

HOMEWORK ASSIGNMENT #4

(Variation Principle)

1. **悬链线 (Catenary):** 长度为 l 质量均匀不可伸缩的细绳, 两端悬挂在高度相同, 间隔为 $b < l$ 的立柱上, 在重力作用下达达到平衡 (提示: 势能最小)。求此时细绳形状曲线。
2. **测地线 (Geodesic):** 测地线即为最短路程曲线。证明球面上测地线为大圆弧。

(Canonical momentum and Conservation)

1. 证明 Euler-Lagrange Equation

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (1)$$

可以写成

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left(\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L \right) = 0. \quad (2)$$

2. 一个带电粒子在电磁场中的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - (q\phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}), \quad (3)$$

其中 ϕ and $\vec{A}$ 是位置和时间的函数。得到系统的正则动量与运动方程。

3. 一个带电粒子在电磁场中的拉格朗日量为

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - (q\phi - q\vec{v} \cdot \vec{A}), \quad (4)$$

其中 ϕ and $\vec{A}$ 是位置和时间的函数, 得到系统的正则动量。证明系统的总动量 $\vec{P} = \vec{p}_a + \vec{p}_b$ 是守恒的。

4. 一个粒子受到有心势的作用,

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \quad (5)$$

写出系统的拉格朗日量在球坐标系下 (r, θ, ϕ) 的表达式, 得到广义动量、广义能量, 判断是否守恒, 得到系统的运动方程。