varphi(x)$ 的支集有界，所以，(14·1·1) 式右端的积分实际上只在有界区域中进行，因此 F 对每一 $\varphi \in$ K

有明确定义,F 的线性性质是明显的,其次,设 $\{\varphi_n\}\subset \mathrm{K}$,$\varphi_n \xrightarrow{\mathrm{K}} 0$,根据定义,存在一有界闭集 Ω,使 $\mathrm{supp}\varphi_n \subset \Omega$,$n = 1,2,\cdots$ 从而

$$F(\varphi_n) = \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x. \qquad (14\cdot 1\cdot 2)$$

然后,再由 $\varphi_n(x)$ 一致收敛于 0,即知(14·1·2) 右端收敛于 0,即 $F(\varphi_n)\to 0$,因此 F 是 K 上的连续线性泛函.

由局部可积函数 f 的界定的泛函,以后我们仍把它记作 f,(14·1·1) 式可写成

$$(f,\varphi) = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x. \qquad (14\cdot 1\cdot 3)$$

现在设 $\varphi_n \in \mathrm{K}$,$\varphi \in \mathrm{K}$,$\varphi_n \xrightarrow{\mathrm{K}} \varphi$,则有 $\Omega \subset R^n$ 为有界闭集,使

$$\mathrm{supp}\varphi_n \subset \Omega,\quad \mathrm{supp}\varphi \subset \Omega.$$

于是对任一局部可积函数 $f(x)$,有

$$f(x)\varphi_n(x) \to f(x)\varphi(x)\ a.e.,$$

且存在 $M > 0$ 使

$$|f(x)\varphi_n(x)| \leqslant M|f(x)|.$$

然后用积分控制收敛定义,我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{R^n} f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega f(x)\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \int_{R^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

上式说明,极限号与积分号可交换顺序.

形如(14·1·3) 的连续线性泛函是 K 上线性泛函的例子,但是否所有 K 上的连续线性泛函都可以表成(14·1·3) 的形式呢?下面我们举一个简单的例子,说明存在 K 上的连续线性泛函不能表为(14·1·3) 的形式.

例 14·1·5 令

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0) \qquad (14\cdot 1\cdot 4)$$

显然(14·1·4)式所定义的泛函是K上的连续线性泛函，我们证明它不能表成(14·1·1)的形式.

事实上，若存在一局部可积函数 $f(x)$ 使

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0)=\int_{R^n} f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

特别取例14·1·1中的 $\varphi(x)=\varphi(x,a)$，则对任一 $a>0$，有

$$\int_{R^n} f(x)\varphi(x,a)\mathrm{d}x=\varphi(0,a)=e^{-1}. \qquad (14\cdot1\cdot5)$$

但另一方面

$$\left|\int_{R^n} f(x)\varphi(x,a)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{\|x\|\leqslant a}|f(x)\varphi(x,a)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{\|x\|\leqslant a}|f(x)|\mathrm{d}x\to0,\quad(a\to0).$$

它与(14·1·5)式矛盾.

由(14·1·4)式所定义的广义函数 δ，就是所谓的 δ-函数，记作 $\delta(x)$. 在实用上我们还常常遇到所谓平移的 δ-函数 $\delta(x-x_0)$，它由下式定义

$$(\delta(x-x_0),\varphi(x))=\varphi(x_0), \qquad (14\cdot1\cdot6)$$

定义在K上，可以表成(14·1·3)的形式的连续线性泛函称为**正则泛函(正则广义函数)**，其余的连续线性泛函称为**奇异泛函(奇异广义函数)**. $\delta(x)$ 是奇异广义函数的例子.

我们把由公式

$$(f,\varphi)=c\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{R^n}c\varphi(x)\mathrm{d}x$$

所定义的正则广义函数 f 称为常数 c，例如，广义函数"1"定义如下

$$(1,\varphi)=\int_{R^n}\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

根据定义，每个正则广义函数 f，对应于一个局部可积函数 $f(x)$，若对所有 $\varphi(x)\in K$ 都有

$$(f,\varphi)=\int_{R^n}f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$$

则易知,$f(x)=0$ a.e.,于是定义在 K 上的正则广义函数所对应的局部可积函数的值,除了一个在零测度集上的值外,是唯一确定的.如果我们把几乎处处相等的两个局部可积函数看作是同一函数,那么,上述讨论表明,不同的局部可积函数 $f_1(x)$,$f_2(x)$ 界定不同的广义函数.于是正则广义函数与局部可积函数之间可建立 1—1 对应关系.在此对应意义下我们可以把局部可积函数的全体看作是广义函数的一个子集.显然,它是 K^* 的一个线性子空间.

以后,对于一般(正则的或奇异的)广义函数 f,我们也用 $f(x)$ 这个记号来表示,当然,对于奇异广义函数,“$f(x)$”这个记法只是形式上的表示.对于一般的广义函数 $f(x)$,说“$f(x)$ 在 x_0 点的值为 $f(x_0)$”一般是没有意义的.利用上面的形式记号,我们有时也把(f,φ) 形式地记作$\int f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$(当 $f(x)$ 是正则泛函时,这种形式记法与原来的定义一致).例如,我们有$\int\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$.

虽然我们不能说广义函数 $f(x)$“在 x_0 点的值等于 0”,但是我们却可以引入表明广义函数局部性质的

定义 6 设 U 为点 x_0 的一个邻域,称广义函数 $f(x)$ 在点 x_0 邻域 U 中等于 0,如果对任一 $\varphi(x)\in\mathrm{K}$,

$$\mathrm{supp}\varphi\subset U\Rightarrow(f,\varphi)=0.$$

设 $G\subset R^n$ 为一开域,$f(x)$ 为广义函数,如果对任一 $\varphi(x)\in\mathrm{K}$,

$$\mathrm{supp}\varphi\subset G\Rightarrow(f,\varphi)=0,$$

则称 $f(x)$ 在 G 上等于 0.

设 $f(x)$,$g(x)$ 为两个广义函数,如果对任意 $\varphi(x)\in\mathrm{K}$,

$$\text{supp}\varphi(x) \subset G \Rightarrow (f,\varphi) = (g,\varphi),$$

则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 G 上相等，特别，一个广义函数 $f(x)$ 如果在开域 G 中的某个正则泛函相等，那么我们就说 $f(x)$ 在 G 中是正则的. 例如广义函数 $\delta(x-x_0)$ 在 $R^n\backslash\{x_0\}$ 上是正则的，并且等于 0.

如果广义函数 $f(x)$ 在点 x_0 的任一邻域中都不等于零，那么我们就称 x_0 为广义函数 $f(x)$ 的**质点**，广义函数 $f(x)$ 的质点的全体称为 $f(x)$ 的**支集**，记作 $\text{supp}f(x)$.

上面我们讨论了广义函数的某些基本概念，现在我们简单地讨论一下广义函数的线性运算与极限运算.

设 $f(x),g(x) \in \mathrm{K}^*$，$\alpha \in R^1$，其加法运算与数乘运算定义为

$$(f+g,\varphi) = (f,\varphi)+(g,\varphi),\ \forall\varphi \in \mathrm{K};\quad (14\cdot1\cdot7)$$

$$(\alpha f,\varphi) = \alpha(f,\varphi), = (f,\alpha\varphi),\ \forall\varphi \in \mathrm{K}.\quad (14\cdot1\cdot8)$$

容易验证，由(14·1·7)、(14·1·8) 所定义的 $f+g$ 与 αf 都是K上的连续线性泛函，特别当 f,g 是正则泛函时，它们分别对应于局部可积函数 $f(x),g(x)$，那么 $f+g,\alpha f$ 也是正则泛函，它们所对应的局部可积函数分别为 $f(x)+g(x)$ 与 $\alpha f(x)$.

按(14·1·7)(14·1·8) 所定义的线性运算，K^* 成一线性空间.

在一般分析学中，还可定义两个函数间的乘法. 但在广义函数中却很难用通常的办法来定义任意两个广义函数的乘法运算，这只要注意到，两个局部可积函数相等，其积未必是局部可积函数. 下面我们利用一个无穷次可微函数与一个基本函数相乘仍是一个基本函数这一事实，来定义一个无穷次可微函数 $\alpha(x)$ 与一个广义函数 $f(x)$ 的乘积 $\alpha(x)f(x)$：

$$(\alpha f,\varphi) = (f,\alpha\varphi),\quad \forall\varphi \in \mathrm{K}.\qquad (14\cdot1\cdot9)$$

为了说明这个定义的合理性，我们需要证明，当 $\alpha(x) \in C^\infty$（C^∞ 表无穷次可微函数集合），$f \in \mathrm{K}^*$ 时，$\alpha f \in \mathrm{K}^*$.

事实上，设 $\varphi,\ \psi \in \mathrm{K}$，$\lambda$、$\mu \in R^1$，则

$$(\alpha f,\lambda\varphi+\mu\psi)=(f,\alpha(\lambda\varphi+\mu\psi))$$
$$=(f,\lambda\alpha\varphi+\mu\alpha\psi)=(f,\lambda\alpha\varphi)+(f,\mu\alpha\psi)$$
$$=\lambda(f,\alpha\varphi)+\mu(f,\alpha\psi)=\lambda(\alpha f,\varphi)+\mu(\alpha f,\psi),$$

因此 αf 是 K 上线性泛函.

现在,设 $\varphi_n(x)\in \mathrm{K}$,$\varphi_n \xrightarrow{\mathrm{K}} 0$,显然,$\alpha\varphi_n\in\mathrm{K}$,$\alpha\varphi_n\xrightarrow{\mathrm{K}}0$,因此,

$$(f,\alpha\varphi_n)\to 0,\quad (n\to\infty)$$

即

$$(\alpha f,\varphi_n)\to 0,\quad (n\to\infty)$$

这说明 αf 是连续的,即 $\alpha f\in\mathrm{K}^*$.

最后,我们定义 K^* 中的极限概念.

定义 7 设$\{f_n\}\subset\mathrm{K}^*$,$f\in\mathrm{K}^*$,若

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi)=(f,\varphi),\quad \forall\varphi\in\mathrm{K},$$

则称序列$\{f_n\}$收敛于 f,记作 $f_n\xrightarrow{\mathrm{K}^*}f$.

我们看出,上面所定义的收敛概念相当于通常的弱*收敛概念.

例 14·1·6 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 为局部可积函数,如果存在局部可积函数 $f(x)$,$F(x)$,使 $f_n(x)$ 按测度收敛于 $f(x)$,且

$$|f_n(x)|\leqslant F(x),$$

则 $f_n(x)\xrightarrow{\mathrm{K}^*}f(x)$.

现在,我们利用广义函数序列的收敛性来定义广义函数所构成的级数的收敛性.

设$\{f_n|n=1,2,\cdots\}\subset\mathrm{K}^*$,$f\in\mathrm{K}^*$,若

$$S_n=\sum_{i=1}^n f_i,\quad n=1,2,\cdots$$

收敛于 f,则称级数

$$\sum_{n=1}^\infty f_n=f_1+f_2+\cdots$$

收敛于 f，记作 $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$.

由定义、容易证明下列结论：

1. 若广义函数列收敛，则其极限是唯一的；

2. 极限运算是线性的，即若 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$，$\lim\limits_{n\to\infty}g_n=g$，则

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha f_n+\beta g_n)=\alpha f+\beta g.$$

例 14·1·7　设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 为局部可积函数，如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|$ 在每一有界区域中一致收敛于某局部可积函数，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n$ 收敛于由函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=f(x)$ 所对应的广义函数 f.

§14·2　广义函数的微分

我们知道，对于通常的函数不是都能进行微分运算，但在这一节中，我们将给出广义函数微分的定义，并证明每一广义函数都有导数，这些导数自身也是广义函数，从而证明了任一广义函数都是无穷次可微的. 此外我们还要指出：当 f 是正则泛函且它所对应的局部可积函数为通常的可微函数时，f 的导数 f' 就是对应于 $f'(x)$ 的正则泛函，因此在这里所定义的广义函数的微分是通常可微函数微分的自然推广.

在给出一般广义函数的导数定义之前，我们先来考虑一个特殊情形.

设 $f(x)$ 为 R^1 上的连续函数，且在通常意义下有连续导函数那么，对每一 $\varphi\in K$，我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x,$$

于是我们有

$$(f'(x),\varphi(x)) = -(f(x),\varphi'(x)). \qquad (14\cdot 2\cdot 1)$$

反之,如果存在某 $h(x)$,满足

$$(h(x),\varphi(x)) = -(f(x),\varphi'(x)),\ \forall\,\varphi(x)\in \mathsf{K},$$

则必然有 $h(x)=f'(x)$,因此根据表达式(1),我们自然地引入

定义 1 设 f 是单变量基本函数空间 K 上的线性连续泛函(即 $f(x)$ 是单变量广义函数),由公式

$$(g,\varphi) = -(f,\varphi'),\ \forall\,\varphi\in \mathsf{K}, \qquad (14\cdot 2\cdot 2)$$

所定义的泛函 g 称为泛函 f 的导数,并记作 f' 或$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

为了说明这个导数定义的正确性,我们证明 g 也是基本函数空间 K 上的连续线性泛函.

首先,对于每一基本函数 $\varphi(x)$,$\varphi'(x)$ 也是基本函数,因此(14・2・2)式右端有明确意义,从而 g 是定义在 K 上的泛函. 根据定义,g 显然是线性的.

余下还要证明 g 在 K 上连续. 设$\{\varphi_n(x)\,|\,n=1,2,\cdots\}\subset \mathsf{K}$,$\varphi(x)\in \mathsf{K}$,$\varphi_n \xrightarrow{\mathsf{K}} \varphi$,那么按定义也有 $\varphi_n' \xrightarrow{\mathsf{K}} \varphi'$. 然后根据 f 的连续性可得$(f,\varphi_n')\to(f,\varphi')$,按定义此即$(g,\varphi_n)\to(g,\varphi)$,这就证明了 g 是 K 上的连续线性泛函.

由定义可以看出:

1. 当 $f(x)$ 为连续可微函数时,其导数 $f'(x)$ 与作为广义函数的导数是一致的;

2. 每个广义函数 f 都有导数,其导数仍是广义函数,从而推出每个广义函数都是无穷次可微的.

关于广义函数的微分,如同通常函数的微分一样,有如下的公式:

$$(f+g)'=f'+g',\ \forall\, f,g\in \mathsf{K}^*. \qquad (14\cdot 2\cdot 3)$$

当 α 为数时:

$$(\alpha f)' = \alpha f', \forall f \in K^*. \tag{14·2·4}$$

当 $\alpha(x) \in C^\infty, f \in K^*$ 时：

$$(\alpha f)' = \alpha' f + \alpha f'. \tag{14·2·5}$$

我们来证(14·2·5). 事实上，由

$$\begin{aligned}((\alpha f)', \varphi) &= -(\alpha f, \varphi') \\ &= -(f, \alpha\varphi') = -(f, (\alpha\varphi)' - \alpha'\varphi) \\ &= -(f, (\alpha\varphi)') + (f, \alpha'\varphi) \\ &= (f', \alpha\varphi) + (f, \alpha'\varphi) \\ &= (\alpha f' + \alpha' f, \varphi),\end{aligned}$$

所以(14·2·5) 式成立.

用归纳法容易定义单变量广义函数的高阶导数：

$$(f^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (f, \varphi^{(n)}). \tag{14·2·6}$$

在多变量情形，依照定义 1，我们定义广义函数 $f(x)$ 对每个独立变量 $x_1, \cdots, x_n$ 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \cdots, n)$：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi\right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right). \tag{14·2·7}$$

当 $f(x)$ 是正则广义函数，它作为通常的函数有连续偏导数时，与单变量情形相类似，公式(14·2·7) 可由分部积分得出，且 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 就是对应于 $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ 的正则广义函数. 对于一般的广义函数 f，与单变量情形一样，可以验证公式(14·2·7) 的合理性.

设 $p \in N^n$ 为一多重指标，$f \in K^*$，广义函数 f 的 p 阶导数由下式定义：

$$\left(\frac{\partial^{|p|} f}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}}, \varphi\right) = (-1)^{|p|} \left(f, \frac{\partial^{|p|} \varphi}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}}\right). \tag{14·2·8}$$

由于每一局部可积函数唯一地对应于一个广义函数，因此在上述意义下每一局部可积函数也有各阶导数.

定理 1 广义函数的混合导数与微分的顺序无关.

证明 我们仅证明

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \tag{14·2·9}$$

其余可类似证明之.事实上,由

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \varphi\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1}\right)$$

$$= \left(f, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \varphi\right)$$

即知(14·2·9)式成立. ▌

为了能把广义函数 $f(x)$ 的导数写成增量比的极限形式,我们要首先讨论广义函数的平移.

我们先从正则广义函数入手.设 $f(x)$ 是一个正则广义函数,那么对任一 $h \in R^n$,我们有

$$(f(x+h), \varphi(x)) = \int_{R^n} f(x+h)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{R^n} f(x)\varphi(x-h)\mathrm{d}x = (f(x), \varphi(x-h)).$$

我们自然地把表达式

$$(f(x+h), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(x-h) \tag{14·2·10}$$

推广到一般的广义函数 $f(x)$.(14·2·10)右端对任一 $\varphi(x) \in$ K 是有明确意义,它定义了K上的一个连续线性泛函(广义函数),称为 $f(x)$ 沿 h 的一个平移,记作 $f(x+h)$,于是对于 R^n 中的任一单位向量 e,当 $t \neq 0$ 进,表达式

$$\left(\frac{f(x+te) - f(x)}{t}, \varphi(x)\right) = \frac{(f(x+te) - f(x), \varphi(x))}{t}$$

有明确意义.

在单变量情形,对任一 $\Delta x \neq 0$,我们有

$$\left(\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \varphi(x)\right) = \left(f(x), \frac{\varphi(x-\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}\right).$$

注意到，

$$\text{当 } \Delta x \to 0 \text{ 时，} \quad \frac{\varphi(x-\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\mathsf{K}} \varphi'(x),$$

再由 f 的连续性，即得

$$\begin{aligned}&\left(f(x),\frac{\varphi(x-\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}\right) \to (f(x),-\varphi'(x))\\&=(f'(x),\varphi(x)),(\text{当 } \Delta x \to 0).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\varphi(x)\right)=(f'(x),\varphi(x)).$$

由 $\varphi(x) \in \mathsf{K}$ 之任意性，根据广义函数极限的定义，我们得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x) \in \mathsf{K}^*$$

在多变量情形也可以类似地进行讨论.

下面，我们举几个求广义函数的导数的例子.

例 14·2·1 设

$$\theta(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x<0;\\ 1, & \text{当 } x>0.\end{cases}$$

它是一局部可积函数，它所界定的广义函数也记作 $\theta(x)$. 那么，按广义函数导数的定义，$\theta'(x)$ 对基本函数 $\varphi(x)$ 的作用为

$$\begin{aligned}(\theta'(x),\varphi(x))&=(\theta(x),-\varphi'(x))\\&=-\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\varphi(x)\Big|_0^{+\infty}=\varphi(0),\end{aligned}$$

因此，按 δ- 函数的定义，我们有

$$\theta'(x)=\delta(x).$$

用同样的方法，容易证明

$$\theta'(x-h)=\delta(x-h).$$

例 14·2·2 设 $f(x)$ 是分段连续的函数,并设 $f(x)$ 只有有限个间断点 $x_1,x_2,\cdots,x_k$,对应于 x_i 的跃度为 $h_i(i=1,\cdots,k)$. 此外,设 $f'(x)$ 除了有限个点外处处存在并连续. 我们来求由函数 $f(x)$ 所界定的广义函数 $F(x)$ 的导数.

按定义,我们有

$$(F'(x),\varphi(x)) = (F(x),-\varphi'(x))$$

$$=-\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=-\sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

此处我们约定 $x_0=-\infty, x_{k+1}=+\infty$,于是

$$(F'(x),\varphi(x))=-\sum_{i=0}^{k}\left[f(x)\varphi(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}-\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{k} h_i\varphi(x_i)+\sum_{i=0}^{k}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{i=1}^{k} h_i(\delta(x-x_i),\varphi(x))+\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$F'(x)=f'(x)+\sum_{i=1}^{k} h_i\delta(x-x_i).$$

这就是说,$F(x)$ 的导数可表示成由 $f'(x)$ 所界定的正则泛函与奇异泛函 $\sum\limits_{j=1}^{k} h_j\delta(x-x_j)$ 的和.

例 14·2·3 设 $-1<\lambda<0$, 令

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0;\\ x^{\lambda}, & x>0.\end{cases}$$

设它所对应的正则广义函数为 $\lambda(x)$,求 $\lambda'(x)$.

按定义,我们有

$$(\lambda'(x),\varphi(x))=-(\lambda(x),\varphi'(x))$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} x^\lambda \varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{x^\lambda[\varphi(x)-\varphi(0)]\Big|_\varepsilon^{+\infty} - \int_\varepsilon^{+\infty}\lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\{\varepsilon^\lambda[\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)] + \int_\varepsilon^{+\infty}\lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\mathrm{d}x\right\}$$

$$= \int_0^{+\infty}\lambda x^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\mathrm{d}x.$$

最后积分的收敛性容易看出，我们把它称为积分$\int_0^{+\infty}\lambda x^{\lambda-1}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 的有穷部分. 在此意义下，我们自然地把 $\lambda(x)$ 的导数用 $\lambda'(x) = \lambda x_+^{\lambda-1}$ 表示，这样我们得出

$$(\lambda'(x),\varphi(x)) = (\lambda x_+^{\lambda-1},\varphi(x))$$
$$= \int_0^{+\infty}\lambda x_+^{\lambda-1}[\varphi(x)-\varphi(0)]\mathrm{d}x.$$

我们看到，$\lambda x_+^{\lambda-1}$ 已不是正则泛函了.

例 14·2·4　在三维空间 R^3 中，设 $r = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}$，由 $\dfrac{1}{r}$ 所界定的正则广义函数仍记作$\dfrac{1}{r}$，以 Δ 表 Laplace 算子，那么对 $\varphi(x)\in K$ 我们有

$$\left(\Delta\frac{1}{r},\varphi\right) = \left(\frac{1}{r},\Delta\varphi\right) = \int_{R^3}\frac{1}{r}\Delta\varphi(x)\mathrm{d}x$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{r>\varepsilon}\frac{1}{r}\Delta\varphi(x)\mathrm{d}x$$

利用 Green 公式，并注意到，当 $\|x\|$ 充分大时 $\varphi(x)=0$，我们得到

$$\left(\Delta\frac{1}{r},\varphi\right)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{r>\varepsilon}\varphi(x)\Delta\frac{1}{r}\mathrm{d}x - \int_{r=\varepsilon}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\mathrm{d}s + \int_{r=\varepsilon}\varphi(x)\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\mathrm{d}s\right]$$
$$= -4\pi\varphi(0),$$

因此， $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(x)$.

用类似的方法，可以得到

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\Omega_n\delta(x).$$

其中 $n \geqslant 3$ 为空间维数，$r = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$\Omega_n$ 为 n 维空间单位球面的面积. 而当 $n=2$ 时，有

$$\Delta \ln \frac{1}{r} = -2\pi\delta(x).$$

定理 2 设 $\{f_n\}_1^\infty \subset \mathrm{K}^*$，$f \in \mathrm{K}^*$，若 $\lim\limits_n f_n = f$，则

$$\lim_n \frac{\partial f_n}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

证明 因为对任意 $\varphi \in \mathrm{K}$，有

$$\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_j}, \varphi\right) = \left(f_n, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)$$

$$\to \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi\right),$$

所以定理结论成立. ▌

系 1 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = f$，则 $f' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f'_n$.

上面定理及系表明，微分运算与极限运算总可以交换顺序；任意收敛的广义函数的级数总可以逐项求导数.

例 14·2·5 设 $f_k(x) = \frac{1}{k}\sin kx$，$f(x) \equiv 0$，那么，$f_k(x)$ 在古典意义下一致收敛于 $f(x) \equiv 0$. 因此，$f_k(x)$ 所对应的广义函数 f_k 也收敛于 $f=0$. 由定理 1，f_k' 也收敛于 0(但是，$f'_k(x) = \cos kx$ 在古典意义下是不收敛的). 因此在广义函数意义下我们可以认为

$$\lim_{k\to\infty}\cos kx = 0.$$

事实上，这也可以由下面的直接计算中得到：

$$(f'_k,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos kx\varphi(x)\mathrm{d}x$$

设 $\varphi(x)$ 在区间$[-a,a]$外等于零，那么上式等于

$$\int_{-a}^{a}\cos kx\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int_{-a}^{a}\sin kx\varphi'(x)\mathrm{d}x \to 0 \quad (k\to+\infty).$$

§14·3　广义函数的卷积

在讨论广义函数的卷积之前，我们先讨论一下广义函数的直积.

我们以 X 表 R^n 上的基本函数空间，Y 表 R^m 上的基本函数空间，Z 表 R^{n+m} 上的基本函数空间. 设 $f(x)$ 为 X 上的广义函数，$g(y)$ 为 Y 上的广义函数，$\varphi(z) = \varphi(x,y)$ 为 Z 中的基本函数. 对每一固定的 x，$\varphi(x,y)$ 作为 y 的函数，它是 Y 中的基本函数，因此

$$\psi(x) = (g(y),\varphi(x,y)) \qquad (14\cdot3\cdot1)$$

对每一 x 有定义. 由

$$\frac{\varphi(x+\Delta x_i,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x_i} \to \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_i}$$

及泛函 $g(y)$ 的连续性得

$$\frac{\psi(x+\Delta x_i)-\psi(x)}{\Delta x_i} = \left(g(y),\frac{\varphi(x+\Delta x_i,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x_i}\right)$$

$$\to \left(g(y),\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_i}\right),$$

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} = \left(g(y),\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_i}\right). \qquad (14\cdot3\cdot2)$$

类似地，对任意 $p\in \mathrm{N}^n$，我们有

$$\frac{\partial^{|p|}\psi(x)}{\partial x^p}=\left(g(y),\frac{\partial^{|p|}\varphi(x,y)}{\partial x^p}\right).\qquad(14\cdot3\cdot3)$$

上面的论证表明 $\psi(x)\in C^\infty$;其次,由于 $\varphi(x,y)$ 的支集有界,因此 $\psi(x)$ 的支集也有界,从而 $\psi(x)\in \mathsf{X}$. 于是

$$(f(x),\psi(x))=(f(x),(g(y),\varphi(x,y)))\qquad(14\cdot3\cdot4)$$

对所有 $\varphi(x,y)\in \mathsf{Z}$ 有意义. 由于 f 及 g 都是连续线性泛函,因此 (14·3·4)式右端定义了Z上的一个连续线性泛函,这个泛函我们记作

$$h(z)=h(x,y)=f(x)\times g(y),\qquad(14\cdot3\cdot5)$$

它称为泛函 $f(x)$ 对泛函 $g(y)$ 的直积.

例 14·3·1 设 $\varphi_1(x)\in \mathsf{X},\varphi_2(y)\in \mathsf{Y}$,令

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)$$

则 $\varphi(x,y)\in \mathsf{Z}$. 于是,对 $f(x)\in \mathsf{X}^*,g(y)\in \mathsf{Y}^*$,有

$$\begin{aligned}&(f(x)\times g(y),\varphi(x,y))\\&=(f(x),(g(y),\varphi_1(x)\varphi_2(y)))\\&=(f(x),\varphi_1(x)(g(y),\varphi_2(y)))\\&=(f(x),\varphi_1(x))(g(y),\varphi_2(y)).\end{aligned}$$

例 14·3·2 求 $\delta(x)\times\delta(y)$.

设 $\varphi(x,y)\in \mathsf{Z}$,则

$$\begin{aligned}&(\delta(x)\times\delta(y),\varphi(x,y))\\&=(\delta(x),(\delta(y),\varphi(x,y)))\\&=(\delta(x),\varphi(x,0))\\&=\varphi(0,0)=\varphi(0),\end{aligned}$$

所以

$$\delta(x)\times\delta(y)=\delta(x,y)=\delta(z).$$

例 14·3·3 设 $f(x),g(y)$ 为两个正则泛函,则

$$\begin{aligned}&(f(x)\times g(y),\varphi(x,y))\\&=\left(f(x),\int_{R^m}g(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

$$= \int_{R^n}\int_{R^m} f(x)g(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= \int_{R^{n+m}} f(x)g(y)\varphi(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此 $f(x)\times g(y)$ 就是正则泛函 $f(x)g(y)$.

定理 1　设 X,Y,Z 为三个基本函数空间,$f(x)\in \mathrm{X}^*$,$g(y)\in \mathrm{Y}^*$,$h(z)\in \mathrm{Z}^*$,则

$$f(x)\times g(y) = g(y)\times f(x); \qquad (14\cdot 3\cdot 6)$$

$$f(x)\times[g(y)\times h(z)] = [f(x)\times g(y)]\times h(z). \qquad (14\cdot 3\cdot 7)$$

定理的结论很容易按定义通过直接计算来验证.

定理 2　设 $f\in \mathrm{X}^*$,$g\in \mathrm{Y}^*$,f,g 的支集分别为 F 和 G,则 $h = f\times g$ 的支集为 $F\times G$.

证明　设$(x_0,y_0)\overline{\in} F\times G$,则 $x_0\overline{\in} F$ 与 $y_0\overline{\in} G$ 至少有一个成立.不失一般性,设 $x_0\overline{\in} F$,根据广义函数支集的定义,存在 x_0 的一个邻域 U_{x_0},使得

$$\varphi(x)\in \mathrm{X},\ \mathrm{supp}\varphi\subset U_{x_0}\Rightarrow(f,\varphi) = 0.$$

现在,任取一 $\varphi(x,y)\in \mathrm{Z}$(Z 为 R^{n+m} 上的基本函数空间),满足$\mathrm{supp}\varphi(x,y)\subset U_{x_0}\times R^m$,那么,对任一 $y\in R^m$,$\varphi(x,y)$ 作为 R^n 上的基本函数,有$\mathrm{supp}\varphi(x,y)\subset U_{x_0}$,于是,

$$(f(x)\times g(y),\varphi(x,y)) = (g(y),(f(x),\varphi(x,y)))$$

$$= (g(y),0) = 0,$$

因此(x_0,y_0)不属于 $f\times g$ 的支集.

其次,设$(x_0,y_0)\in F\times G$,那么对 x_0 的任一邻域 U,存在 $\varphi_1(x)\in \mathrm{X}$, $\mathrm{supp}\varphi_1\subset U$,且

$$(f,\varphi_1)\neq 0;$$

同样,对 y_0 的任一邻域 V,存在 $\varphi_2(y)\in \mathrm{Y}$,使$\mathrm{supp}\varphi_2\subset V$,且

$$(g,\varphi_2)\neq 0.$$

然后令

$$\varphi(x,y)=\varphi_1(x)\varphi_2(y),$$

则 $\varphi(x,y)\in \mathrm{Z}$，$\mathrm{supp}\varphi\subset U\times V$，且

$$(f\times g,\varphi)=(f\times g,\varphi_1\varphi_2)=(f,\varphi_1)(g,\varphi_2)\neq 0,$$

因此 $(x_0,y_0)\in \mathrm{supp}f\times g$，即 $F\times G=\mathrm{supp}f\times g$. ▌

下面我们讨论广义函数的卷积.

首先，设 $f(x)$，$g(x)$ 是直线上两个绝对可积函数，我们知道，$f(x)$ 与 $g(x)$ 的卷积由下式定义：

$$h(x)=f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-\xi)g(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

由

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|h(x)|\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)g(x-\xi)|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x-\xi)|\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(\xi)|\mathrm{d}\xi\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|\mathrm{d}x<+\infty$$

可知，$h(x)$ 也是绝对可积函数，所以，它也界定一个广义函数 $h(x)$，它可由积分定义为，

$$(h(x),\varphi(x))=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\mathrm{d}\xi\right)\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(x-\xi)\varphi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)g(\eta)\varphi(\xi+\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi \qquad (14\cdot 3\cdot 8)$$

利用(14·3·8)式，我们把对应$(h(x),\varphi(x))$形式地写作

$$\begin{aligned}&(f(x)*g(x),\varphi(x))\\&=(f(x),(g(y),\varphi(x+y)))\qquad(14\cdot3\cdot9)\\&=(f(x)\times g(y),\varphi(x+y)).\qquad(14\cdot3\cdot10)\end{aligned}$$

最后两个表达式的写法只是形式上的记法，这是因为当$\varphi(x)$为R^1上的基本函数时，$\varphi(x+y)$作为$R^1\times R^1$上的函数，它的支集不再是有界的了，因此，它已不是$R^1\times R^1$上的基本函数.

从上面的讨论我们看到，当$f(x)$，$g(x)$为绝对可积函数时，其卷积对应于一个广义函数，此时表达式(14·3·10)可以给予明确的意义. 而当$f(x)$或$g(x)$不是绝对可积函数时，积分表达式(14·3·8)可能没有意义，此时表达式(14·3·10)也就没有意义. 特别，对于一般的广义函数，表达式(14·3·10)也可能没有意义. 因此我们的第一个任务是讨论在什么条件下，表达式(14·3·10)能有明确意义，且能由它定义一个广义函数？

上面的讨论也可以推广到多变量情形.

定义 1 两个广义函数$g(x)$，$f(x)$的卷积定义为

$$(g*f,\varphi)=(g(y)\times f(x),\varphi(x+y)),\quad\forall\varphi\in\mathrm{K}.\qquad(14\cdot3\cdot11)$$

下面我们给出几个$g*f$仍是广义函数的条件.

定理 1 若广义函数$g(x)$，$f(x)$的支集有一个是有界的，那么(11)式所定义的$g*f$为K上的一个连续线性泛函.

证明 先设$f(x)$的支集有界. 由定义

$$\begin{aligned}(g*f,\varphi)&=(g(y)\times f(x),\varphi(x+y))\\&=(g(y),(f(x),\varphi(x+y)))\qquad(14\cdot3\cdot12)\end{aligned}$$

对每一$y\in R^n$，$\psi(y)=(f(x),\varphi(x+y))$有定义，显然$\psi(y)$是$R^n$上的无穷次可微函数. 设

$$\mathrm{supp}f\subset B_{r_1}=\{x\in R^n\mid\|x\|\leqslant r_1\},$$
$$\mathrm{supp}\varphi\subset B_{r_2}=\{x\in R^n\mid\|x\|\leqslant r_2\},$$

当 $\|y\| > r_1 + r_2$ 时,因为 $f(x)$ 的支集含于球 B_{r_1} 内,而当 $\|x\| \leqslant r_1$ 时 $\|x+y\| > r_2$,因此

$$(f(x),\varphi(x+y)) = 0.$$

这意味着 $\psi(y) = (f(x),\varphi(x+y))$ 的支集含于球 $B_{r_1+r_2}$ 内,所以 $\psi(y)$ 是一基本函数. 再由(14·3·12)式可知$(g * f,\varphi)$ 定义了 K 上的一个连续线性泛函.

现在设 $g(y)$ 的支集有界,$\psi(y) = (f(x),\varphi(x+y))$ 作为 y 的函数是无穷次可微的. 这时函数 $\psi(y)$ 的支集虽然无界,但 $g(y)$ 的支集有界. 设

$$\mathrm{supp} g \subset B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leqslant r\},$$

因(g,φ) 的值与 φ 在 B_r 外的值无关,因此$(g(y),(f(x),\varphi(x+y)))$ 仍有明确意义,且是 K 上的线性泛函. 再由 g 的支集有界,容易看出,由(14·3·11) 所定义的泛函也是连续的. ▌

定理 2 若广义函数 $f(x),g(x)$ 的支集同一方向有界,则由(14·3·11) 所定义的 $g*f$ 为 K 上的连续线性泛函,从而是一广义函数.

这里所说的 f,g 支集同一方向有界,是指存在一 $a \in R^n$,使

$$\mathrm{supp} f \subset \{x \in R^n \mid x \leqslant a\}, \quad \mathrm{supp} g \subset \{x \in R^n \mid x \leqslant a\}$$

$$(\text{或}\ \mathrm{supp} f \subset \{x \in R^n \mid x \geqslant a\}, \quad \mathrm{supp} g \subset \{x \in R^n \mid x \geqslant a\}).$$

证明 不失一般性,设 $f(x),g(x)$ 的支集上端有界.

考虑函数 $\psi(y) = (f(x),\varphi(x+y))$,它是一个无穷次可微函数. 我们首先证明,$\psi(y)$ 的支集下端有界. 设 $\varphi(x) \in$ K,

$$\mathrm{supp}\varphi \subset B_r = \{x \in R^n \mid \|x\| \leqslant r\}.$$

令

$$b = (-r,-r,\cdots,-r) \in R^n, \quad U = \{x \in R^n \mid x \geqslant -a+b\}.$$

其中 $a = (a_1,\cdots,a_n) \in R^n$ 为 $f(x)$ 的支集的一个上界. 当 $y \overline{\in} U$ 时,则有某 $i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$ 使$y_i < -a_i - r$,于是对任意 $x \leqslant a$ 有

$$(x+y)_i = x_i + y_i \leqslant a_i + y_i < -r,$$

从而 $\|x+y\| > r$,故 $\varphi(x+y) = 0$,由此得出

$$\psi(y) = (f(x), \varphi(x+y)) = 0.$$

这就说明supp$\psi \subset U$,即 $\psi(y)$ 的支集下端有界. 这样一来,$\psi(y)$ 与 $g(y)$ 的支集的交是有界的,从而公式(14・3・11) 右端有意义,它定义了K上的一个线性泛函. 容易看出,这时 $g * f$ 是连续的. ▎

例 14・3・1　计算 $\delta * f$ 及 $D\delta * f$. 其中 D 表任一微分算子 $\dfrac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}$.

(1°) 根据定义

$$\begin{aligned}(\delta * f, \varphi) &= (\delta(y) \times f(x), \varphi(x+y)) \\ &= (\delta(y), (f(x), \varphi(x+y))) \\ &= (f(x), \varphi(x)) = (f, \varphi),\end{aligned}$$

因此对任一广义函数 f,我们有

$$\delta * f = f.$$

$$\begin{aligned}(2°)\ (D\delta * f, \varphi) &= (D\delta(y), (f(x), \varphi(x+y))) \\ &= (\delta(y), (f(x), (-1)^{|p|} D\varphi(x+y))) \\ &= (f(x), (-1)^{|q|} D\varphi(x)) = (Df, \varphi),\end{aligned}$$

因此

$$D\delta * f = Df.$$

同理,我们还可得

$$\delta * Df = Df,$$

因此我们有

$$D\delta * f = \delta * Df = Df.$$

由于泛函的卷积是用直积来定义的,而直积是可交换的,因此泛函的卷积也是可交换的,即

$$f * g = g * f.$$

定理 3　下述卷积的微分公式成立:

$$D(f * g) = Df * g = f * Dg. \qquad (14・3・13)$$

证明　按定义,我们有

$$
\begin{aligned}
(D(f*g),\varphi) &= (f*g,D^*\varphi) \\
&= (f(y),(g(x),D^*\varphi(x+y))) \\
&= (f(y),(Dg(x),\varphi(x+y))) \\
&= (f*Dg,\varphi),
\end{aligned}
$$

及

$$
\begin{aligned}
(D(f*g),\varphi) &= (f(x)*g(x),D^*\varphi(x)) \\
&= (f(x),(g(y),D*\varphi(x+y))) \\
&= (f(x),D^*(g(y),\varphi(x+y))) \\
&= (Df(x),(g(y),\varphi(x+y))) \\
&= (Df*g,\varphi),
\end{aligned}
$$

因此(14·3·13)成立.

在证明中,符号 D^* 的意义如下:设 $D=\frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}$,那么

$$D^* = (-1)^{|p|}\frac{\partial^{|p|}}{\partial x^p}. \blacksquare$$

定理 4 **(卷积的连续性)** 如果下列条件之一成立:

1) 泛函列 $\{f_n\}$ 的支集一致有界;

2) 泛函 g 的支集有界;

3) 泛函列 $\{f_n\}$ 和泛函 g 的支集同一方向一致有界,则

$$f_n \to f \Rightarrow f_n * g \to f * g.$$

证明 1) 按卷积的定义,对任意的基本函数 φ,有

$$(f_n*g,\varphi) = (f_n(y),(g(x),\varphi(x+y))). \tag{14·3·14}$$

设

$$\psi(y) = (g(x),\varphi(x+y)),$$

则 $\psi(y)$ 为一无穷次可微函数. 依条件,设

$$\operatorname{supp} f_n \subset \Omega, \quad n=1,2,\cdots,\Omega$$

为一有界集. 取一球 B,使 $\Omega\subset B$,然后取一基本函数 $\psi_1(y)$,使

$$\psi_1(y) = \psi(y), \forall y \in B,$$

则

$$(f_n(y), \psi(y)) = (f_n(y), \psi_1(y)). \quad (14 \cdot 3 \cdot 15)$$

然后，由 $f_n \to f$ 得出

$$(f_n(y), \psi_1(y)) \to (f(y), \psi_1(y)) = (f(y), \psi(y)),$$

即

$$\begin{aligned}(f_n * g, \varphi) &= (f_n(y), (g(x), \varphi(x+y))) \\ &\to (f(y), (g(x), \varphi(x+y))) \\ &= (f * g, \varphi).\end{aligned}$$

因此

$$f_n * g \to f * g.$$

2）当 g 的支集有界时，

$$\psi(y) = (g(x), \varphi(x+y))$$

是一基本函数，此时结论显然成立.

3）不失一般性，设 f_n 和 g 的支集都是上方有界. 于是，如同证明定理 2 时所指出的，$\psi(y) = (g(x), \varphi(x+y))$ 的支集下方有界. 取 $a < b$，满足

$$\operatorname{supp} f_n \subset \{x \in R^n \mid x < b\}, n = 1, 2, \cdots$$

$$\operatorname{supp} \psi \subset \{x \in R^n \mid x > a\}.$$

然后，取一基本函数 $\psi_1(x)$，使

$$\psi_1(x) = \psi(x) \ (a \leqslant x \leqslant b),$$

则

$$(f_n, \psi) = (f_n, \psi_1) \to (f, \psi_1) = (f, \psi),$$

即

$$f_n * g \to f * g. \ \blacksquare$$

系 1　设广义函数 $f = f_t$ 与参数 t 有关，且存在导数 $\dfrac{\partial f}{\partial t}$，如果下列条件之一满足：

1) 泛函 f_t 的支集一致有界;

2) 广义函数 g 的支集有界;

3) 泛函 f_t 与 g 的支集在同一方向一致有界,则

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * g) = \frac{\partial f_t}{\partial t} * g.$$

证明 只需注意到,导数 $\frac{\partial f_t}{\partial t}$ 是 $\frac{f_{t+\Delta t} - f_t}{\Delta t}$ 当 $\Delta t \to 0$ 时的极限,则结论可由定理 4 直接得出. ▌

§ 14 · 4 广义函数的 Fourier 变换

在这一节中,我们简单地介绍广义函数的 Fourier 变换的概念.

在这一节中,设 K 为单变量复基本函数空间,$\varphi(x)$ 为一单变量基本函数,其 Fourier 变换定义为

$$\psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx \qquad (14 \cdot 4 \cdot 1)$$

由于 $\varphi(x)$ 的支集有界,上述积分实际上只在有界区间上进行,因此对复数 $s = \sigma + i\tau$ 也可以定义相应的复变量函数 $\psi(s)$;

$$\psi(s) = \psi(\sigma + i\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i(\sigma + i\tau)x} dx. \quad (14 \cdot 4 \cdot 2)$$

因为积分(14·4·2)允许对复参数 $s = \sigma + i\tau$ 进行微分,所以,$\psi(s)$ 是全复平面上的解析函数.

$\varphi(x)$ 的 Fourier 变换我们记作 $\widetilde{\varphi}(x)$,或记作 $F[\varphi(x)]$.

命题 1 设 $\varphi(x) \in$ K,则

$$F[\varphi^{(q)}(x)] = (-is)^q F[\varphi(x)] \qquad (14 \cdot 4 \cdot 3)$$

证明 设 $q = 1$,按定义

$$F[\varphi'(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) e^{ixs} dx$$

$$= e^{ixs}\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} is\varphi(x)e^{ixs}\,ds$$

$$= - isF[\varphi(x)],$$

然后利用归纳法即得(14·4·3). ▌

利用公式(14·4·3),设 $p(t)$ 为一常系数多项式,则有

$$F[P(\frac{d}{dx})\varphi(x)] = P(-is)F[\varphi(x)]. \qquad (14 \cdot 4 \cdot 4)$$

定理 1 设 $\varphi(x) \in K$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$, $s = \sigma + i\tau$,则 $\varphi(x)$ 的 Fourier 变换 $\psi(s) = F[\varphi(x)]$ 是满足

$$|s|^q|\psi(s)| \leqslant c_q e^{a\tau} \qquad (14 \cdot 4 \cdot 5)$$

的解析函数.

证明 $\psi(s)$ 为解析函数已如前述,我们证明(14·4·5).

由公式(14·4·3)

$$|s|^q|\psi(s)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{(q)}(x)e^{isx}\,dx\right|$$

$$\leqslant \int_{-a}^{a} |\varphi^{(q)}(x)|\,|e^{i(\sigma+i\tau)x}|\,dx$$

$$\leqslant e^{a|\tau|}\int_{-a}^{a} |\varphi^{(q)}(x)|\,dx$$

$$= c_q e^{a|\tau|},$$

故(14·4·5)成立. ▌

我们把满足估计式(14·4·5)的解析函数的全体所组成的集合称为空间 Z. 显然 Z 是一线性空间. 根据定理 1,Fourier 变换 F 是映 K 到 Z 的线性变换. 现在,我们证明 F:K → Z 是映上的,即

定理 2 若 $\psi(s) \in Z$,则必存在 $\varphi(x) \in K$,使

$$F[\varphi(x)] = \psi(s) \qquad (14 \cdot 4 \cdot 6)$$

且 $\operatorname{supp}\varphi \subset [-a,a]$.

证明 令

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\sigma)e^{-ix\sigma}\,d\sigma.$$

利用 Cauchy 公式,对任意实数 τ,上述积分可改写成

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma+i\tau)\mathrm{e}^{-ix(\sigma+i\tau)}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\tau x}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma+i\tau)\mathrm{e}^{ix\sigma}\mathrm{d}\sigma,$$

因为,根据(14・4・5)式

$$|\psi(s)|\leqslant c_0\mathrm{e}^{a|\tau|},$$

$$|s|^2|\psi(s)|\leqslant c_2\mathrm{e}^{a|\tau|}$$

所以

$$|\psi(s)|\leqslant\frac{c}{1+|s|^2}\mathrm{e}^{a|\tau|}\leqslant\frac{c}{1+\sigma^2}\mathrm{e}^{a|\tau|},\tag{14・4・8}$$

其中 $c=\max\{c_0,c_2\}$. 因此(14・4・7)中积分局部一致收敛. 用同样的方法可证,(14・4・7)式可以在积分号下对 x 微分(微分后的函数的积分仍是局部一致收敛的). 因此 $\varphi(x)$ 任意次可微,且

$$\varphi^{(q)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(-is)^q\psi(s)\mathrm{e}^{-isx}\mathrm{d}s.$$

现在证明,当 $|x|>a$ 时 $\varphi(x)=0$. 由(14・4・8),我们有

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{\tau x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{c}{1+\sigma^2}\mathrm{e}^{a|\tau|}\mathrm{d}\sigma=\frac{c'}{2\pi}\mathrm{e}^{\tau x+a|\tau|}.$$

当 $x>a$ 时,令 $\tau\to-\infty$,即知 $\varphi(x)=0$,而当 $x<-a$ 时,令 $\tau\to+\infty$,则得 $\varphi(x)=0$.

因此 $\varphi(x)$ 是一基本函数.

余下只要证明,$\psi(s)=F[\varphi(x)]$.

设 $s=\sigma+i\tau$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{i(\sigma+i\tau)x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u+i\tau)\mathrm{e}^{-i(u+i\tau)x}u\right]\mathrm{e}^{i(\sigma+i\tau)x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u+i\tau)e^{i(\sigma-u)x}du\right]dx$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u+i\tau)e^{i(\sigma-u)x}du\right]dx$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u+i\tau)\left[\int_{-T}^{T}e^{i(\sigma-u)x}dx\right]du$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(u+i\tau)\cdot 2\,\frac{\sin T(\sigma-u)}{\sigma-u}du$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma+i\tau+\xi)\,\frac{\sin T\xi}{\xi}d\xi$$

$$= \psi(\sigma+i\tau) = \psi(s). \blacksquare$$

结合定理 1,2,我们得到

定理 3　Fourier 变换 F:K → Z 是一代数同构.

定理 4　设 $\psi(s) = F[\varphi(x)]$,则

1) $FF[\varphi(x)] = 2\pi\varphi(-x)$;

2) 设 $P(t)$ 为常系数多项式,则

$$p\left(\frac{d}{ds}\right)F[\varphi(x)] = F[P(ix)\varphi(x)];$$

3) $F[\varphi(x-h)] = e^{ish}F[\varphi(x)]$;

4) $F[e^{ixh}\varphi(x)] = \psi(s+h)$.

证明　1) 根据定理 2,

$$\varphi(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma$$

$$= \frac{1}{2\pi}F[\psi(\sigma)] = \frac{1}{2\pi}FF[\varphi(x)],$$

因此 1) 成立.

2) 设 $\psi(s) = F[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{isx}dx$,则

$$\frac{d}{ds}\psi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty}ix\varphi(x)e^{isx}dx,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F[\varphi(x)] = F[ix\varphi(x)]. \qquad (14 \cdot 4 \cdot 9)$$

利用归纳法即得

$$\frac{\mathrm{d}^q}{\mathrm{d}s^q}F[\varphi(x)] = F[(ix)^q\varphi(x)], \qquad (14 \cdot 4 \cdot 10)$$

然后由 Fourier 变换的线性性质，即得

$$P\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)F[\varphi(x)] = F[P(ix)\varphi(x)]. \qquad (14 \cdot 4 \cdot 11)$$

3) $F[\varphi(x-h)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x-h)\mathrm{e}^{isx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{is(x+h)}\,\mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e}^{ish}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{isx}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ish}F[\varphi(x)].$$

4) $F[\mathrm{e}^{ixh}\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ixh}\varphi(x)\mathrm{e}^{isx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{i(s+h)x}\,\mathrm{d}x$

$$= \psi(s+h). \ \blacksquare$$

定义 1 设 $\{\psi_n(s)\} \subset \mathsf{Z}$，称序列 $\psi_n(s)$ 收敛于零，是指 $F^{-1}[\varphi_n(s)] = \varphi_n(x) \xrightarrow{\mathsf{K}} 0$.

根据定理 3，我们利用空间 K 与空间 Z 之间的一一对应关系，对于空间 K 上的每一个线性运算对应着空间 Z 上的一个线性运算.

定义 2 设 f 是 K 上的一个广义函数，f 的 Fourier 变换 $F[f] = g$ 定义为

$$(g,\psi) = 2\pi(f, JF^{-1}[\psi]) = 2\pi(f, J\varphi). \qquad (14 \cdot 4 \cdot 12)$$

其中，$J:\varphi(x) \longmapsto \varphi(-x)\ (\varphi \in \mathsf{K})$.

由定义，我们看到 K 上广义函数 f 的 Fourier 变换 $g = F[f]$ 已不是 K 上的泛函，而是 Z 上的泛函.

当 f 为绝对可积函数 $f(x)$ 所界定的正则广义函数时，按定义

$$
\begin{aligned}
(F[f],\psi) &= 2\pi(f(x),\varphi(-x)) \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(-x)\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)\mathrm{e}^{i\sigma x}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\sigma)\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{i\sigma x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

因此 g 就是由

$$
g(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{isx}\,\mathrm{d}x
$$

所界定的 Z 上的广义函数，它与通常的 Fourier 变换一致. 所以广义函数的 Fourier 变换是通常函数 Fourier 变换的自然推广.

关于广义函数的 Fourier 变换，也有与定理 4 相类似的公式：

$$
P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s})F[f] = F[P(ix)f], \qquad (14 \cdot 4 \cdot 13)
$$

$$
F[P(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})f] = P(-is)F[f]. \qquad (14 \cdot 4 \cdot 14)
$$

我们只需证明当 $p(t) = t$ 时，公式(14・4・13)、(14・4・14)成立.

$$
\begin{aligned}
(F[ixf],\psi) &= 2\pi(ixf,JF^{-1}[\psi]) = 2\pi(f,ixJF^{-1}[\psi]) \\
&= (F[f],F[-ix\varphi(x)]) = (F[f],-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F[\varphi]) \\
&= (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F[f],\psi),
\end{aligned}
$$

所以

$$
F[ixf] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}F[f]. \qquad (14 \cdot 4 \cdot 15)
$$

再由

$$
(F[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f],\psi) = 2\pi(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f,JF^{-1}[\psi])
$$

$$= 2\pi(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f, J\varphi) = 2\pi(f, J\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi)$$

$$= (F[f], F[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi]) = (F[f], -isF[\varphi])$$

$$= (-isF[f], \psi),$$

即得

$$F[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f] = -isF[f]. \tag{14·4·16}$$

例 14·4·1 求 $F[\delta]$.

按定义

$$(F[\delta], F[\varphi]) = 2\pi(\delta, J\varphi) = 2\pi\varphi(0),$$

然后由

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(s)\mathrm{e}^{-isx}\mathrm{d}s$$

得

$$2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(s)\mathrm{d}s,$$

因此,

$$F[\delta] = 1, \quad F^{-1}[1] = \delta.$$

例 14·4·2 求 $F[1]$.

按定义

$$(F[1], F[\varphi]) = 2\pi(1, J\varphi)$$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(-x)\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{isx}\mathrm{d}x\Big|_{s=0}$$

$$= 2\pi\psi(0) = 2\pi(\delta, \psi),$$

所以

$$F[1] = 2\pi\delta, \quad F^{-1}[\delta] = \frac{1}{2\pi}.$$

例 14·4·3　求 $F[x^n]$.

$$\begin{aligned}(F[x^n],F[\varphi(x)]) &= 2\pi(x^n,\varphi(-x))\\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\varphi(-x)\mathrm{d}x = 2\pi(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\varphi(x)\mathrm{d}x\\ &= 2\pi i^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{isx}\mathrm{d}x\Big|_{s=0}\\ &= 2\pi(\delta,i^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\psi) = 2\pi((-i)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}\delta,\psi),\end{aligned}$$

所以

$$F[x^n] = 2\pi(-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s})^n\delta(s).$$

类似地，对常系数多项式 $P(x)$ 有

$$F[P(x)] = 2\pi P(-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s})\delta(s).$$

例 14·4·4　求广义函数 e^{bx} 的 Fourier 变换.

因为级数

$$\mathrm{e}^{bx} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}x^n$$

在空间 K^* 中收敛，因此

$$\begin{aligned}F[e^{bx}] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}F[x^n] = \sum_{n=0}^{\infty}2\pi\frac{b^n}{n!}(-i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s})^n\delta(s)\\ &= 2\pi\delta(s-ib).\end{aligned}$$

此结果也可由

$$\begin{aligned}(F[e^{bx}],F[\varphi(x)]) &= 2\pi(\mathrm{e}^{bx},\varphi(-x))\\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{bx}\varphi(-x)\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{e}^{-bx}\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\psi(ib)\end{aligned}$$

得出.

利用例 14·4·4 的结果，我们来求作为广义函数的 $\sin bx$ 和 $\cos bx$ 的 Fourier 变换：

$$F[\sin bx]=F\left[\frac{e^{ibx}-e^{-ibx}}{2i}\right]$$
$$=i\pi[\delta(s-b)-\delta(s+b)].$$
$$F[\cos bx]=F\left[\frac{e^{ibx}+e^{-ibx}}{2}\right]$$
$$=\pi[\delta(s-b)+\delta(s+b)].$$

§14·5 广义微分方程

我们考虑微分方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_i(x)y^{(i)}(x)=b(x). \qquad (14\cdot5\cdot1)$$

其中我们假定 $a_i(x)(i=0,\cdots,n)$ 是无穷次可微函数，$b(x)$ 是已知函数.

如果 $b(x)$ 是一局部可积函数，那么它界定一个广义函数，这个广义函数仍记作 $b(x)$. 于是，古典微分方程(14·5·1)也可以看作广义函数微分方程. 如果微分方程(14·5·1)在古典意义下有解 $y(x)$，那么这个古典解也是在广义意义下的解，因此广义函数的微分方程是普通线性微分方程的直接推广.

作为例子，考虑最简单的方程

$$\frac{dy}{dx}=0. \qquad (14\cdot5\cdot2)$$

我们证明，在广义函数类中，这个方程只有常数解 $y=c$，即广义方程(14·5·2)除了古典解外无其他解.

方程(14·5·2)等价于方程

$$(y',\varphi)=(y,-\varphi')=0,\forall\varphi\in\mathsf{K}. \qquad (14\cdot5\cdot3)$$

由(14·5·3)，我们看到，对于任意的基本函数 $\varphi_0(x)$，如果它是某基本函数的导数，就有 $(y,\varphi_0)=0$. 可以证明(见习题1)，基本函数

$\varphi_0(x)$ 是某一基本函数导数的充分必要条件是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{14·5·4}$$

现在任取一基本函数 $\varphi_1(x)$，它满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = 1. \tag{14·5·5}$$

设 $\varphi(x)$ 为一基本函数，令

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{14·5·6}$$

则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

因此 $\varphi_0(x)$ 可表为某基本函数的导数，从而有

$$(y,\varphi_0) = 0, \tag{14·5·7}$$

于是

$$\begin{aligned}(y,\varphi) &= (y,\varphi_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + (y,\varphi_0)\\ &= (y,\varphi_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

令 $(y,\varphi_1) = c$，则

$$(y,\varphi) = c\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{+\infty}c\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

由 $\varphi\in \mathrm{K}$ 之任意性即知 $y = c$. 即广义方程除了古典解（常数解）外无其他解.

定理 1　方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f \tag{14·5·8}$$

（其中 f 为广义函数）在广义函数类中有解，我们把这个解称为广义函数 f 的原函数，记作）

$$y = \int f\,\mathrm{d}x.$$

证明 方程(14·5·8)等价于方程

$$(y,-\varphi')=(f,\varphi),\quad \forall\varphi\in K. \qquad (14\cdot5\cdot9)$$

以 Φ_0 表集合 $\{\varphi'(x)\mid\varphi(x)\in K\}$. 显然 Φ_0 是 K 的一个线性子空间. 由(14·5·9),利用 f 定义了 Φ_0 上的一个线性泛函 y,因此为了得到(14·5·8)的解只要把 y 延拓到整个 K 上,使它成为 K 上的连续线性泛函.

为此目的,任取一基本函数 $\varphi_1(x)$,使它满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x)\mathrm{d}x=1$$

设 $\varphi(x)\in K$,令

$$\varphi_0(x)=\varphi(x)-\varphi_1(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x, \qquad (14\cdot5\cdot10)$$

则 $\varphi_0(x)\in\Phi_0$. 现在,分别作 K 上的线性泛函 y_0,y_1:

$$(y_0,\varphi)=(y,\varphi_0), \qquad (14\cdot5\cdot11)$$

$$(y_1,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}c\varphi(x)\mathrm{d}x, \qquad (14\cdot5\cdot12)$$

然后令

$$g=y_0+y_1=y_0+c,$$

那么当 $\varphi\in\Phi_0$ 时,

$$(g,\varphi)=(y_0,\varphi)+(c,\varphi)=(y,\varphi),$$

因此 g 是 y 的延拓,且对任一 $\varphi\in K$ 有 $\varphi'\in\Phi_0$,从而

$$(g,\varphi')=(y,\varphi')=(f,-\varphi)$$

即 g 为(14·5·9)的解,从而 g 是广义微分方程(14·9·8)的一般解. ▌

定理 2 设方程(14·5·8)右端函数 $f(x)$ 连续,则(14·5·8)的广义解 $g(x)$ 也是古典解.

证明 根据定理 1,(14·5·8)的广义解可表成

$$g(x)=y_0(x)+C$$

因此,要证 $g(x)$ 是古典解,只需证明 $y_0(x)$ 是正则泛函,它对

应于一个连续可微函数.

设 $F'(x)=f(x)$，对 $\varphi(x)\in K$，$\varphi_0(x)$ 定义如(14・5・10). 令

$$\varphi^*(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_0(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

则 $\varphi^{*\prime}(x)=\varphi_0(x)\in\Phi_0$，因此

$$\begin{aligned}(y_0,\varphi)&=(y,\varphi_0)=(y,\varphi^{*\prime})\\&=(f,-\varphi^*)=(F',-\varphi^*)\\&=(F,\varphi^{*\prime})=(F,\varphi_0)\\&=\left(F(x),\varphi(x)-\varphi_1(x)\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\right)\\&=(F(x),\varphi(x))-\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

我们只需取 $F(x)$ 满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}F(x)\varphi_1(x)\mathrm{d}x=0$ 即得

$$(y_0,\varphi)=(F(x),\varphi(x)),\quad\forall\varphi\in K.$$

由此可知

$$y_0(x)\equiv F(x).$$

从而

$$g(x)=F(x)+c.$$

即 $g(x)$ 为方程(14・5・8)的古典解. ▌

根据前面的讨论，我们看到，为了研究微分方程的解，我们可以把一般微分方程看作广义微分方程，求其广义解. 由于广义函数有着较好的分析性质，这样做有时要比直接讨论原来的微分方程容易. 在求得广义解后，如果能证明广义解是正则的且对应的局部可积函数具有足够多次的连续可微性，那么广义解就是古典解.

作为例子，我们考虑常系数微分方程

$$\sum_{i=0}^{n}a_iE^{(n-i)}(x)=\delta(x).\qquad(14\cdot5\cdot13)$$

它相应的齐次方程

$$\sum_{i=0}^{n} a_i E^{(n-i)}(x) = 0 \qquad (14 \cdot 5 \cdot 14)$$

有 n 个线性无关解 $u_1(x),\cdots,u_n(x)$. 令

$$F(x) = \begin{cases} A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x), & \text{当 } x > 0; \\ B(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i(x), & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

其中 $\alpha_i,\beta_i(i=1,\cdots,n)$ 是待定的常数. $F(x)$ 界定的广义函数记为 $E(x)$. 记 $h_k = A^{(k)}(0) - B^{(k)}(0),(k=0,1,\cdots,n-1)$,并约定当 $k<0$ 时 $h_k=0$,则有

$$E^{(n-i)}(x) = F^{(n-i)}(x) + \sum_{j=1}^{n-i} h_{n-i-j}\delta^{(j-1)}(x),$$

于是

$$\sum_{i=0}^{n} a_i E^{(n-i)}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i F^{(n-i)}(x) + \sum_{i=0}^{n} a_i\Big[\sum_{j=1}^{n-i} h_{n-i-j}\delta^{(j-1)}(x)\Big]$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i h_{n-i-1}\delta(x) + \sum_{i=0}^{n} a_i\Big[\sum_{j=2}^{n-i} h_{n-i-j} \cdot \delta^{(j-1)}(x)\Big].$$

由此可知,只需取系数 α_i, β_i 满足

$$h_k = 0, k = 0,1,\cdots, n-2, h_{n-1} = \frac{i}{a_0},$$

则得

$$\sum_{i=0}^{n} a_i E^{(n-i)}(x) = \delta(x).$$

为此只需令 $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i, i = 1,\cdots,n$,并注意到

$$h_k = A^{(k)}(0) - B^{(k)}(0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) u^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u^{(k)}(0),$$

只要解方程组

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i u_i^{(k)}(0)=0,\ k=0,1,\cdots,n-2;\\ \sum_{i=1}^{n}\gamma_i u^{(n-1)}(0)=\dfrac{1}{a_0}.\end{cases}\tag{14·5·15}$$

即可确定 $F(x)$，由常微分方程论，我们知道方程组(14·5·15)的系数矩阵是非退化的，因此这个方程组总是可解的，因此方程(14·5·13)也总是可解的.

不过，我们要指出，因为解 $E(x)$ 是由 $\gamma_i=\alpha_i-\beta_i$ 来确定，因此方程(14·5·13)的解可以差一个相应齐次方程(14·5·14)的任意解.

我们把方程(14·5·13)的解称为方程

$$P(D)u=\sum_{i=0}^{n}a_i u^{(n-i)}(x)=\mu(x)\tag{14·5·16}$$

的基本解.(14·5·16)右端的 $\mu(x)$ 为广义函数.

最后，我们要指出

定理 3　设 $E(x)$ 是方程(14·5·16)的基本解，则 $u(x)=\mu(x)*E(x)$ 是方程(14·5·16)的解.

证明　事实上，我们有

$$\begin{aligned}P(D)u&=P(D)[\mu(x)*E(x)]\\&=\mu(x)*P(D)E(x)\\&=\mu(x)*\delta(x)=\mu(x).\ \blacksquare\end{aligned}$$

习 题 十 四

1. 设 $\varphi(x)$ 是 R^1 上的基本函数,试证：$\varphi(x)$ 是某基本函数的导数的充分必要条件是：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x = 0.$$

2. 设广义函数 $f(x)$ 在任一点的邻域中等于零,试证：$f(x)\equiv 0$,即

$$(f,\varphi) = 0,\quad \forall\varphi\in \mathrm{K}.$$

3. 试证,若广义函数列收敛,则其极限唯一.

4. 证明:若广义函数列 $\{f_n\}$,$\{g_n\}$ 分别收敛于 f,g,则对实数 α,β 有

$$\alpha f_n + \beta g_n \to \alpha f + \beta g \quad (n\to\infty).$$

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 为一局部可积函数列,且存在一局部可积函数 $F(x)$,满足

$$|f_n(x)| \leqslant F(x),\quad n = 1,2,\cdots$$

设 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x) = f(x)$ 处处成立,证明,广义函数列 $\{f_n\}$ 收敛于 f.

6. 设 $f_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{n}{1+n^2x^2}\quad n = 1,2,\cdots$ 证明,$\{f_n(x)\}$ 所界定的广义函数列 $\{f_n\}$ 以 $\delta(x)$ 为极限.

7. 设 $f_\lambda(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin\lambda x}{x}$,证明：$\lim\limits_{\lambda\to\infty}f_\lambda(x) = \delta(x)$.

8. 设 $\ln x^+ = \begin{cases}\ln x, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 证明：

$$((\ln x^+)',\varphi) = \int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)\theta(1-x)}{x}\mathrm{d}x,$$

其中 $\theta(x) = \begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$

9. 求 $\delta(x)$ 的导数.

10. 设 $f(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}$,求广义函数 $f(x)$ 的 Fourier 变换 $F[f]$.

参 考 书 目

[1] И. П. 那汤松(徐瑞云译). 实变函数论. 北京:人民教育出版社,1958.

[2] 陈建功. 实函数论. 北京:科学出版社,1958

[3] 江泽坚,吴智泉. 实变函数论. 北京:人民教育出版社,1961

[4] 夏道行等. 实变函数论与泛函分析. 北京:人民教育出版社,1978

[5] 郑维行,王声望. 实变函数与泛函分析概要. 北京:人民教育出版社,1980

[6] 周民强. 实变函数论. 北京:北京大学出版社,2001

[7] E. Kamke(吴莲溪译). 勒贝格—斯蒂尔吉斯积分. 北京:高等教育出版社. 北京:1965

[8] P. R. Halmos, Measure Theory, D. Van Nostrand, New York, 1950. (有中译本. 测度论. 北京:科学出版社,1958)

[9] B. R. Gelbaum and J. M. H. Olmsted, Counter examples in Analysis, Holden-Day, Inc., 1964(有中译本. 分析中的反例. 上海:上海科学技术出版社,1980)

[10] G. Klambauer(孙本旺译). 数学分析. 长沙:湖南教育出版社,1981

[11] 郭大钧,陈玉妹,裘卓明. 数学分析.(第二版)济南:山东科学技术出版社,2000

[12] 关肇直. 泛函分析讲义. 北京:高等教育出版社,1958

[13] Л. А. 刘斯铁尔尼克,В. И. 索伯列夫(杨从仁译). 泛函数分析概要. 北京:科学出版社,1955

[14] 关肇直，张恭庆，冯德兴. 线性泛函分析入门. 上海:上海科学技术出版社,1979

[15] Martin Schechter. Principles of functional analysis. London, 1971

[16] И. M. 盖尔芳特,Г. E. 希洛夫(林坚冰译). 广义函数(i). 北京:科学出版社,1965

[17] 国防科技大学应用数学教研室编. 实变函数论习题解答. 长沙:湖南科学技术出版社,1980