

HOMEWORK ASSIGNMENT #1

(矢量运算和公式推导：注意矢量符号和书写规范)

1. 从牛顿第二定律出发,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (1)$$

证明质点运动的动能对时间的导数满足

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}, \text{ 或者 } \frac{d(mT)}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{p}. \quad (2)$$

2. 对于质量为 m 的质点, 在某个保守力的作用下, 其势能为,

$$V(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r} \quad (3)$$

(a) 根据势能定义, 得到保守力的表达式;

(b) 证明质点的角动量

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = 0 \quad (4)$$

(c) 证明矢量 $\vec{A}$ 守恒

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{J} + \frac{\alpha \vec{r}}{r} = \text{const.} \quad \text{即证明} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0. \quad (5)$$

3. 一个质量为 m 的质点受到一个位置固定在原点质量为 M 的质点的万有引力作用在某个平面内运动,

(a) 写出万有引力公式以及势能的表达式; (注意万有引力是矢量, 有方向。)

(b) 选择平面极坐标系 (r, θ) , 写出质点的牛顿第二定律方程;

(c) 由牛顿第二定律方程, 得到质点做圆周运动时角速度大小 $\dot{\theta}(r)$

4. 谐振子:

(a) 一维谐振子的回复力为:

$$F = -kx, \quad (6)$$

写出其势能与位置的关系。如果谐振子的偏离平衡位置的运动函数为 $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$, 写出动能、势能随时间的变化。

(b) 三维各向同性的谐振子受到的力为:

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \quad (7)$$

判断这个力是不是保守力, 如果是请写出它的势能表达式。