学院______ 专业______ 级______ 班______ 学号______ 姓名______

密 封 线

山东大学 2024-2025 学年第 一 学期 理论力学 课程试卷（期中）

题号	一	二	三	四	五	总分	阅卷人
得分							

（请将答案写在后面的答题纸上；答题纸和试题页都要写上名字和班级）

得分	阅卷人

一、证明题 (共 30 分)

1. 证明在有心力场 $U=\alpha/r$ 内运动的物体，有守恒矢量

$$\vec{A}=\vec{v}\times\vec{L}+\frac{\alpha\vec{r}}{r}=const. \quad 即 \quad \frac{d\vec{A}}{dt}=0. \tag{1}$$

2. 根据第二类拉格朗日方程，证明 Nielsen 公式

$$\frac{\partial\dot{T}}{\partial\dot{q}_i}-2\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i, \tag{2}$$

3. 一个系统的拉格朗日量为

$$L=\frac{1}{2}m\sum_i\dot{x}_i^2-\frac{1}{2}k\sum_i x_i^2, \tag{3}$$

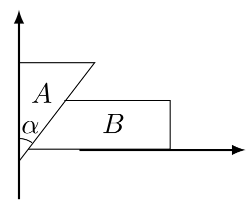
证明张量 M_{ij} 守恒，

$$M_{ij}=\frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_j+\frac{k}{2}x_ix_j \tag{4}$$

得分	阅卷人

二、计算题 (共 10 分)

质量为 m_1 锐角为 α 的直角三角形 A，其直角边靠在光滑的墙面上，其斜边与质量为 m_2 的梯形 B 接触，B 可在水平面上无摩擦地滑动。写出系统的拉格朗日量并求得三角形 A 和梯形 B 的加速度。



得分	阅卷人

三、计算题 (共 20 分)

球面摆是质量为 m 的质点沿着半径为 l 的球面在重力场中运动。

1. 在球坐标系下，求球面摆的运动方程，并求出循环坐标对应的守恒量。

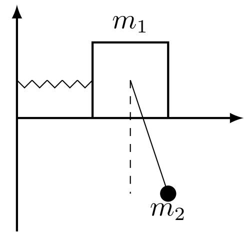
2. 如果 θ 为质点 m 的极角坐标，求 m 在 θ_0 附近微振动的频率，θ_0 满足

$$\ddot{\theta}|_{\theta_0}=0 \tag{5}$$

得分	阅卷人

四、计算题 (共 10 分)

如图所示：弹簧弹性系数为 k，细绳长度为 l。写出系统做小振动时的拉格朗日量，并计算系统的简正频率。(为了简单，可以取 $m_1=m_2=m$)



得分	阅卷人

五、计算题 (共 30 分)

太阳系中均匀分布的尘埃使得太阳对行星的引力作用加入了一个修正项：

$$\vec{F}=-mC\vec{r} \tag{6}$$

m 是行星质量，C 是常数，$\vec{r}$ 是太阳指向行星的径矢，修正项相比于引力来说非常小。

(1) 在考虑修正项的情况下，计算行星做圆周运动的半径于角动量的关系。

(2) 如果在圆周轨道的基础上，行星由于微小扰动在径向上做简谐振动，求振动周期。(提示：径向坐标 $r=r_0+x$，一阶近似，利用简谐运动方程 $\ddot{x}^2+\omega^2x^2=0, T=2\pi/\omega$).

(3) 一般情况下，行星的运动为进动的椭圆轨道，求在考虑修正项下，行星从近日点出发，再次经过近日点时，近日点角度的改变量，并指出进动角速度的方向与行星公转角速度的方向相同还是相反。(提示：椭圆方程 $\frac{p}{r}=1+\epsilon\cos\theta, p=\frac{J^2}{m\kappa}, \epsilon=\sqrt{1+\frac{2EJ^2}{m\kappa^2}}, \int_0^\pi\left(\frac{1}{1+\epsilon\cos\theta}\right)^4d\theta=\frac{(2+3\epsilon^2)\pi}{2(1-\epsilon^2)^{7/2}}$)

提示:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}+(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} \tag{7}$$

$$\frac{1}{(r+x)^n}\simeq\frac{1}{r^n}-\frac{nx}{r^{(n+1)}} \tag{8}$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{\alpha^2-(u-\beta)^2}}=\arccos\frac{u-\beta}{\alpha}+C \tag{9}$$

$$\cos(\theta_0+\eta)\simeq\cos(\theta_0)-\eta\sin(\theta_0) \tag{10}$$

$$\sin(\theta_0+\eta)\simeq\sin(\theta_0)+\eta\cos(\theta_0) \tag{11}$$

$$\frac{\cos(\theta_0+\eta)}{\sin^3(\theta_0+\eta)}\simeq\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0}-\frac{1+2\cos^2\theta_0}{\sin^4\theta_0}\eta \tag{12}$$