

HOMEWORK ASSIGNMENT #10

Problem 1. 对于一个自由度为 n 的系统，其广义坐标为 $(q_1, \dots, q_m, \zeta_1, \dots, \zeta_{n-m})$ 。根据具体情况，有时我们不需要对所有广义坐标都做勒让德变换，而只需要对部分广义坐标做勒让德变换。假设我们只对前 m 个广义坐标做勒让德变换，这样得到函数称为罗斯函数：

$$R = \sum_{i=1}^m p_i \dot{q}_i - L \equiv R(q, p, \zeta, \dot{\zeta}) \quad (1)$$

证明系统的运动方程为

$$\dot{q}_i = \frac{\partial R}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial R}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{\zeta}_j} - \frac{\partial R}{\partial \zeta_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n-m \quad (3)$$

该方程被称为罗斯方程。

Problem 2. 一个带电量为 e 质量为 m 的质点，在电磁场中运动，其广义势可以写成

$$U = e\phi(x, y, z) - e\vec{v} \cdot \vec{A}(x, y, z) \quad (4)$$

求系统的正则动量、哈密顿量以及哈密顿正则方程。

Problem 3. 证明

$$[A, B] = -[B, A] \quad (5)$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \quad (6)$$

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [A, B] = \left[\frac{\partial A}{\partial t}, B \right] + \left[A, \frac{\partial B}{\partial t} \right] \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} [A, B] = \left[\frac{dA}{dt}, B \right] + \left[A, \frac{dB}{dt} \right] \quad (9)$$

Problem 4. 证明：如果 f 和 g 守恒，那么 $[f, g]$ 也守恒。该定理被称为泊松定理。

Problem 5. 一个质点在有心力场的作用下运动，用球坐标写出系统的拉格朗日量；得到正则动量，并判断是否守恒；得到系统的哈密顿量；计算正则动量与哈密顿量的对易关系；判断 $p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta}$ 是否守恒