HOMEWORK ASSIGNMENT #1

（矢量运算和公式推导：注意符号和书写规范）

1. 证明在任意的参考系中，质心位置矢量的大小 R 满足下面的方程

$$M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij} m_i m_j r_{ij}^2. \tag{1}$$

   其中 $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$

2. 从牛顿第二定律出发,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2}$$

   证明质点运动的动能对时间的导数满足

$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}, \quad \text{或者} \quad \frac{d(mT)}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{p}. \tag{3}$$

3. 对于质量为 m 的质点，在某个有心力的作用下，

$$\vec{F} = \frac{n\alpha}{r^{n+1}}\hat{r} \tag{4}$$

   根据牛顿第二定律证明

$$G \equiv \vec{p}\cdot\vec{r}, \quad \frac{dG}{dt} = 2T + nV(r) \tag{5}$$

4. 证明在有心力场 $V = \alpha/r$ 内运动的物体，有守恒矢量

$$\vec{A} = \vec{v}\times\vec{L} + \frac{\alpha\vec{r}}{r} = const. \quad \text{即} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0. \tag{6}$$

5. 谐振子：
   (a) 一维谐振子的回复力为：

$$F = -kx, \tag{7}$$

   写出其势能与位置的关系。如果谐振子的偏离平衡位置的运动函数为 $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$，写出动能、势能随时间的变化。

   (b) 三维各向同性的谐振子受到的力为：

$$\vec{F} = -k\vec{x}, \tag{8}$$

   判断这个力是不是保守力，如果是请写出它的势能表达式。

   (c) 如果三维谐振子受到的力为：

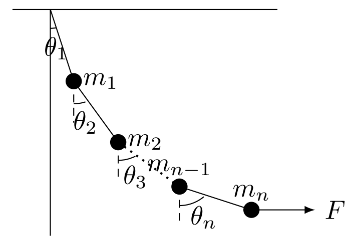
$$F_i = -k_{ij}x_j, \tag{9}$$

   判断这个力是不是保守力，如果是请写出它的势能表达式。

HOMEWORK ASSIGNMENT #2

(约束和广义坐标)

1. 写出圆环作纯滚动时的约束，判断是否是完整约束。
2. 写出双摆的约束方程，计算系统的自由度，并用合适的广义坐标表示两个质点的位置、速度和重力势能。
3. 写出球面摆的约束方程，计算系统的自由度，并用合适的广义坐标表示两个质点的位置、速度和重力势能。
4. n 个质量分别为 $m_1, \cdots m_n$ 的质点用不可伸缩的轻绳相连，质点间隔均为 l。



   (a) 写出在平面内摆动时满足的约束。
   (b) 用 $\theta_1, \cdots \theta_n$ 作为广义坐标，写出各个质点的位置、速度、重力势能。
   (c) 当一大小为 F 的水平力作用在最后一个质点上，求平衡时各个 θ 的值
5. 利用拉格朗日方程得到单摆的运动方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{1}$$

HOMEWORK ASSIGNMENT #3

(To practice the *Lagrange equations*)

1. 证明拉格朗日方程的 Nielsen 形式

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{1}$$

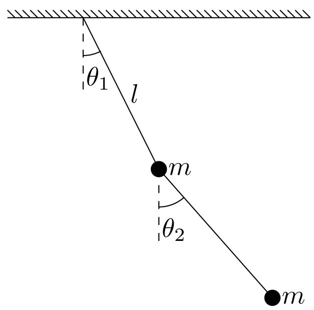
2. 已知一个系统的拉格朗日量为 $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz$, 得到运动方程。

3. 一个质量为 m 的质点被限制在 $y = y(x)$ 的曲线上运动，其中 y 为竖直方向距离地面的高度。写出系统的拉格朗日量和运动方程。求解 $y = kx^2/2$ 时质点在最低点附近运动方程的解。

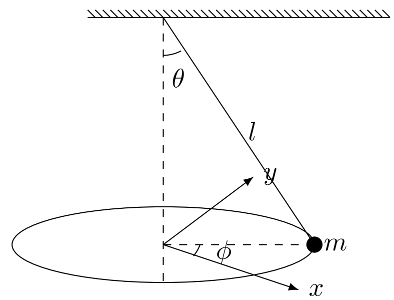
4. 写出双摆的拉格朗日量和运动方程.

5. 写出球面摆的拉格朗日量和运动方程.

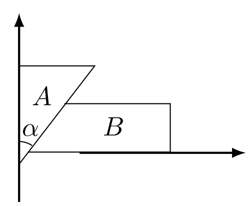
6. 质量为 m_1 锐角为 α 的直角三角形 A，其直角边靠在光滑的墙面上，其斜边与质量为 m_2 的梯形 B 接触，B 可在水平面上无摩擦地滑动。写出系统的拉格朗日量并求得三角形 A 和梯形 B 的加速度。



题目 4: 双摆



题目 5: 球面摆



题目 6

7. 一个带电粒子在电磁场中的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - (q\phi - q\vec{v}\cdot\vec{A}), \tag{2}$$

其中 ϕ and $\vec{A}$ 是位置和时间的函数。得到系统的广义动量、广义能量与运动方程。

8. 一个带电粒子在电磁场中的拉格朗日量为

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - (q\phi - q\vec{v}\cdot A), \tag{3}$$

其中 ϕ and $\vec{A}$ 是位置和时间的函数，得到系统的广义动量和广义能量。

HOMEWORK ASSIGNMENT #4

1. 已知两个 Lagrangian 的关系为

$$L'(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t) + \frac{df(q,t)}{dt}, \tag{1}$$

   证明两个 Lagrangian 给出的方程是一样的。

2. 一个系统的广义坐标为 q_α, $\alpha = 1, \cdots, n$，满足方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0. \tag{2}$$

   如果我们做变量代换，用另外 n 个独立的参数 s 代替 q:

$$q_\alpha = q_\alpha(s_1, \cdots, s_n). \tag{3}$$

   从 Eq.(2)出发得到 s 满足的方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{s}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial s_\alpha} = 0. \tag{4}$$

3. 一个珠子套在光滑的锥形螺旋线上，在重力的作用下运动，锥形螺旋线的方程为

$$r = az, \quad \phi = -bz \tag{5}$$

   (a) 系统运动的自由度
   (b) 写出 z 满足的运动方程

4. 根据相对论，粒子高速运动时的拉格朗日量为

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - V(r), \tag{6}$$

   其中 c 是光速。在平面极坐标下，写出在牛顿引力势下系统的运动方程，以及轨道 $r(\theta)$ 满足的方程。

5. 对于有心势：

$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2 \tag{7}$$

   采用平面极坐标，得到系统的广义动量和广义能量，并判断是否守恒；得到运动方程；得到径向运动有效势。

HOMEWORK ASSIGNMENT #5

1. 对于有心势：

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r^3}, \quad \alpha > 0 \tag{1}$$

采用平面极坐标，得到系统的广义动量和广义能量，并判断是否守恒；得到运动方程；得到径向运动有效势，并根据有效势分析运动情况；并计算圆形轨道半径，分析是否稳定

2. 在太阳系内均匀分布的尘埃，使太阳系的行星除了太阳的引力外还有一个附加力

$$\vec{F} = -mC\vec{r} \tag{2}$$

这一附加力比太阳的引力小很多

(a) 计算：行星做圆周轨道时的半径及周期

(b) 计算：行星圆周轨道受到扰动后径向振荡的周期

(c) 在一般情况下，行星的轨道为进动的椭圆轨道。求行星从近日点出发再次回到近日点时，近日点的进动角大小并指出进动方向与行星公转方向相同还是相反。

3. 求质点在势场

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{h}{r^2} \tag{3}$$

的作用下的运动，并指出轨道与只受万有引力时的区别。

HOMEWORK ASSIGNMENT #6

小组作业：**立方反比**有心力问题。要求如下：

1. 每个小组 4-5 人，选出一个负责人。不可以跨班级组队；
2. 提出并解决问题：利用学过的知识，尽可能讨论更多的问题；
3. 可以使用网络资源、计算机辅助说明和解决问题。
4. 作业下周一交：手写、打印都可以，署上组长和全部组员名字

HOMEWORK ASSIGNMENT #7

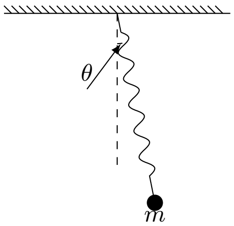


Fig.1

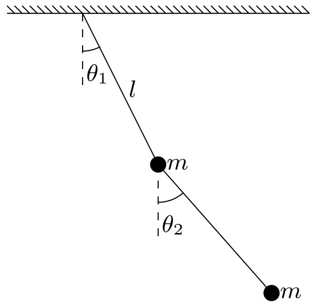


Fig.2

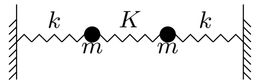


Fig.3

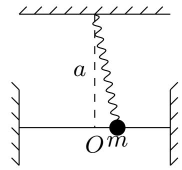


Fig.4

1. **弹簧摆：**质量为 m 的质点，用一个固有长度为 l 、弹性系数为 k 的弹簧悬挂于 O 点，弹簧质量可以忽略。假设质点只是在如图所示的平面内运动，
   (a) 写出质点做小振动时的拉格朗日量和运动方程
   (b) 求质点做小振动时的频率（提示：分径向和角向）
   (c)（选做）如果质点不是在平面内运动时是什么情况？（提示：用球坐标）
2. **双摆：**
   (a) 以 θ_1 和 θ_2 为广义坐标，写出系统拉格朗日量。
   (b) 写出系统拉格朗日量微小振动时的近似表达式。
   (c) 写出运动方程。
   (d) 求解简正频率。
   (e) 得到运动方程的解。
3. 质量都是 m 的两个质点与三根弹簧链接，如图所示，不考虑重力，质点在水平方向上运动。
   (a) 选择合适的广义坐标，写出系统的拉格朗日量。
   (b) 求得系统的简正频率和简正运动模式（提示：对称性）。
4. **如图 4 所示：**质量为 m 的小球穿过光滑的杆，弹簧的弹性系数为 k，自然伸缩的长度为 l。写出系统的拉格朗日量，假设质点初始位置在 O 点，受到小的扰动开始运动，计算 $l \leq a$ 时的运动情况；当 $l > a$ 时运动情况又如何？

HOMEWORK ASSIGNMENT #8

1. 证明：R 是一个 3×3 的实正交矩阵，它的本征值满足方程：

$$\lambda^3-\lambda^2Tr(R)+\lambda Tr(R)-1=0, \tag{1}$$

并且 $\lambda=1$ 是这个方程的一个解。

2. 在空间反演变换下：$x_i\to -x_i$，位置矢量变化为

$$\vec{r}\to\vec{r}'=-\vec{r} \tag{2}$$

而如果一个矢量在空间反演下不变，

$$\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A} \tag{3}$$

称为赝矢量或者轴矢量。证明速度、加速度以及动量是矢量，而角动量为赝矢量。

3. 刚体绕过原点的某个轴 $\hat{n}=(n_1,n_2,n_3)$ 的转动惯量为

$$I_n\equiv\int dm(\vec{n}\times\vec{r})^2,\quad \text{or}\quad I_n\equiv\int dm(\vec{r}-(\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n})^2 \tag{4}$$

而刚体绕原点转动时的转动惯量张量为 I_{ij}。证明

$$J=I_{ij}n_in_j \tag{5}$$

4. 计算下面（Fig.1-3）均匀刚体的转动惯量张量 (刚体质量均为 M，其中正方体边长为 a，球半径为 R.); 如 Fig.4 中所示的均匀圆柱，圆柱底面半径为 r，高为 L，在图上标出质心位置以及过质心的转动主轴，并计算相应的主轴转动惯量。

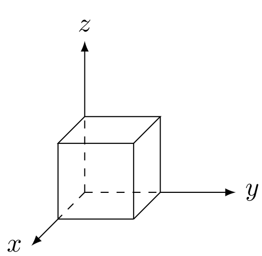


Fig.1

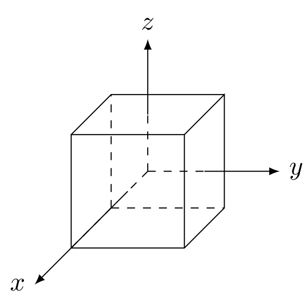


Fig.2

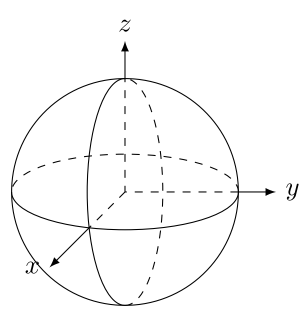


Fig.3

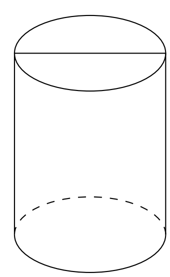


Fig.4

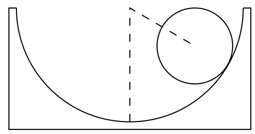
5. 上图 Fig.1 所示的刚体，如果绕着 z 轴旋转，角速度大小为 ω，计算刚体的角动量；并判断刚体角动量是否随时间变化。

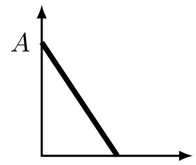
6. 已知空间坐标系 $x-y-z$ 与刚体坐标系 $x'-y'-z'$ 重合，经过欧拉转动 ϕ,θ,ψ 后，
   - 刚体上 $x'-$、$y'-$、$z'-$ 轴方向上的单位矢量 $\vec{i}'$、$\vec{j}'$、$\vec{k}'$ 在空间坐标系的表达式.
   - 空间坐标系的 $x-$、$y-$、$z-$ 轴方向上的单位矢量 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 在刚体坐标系中的表达式.

7. 刚体一般的运动可以分解为质心的运动，以及绕质心的转动。设刚体质量为 M，质心运动可以用位置矢量 $\vec{R}=(x,y,z)$ 描写。刚体绕质心的转动可以三个欧拉角 (ϕ,θ,ψ) 来表示，刚体过质心的转动惯量张量 $I_{\alpha\beta}$，
   - 写出用欧拉角表示的刚体本体参考系中角速度的三个分量分别 $\vec{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$
   - 写出刚体运动（平动 + 转动）时的动能
   - 写出刚体自由运动时的运动方程

HOMEWORK ASSIGNMENT #9

1. P179 例 1. 分别用空间坐标系和本体坐标系处理该问题。
2. 半径为 r、质量为 m 的均匀圆柱，在半径为 R、质量为 M 的圆柱形槽内无滑动滚动，
   (a) 如果圆柱形槽是固定不动的，求小圆柱在槽底附近做小振动时的周期
   (b) 如果槽在水平面上可以自由滑动，求小振动时的周期





3. 一根长为 $2l$ 的木杆，斜靠在光滑的墙角，初始时与水平面的夹角为 θ_0，木杆在重力下开始下滑。
   (a) 写出系统的拉格朗日量和一个运动积分；
   (b) 得到系统的运动方程；
   (c) 木杆 A 端脱离墙壁时的 θ。
   (d) (选做) 用转动定理（矢量力学）的方法处理该问题。

HOMEWORK ASSIGNMENT #10

1. (a) 将勒让德变换拟过来，从 $H(q,p,t)$ 得到 $L(q,\dot{q},t)$，并由正则方程得到拉格朗日方程。(b) 从哈密顿量 $H(q,p,t)$ 出发，定义动量空间的拉格朗日量 $L(p,\dot{p},t) = -\dot{p}q - H(q,p,t)$，并由正则方程得到动量空间的运动方程。

2. 一个质量为 m 的质点，势能为 $V(\vec{r})$，请在直角坐标系、球坐标系以及柱坐标系下
   - 写出系统的拉格朗日量，欧拉-拉格朗日运动方程以及正则动量。
   - 写出系统的哈密顿量，以及哈密尔顿正则运动方程。

3. 证明

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[A, B] = \left[\frac{\partial A}{\partial t}, B\right] + \left[A, \frac{\partial B}{\partial t}\right] \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}[A, B] = \left[\frac{dA}{dt}, B\right] + \left[A, \frac{dB}{dt}\right] \tag{3}$$

4. 证明

$$[q_i, p_j] = \delta_{ij} \tag{4}$$

$$[q_i, f] = \frac{\partial f}{\partial p_i} \tag{5}$$

$$[p_i, f] = -\frac{\partial f}{\partial q_i} \tag{6}$$

   即 q_i, p_i 是动量、位移平移变换的生成元。

5. 一个质点在有心力场的作用下运动，用球坐标写出系统的拉格朗日量；得到正则动量，并判断是否守恒；得到系统的哈密顿量；计算正则动量与哈密顿量的对易关系；判断 $p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$ 是否守恒

6. 质点在有心力场中运动:

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \tag{7}$$

   角动量和 Laplace-Runge-Lenz 矢量定义分别为

$$\mathbf{J} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \mathbf{K} = \mathbf{p} \times \mathbf{J} - mk\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{8}$$

   (a) 证明角动量和 Laplace-Runge-Lenz 矢量守恒，即

$$[\mathbf{J}, H] = 0, [\mathbf{K}, H] = 0 \tag{9}$$

   (b) 计算下面的泊松括号：

$$[J_i, J_j], [K_i, K_j], [J_i, K_j], \quad (i, j = x, y, z) \tag{10}$$

   (c) (选做) 搜索 $SO(4)$ 群生成元的相关内容，了解万有引力/氢原子对称性。

HOMEWORK ASSIGNMENT #11

Problem 1. *α、β 为何值时，下面的变换为正则变换*

$$Q = q^\alpha \cos(\beta p), \quad P = q^\alpha \sin(\beta p) \tag{1}$$

Problem 2. *相空间坐标从 (q,p) 变换到 (Q,P)：*

$$\begin{aligned} Q &= \ln(1+\sqrt{q}\cos p) \\ P &= 2(\sqrt{q}+q\cos p)\sin p \end{aligned} \tag{2}$$

证明该变换是正则变换，并找到其生成函数。

Problem 3. *一个带点量为 e 质量为 m 的质点在电磁场 $(\phi, \mathbf{A})$ 中运动，其拉格朗日量为*

$$L = -mc^2\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2} - e\phi(x,y,z,t) + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}(x,y,z,t) \tag{3}$$

1. *写出系统的拉格朗日方程*
2. *得到系统的正则动量和哈密顿量*
3. *写出系统的哈密顿正则方程*
4. *写出系统的哈密顿-雅可比方程*

Problem 4. *一个质量为 m 的质点在保守势场 $V(q)$ 中一维运动，另外质点还受到大小与速度成正比的阻力 $f = -2m\gamma\dot{q}$。*

1. *写出质点的运动方程*
2. *证明该运动方程可由拉格朗日量 $L = e^{2\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q)\right)$ 得到*
3. *写出该系统的哈密顿量*
4. *写出生成函数 $F_3 = e^{\gamma t}qP$ 对应的正则变换 $Q = Q(q,p,t), P = P(q,p,t)$，以及变换后的哈密顿量*
5. *对于 $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$，解出在 $\gamma < \omega$ 时的解。*

Problem 5. *分别用矢量力学、拉格朗日理论、哈密顿理论、哈密顿-雅可比理论处理一维谐振子。假设 $t=0$ 时, 有 $x_0 = A > 0$, $\dot{x}_0 = 0$*