

HOMEWORK ASSIGNMENT #11

Problem 1. 变换 $Q(q, p), P(q, p)$ 是正则变换, 证明:

$$1. [Q_i, Q_j] = 0, [P_i, P_j] = 0, [Q_i, P_j] = \delta_{ij}$$

$$2. [f, g]_{q,p} = [f, g]_{Q,P}$$

Problem 2. α, β 为何值时, 下面的变换为正则变换

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p), \quad P = q^\alpha \sin(\beta p) \quad (1)$$

Problem 3. 相空间坐标从 (q, p) 变换到 (Q, P) :

$$Q = \ln(1 + \sqrt{q} \cos p) \quad (2)$$

$$P = 2(\sqrt{q} + q \cos p) \sin p$$

证明该变换是正则变换, 并找到其生成函数。

Problem 4. 一个质量为 m 的质点在保守势场 $V(q)$ 中一维运动, 另外质点还受到大小与速度成正比的阻力 $f = -2m\gamma\dot{q}$ 。

1. 根据牛顿第二定律, 写出质点的运动方程
2. 证明该运动方程可由拉格朗日量 $L = e^{2\gamma t} (\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q))$ 得到
3. 写出该系统的哈密顿量
4. 写出生成函数 $F_3 = e^{\gamma t} qP$ 对应的正则变换 $Q = Q(q, p, t), P = P(q, p, t)$, 以及变换后的哈密顿量
5. 对于 $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$, 解出在 $\gamma < \omega$ 时的解。