

HOMEWORK ASSIGNMENT #3

1. 将欧拉-拉格朗日方程写成下列的形式:

$$\ddot{q}_\beta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial \dot{q}_\beta} + \dot{q}_\beta \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial q_\beta} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_\alpha \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad (1)$$

思考什么情况下欧拉-拉格朗日方程是线性微分方程。

2. 一个质量为 m 的质点被限制在 $y = y(x)$ 的曲线上运动, 其中 y 为竖直方向距离地面的高度。写出系统的拉格朗日量和运动方程。求解 $y = kx^2/2$ 时质点在最低点附近运动方程的解。
3. 写出双摆的拉格朗日量, 并得到运动方程;

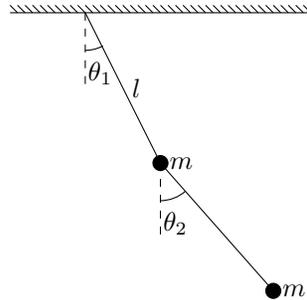


图: 双摆

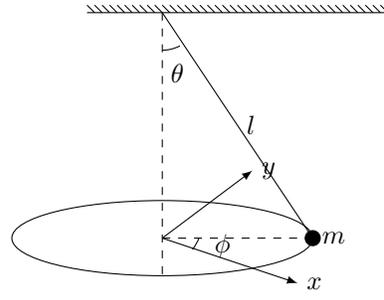


图: 球面摆

4. 写出球面摆的拉格朗日量并得到运动方程。
5. **L-S 耦合:** 一个质量为 m 的质点在三维空间运动, 其受到的力可以由下面的广义势能得到:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = V(r) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{J} \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为某个不变的矢量。

- (a) 分别在直角坐标系和球坐标系中求它受到的 (广义) 力
- (b) 分别在直角坐标系和球坐标系写出质点的拉格朗日量
- (c) 分别在直角坐标系和球坐标系写出质点的运动方程