山东大学 2022-2023 学年第 一 学期 理论力学 课程试卷（期中）

姓名________ 学号________ 班级________ 专业________ 学院________

密 封 线

题号	一	二	三	四	五	总分	阅卷人
得分							

(请将答案写在试卷空白处；可以使用计算器。)

得分	阅卷人

一、证明题 (共 30 分)

1. 证明在有心力场 $U=\alpha/r$ 内运动的物体，有守恒矢量

$$\vec{A}=\vec{v}\times\vec{L}+\frac{\alpha\vec{r}}{r}=const.\quad 即\quad \frac{d\vec{A}}{dt}=0. \tag{1}$$

2. 证明欧拉-拉格朗日方程可以写成

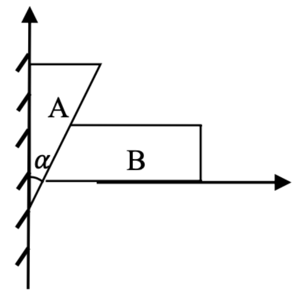
$$\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\sum_\alpha \dot{q}_\alpha\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_\alpha}-L\right)=0 \tag{2}$$

3. 写出广义动量、广义能量的定义，并给出它们守恒的条件。

得分	阅卷人

二、计算题 (共 10 分)

质量为 m_1 锐角为 α 的直角三角形 A，其直角边靠在光滑的墙面上，其斜边与质量为 m_2 的梯形 B 接触，B 可在水平面上无摩擦地滑动。写出系统的拉格朗日量并求得三角形 A 和梯形 B 的加速度。



得分	阅卷人

三、计算题 (共 20 分)

球面摆是质量为 m 的质点沿着半径为 l 的球面在重力场中运动。

1. 在球坐标系下，求球面摆的运动方程，并求出循环坐标对应的守恒量。

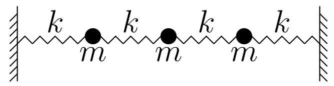
2. 如果 θ 为质点 m 的极角坐标，求 m 在 θ_0 附近微振动的频率，θ_0 满足

$$\ddot{\theta}|_{\theta_0}=0 \tag{3}$$

得分	阅卷人

四、计算题 (共 10 分)

如图所示：写出系统的拉格朗日量，并计算系统在质心位置不变的约束下的简正频率和简正模式



得分	阅卷人

五、计算题 (共 30 分)

一个质点在有心力

$$\vec{F}=-k\vec{r} \tag{4}$$

的作用下在一个平面内运动，$\vec{r}$ 为原点到质点的径矢。

1. 写出系统的拉格朗日量，得到有效势，计算质点做圆周运动时的半径（给定角动量和机械能）。

2. 圆周轨道是个稳定轨道，如果质点的能量稍稍偏离圆周运动时的能量，那么质点在径向上做简谐振动，求振动周期。(提示：径向坐标 $r=r_0+x$，一阶近似，利用简谐运动方程 $\ddot{x}+\omega^2x=0$, $T=2\pi/\omega$).

3. 计算该质点的一般运动。

提示：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}+(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} \tag{5}$$

$$\frac{1}{(r+x)^n}\simeq\frac{1}{r^n}-\frac{nx}{r^{(n+1)}} \tag{6}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{\alpha^2-(u-\beta)^2}}=\arccos\frac{u-\beta}{\alpha}+C \tag{7}$$

$$\cos(\theta_0+\eta)\simeq\cos(\theta_0)-\eta\sin(\theta_0) \tag{8}$$

$$\sin(\theta_0+\eta)\simeq\sin(\theta_0)+\eta\cos(\theta_0) \tag{9}$$

$$\frac{\cos(\theta_0+\eta)}{\sin^3(\theta_0+\eta)}\simeq\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}-\frac{1+2\cos^2\theta_0}{\sin^4\theta_0}\eta \tag{10}$$