HOMEWORK ASSIGNMENT #1

1. Prove that the magnitude R of the position vector for the center of mass from an arbitrary origin is given by the equation

$$M^2R^2 = M\sum_i m_i r_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{ij} m_i m_j r_{ij}^2. \tag{1}$$

2. Starting from the Newton's second law of motion,

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2}$$

show that for a single particle with constant mass the equation of motion implies the following differential equation for the kinetic energy:

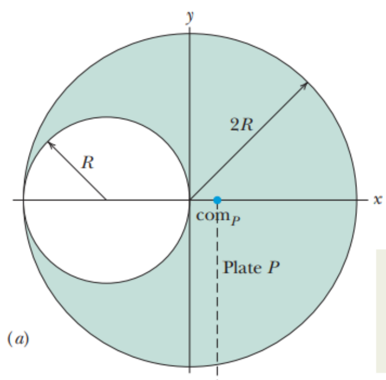
$$\frac{dT}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}, \tag{3}$$

while if the mass varies with time the corresponding equation is

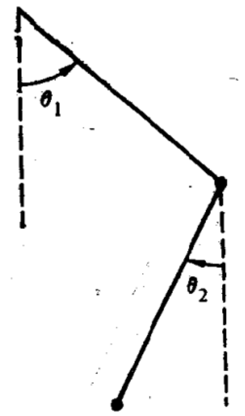
$$\frac{d(mT)}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{p}. \tag{4}$$

HOMEWORK ASSIGNMENT #2

1. Fig. (a) shows a uniform metal plate P of radius $2R$ from which a disk of radius R has been stamped out (removed) in an assembly line. Using the $x-y$ coordinate system shown, locate the center of mass (com_P) of the remaining plate.



(a) Center of mass.



(b) Double pendulum.

2. Fig. (b) shows a double pendulum with two points located at $\vec{r_1} = (x_1, y_1)$ and $\vec{r_2} = (x_2, y_2)$. Write down the expressions of the constrains.

3. A wheel of radius R rolls without slipping on a plane. Show that the constrain is holonomic.

HOMEWORK ASSIGNMENT #3

(To practice the *Lagrange equations*)

1. The EoM of the pendulum is

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0. \tag{5}$$

   Obtain the equation with more than three different ways.

2. Taking $L = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + mgz$, find the equations of motion.

3. A particle moves in a central force field given by the potential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \tag{6}$$

   where α is a positive constant. Find the equation of motion.

4. A point particle moves in space under the influence of a force derivable from a generalized potential of the form

$$U(\vec{r}, \vec{v}) = V(r) + \vec{\sigma} \cdot \vec{L}, \tag{7}$$

   where $\vec{r}$ is the radius vector from a fixed point, $\vec{L}$ is the angular momentum and $\vec{\sigma}$ is a fixed vector in space.

   - Find the components of the force on the particle in both Cartesian and spherical polar coordinates
   - Obtain the equations of motion in spherical polar coordinates.

5. Show the Lagrange equations can be written as

$$\frac{\partial \dot{T}}{\partial \dot{q}_i} - 2\frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{8}$$

   which is known as Nielsen form of the Lagrange equations.

6. Write down the Lagrangian the double pendulum and obtain the equations of the motion.

HOMEWORK ASSIGNMENT #4

1. Try to get the general Euler equation i.e. the condition that the following integral I has a stationary value.

$$I = \int f(y, y^{(1)}, \cdots, y^{(n)}, x)dx, \quad \text{where } y^{(\alpha)} = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} y(x) \text{ for } \alpha = 1, \cdots, n. \tag{9}$$

   The Lagrange's equation is a special case for $n = 1$.

2. Show that the Euler-Lagrange Equation

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{10}$$

   can be written as

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt}\left(\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L\right) = 0. \tag{11}$$

3. Write down the Lagrangian of the pendulum with generalized co-ordinate θ, obtain the *canonical momentum*.

4. The Lagrangian for a charged particle moving in an electromagnetic field is expressed as

$$L = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 - (q\phi - q\vec{v} \cdot A), \tag{12}$$

   where ϕ and $\vec{A}$ are independent on $\vec{v}$. Obtain the canonical momentum.

5. For a system with tow particles, the Lagrangian is $L = T_a + T_b - V(\vec{x}_a - \vec{x}_b)$, show that $\vec{P} = \vec{p}_a + \vec{p}_b$ is conserved. Hint: try defining new coordinates:

$$\vec{X} = \vec{x}_a + \vec{x}_b, \tag{13}$$
$$\vec{x} = \vec{x}_a - \vec{x}_b. \tag{14}$$

6. For a particle moving in space under the influence of the potential

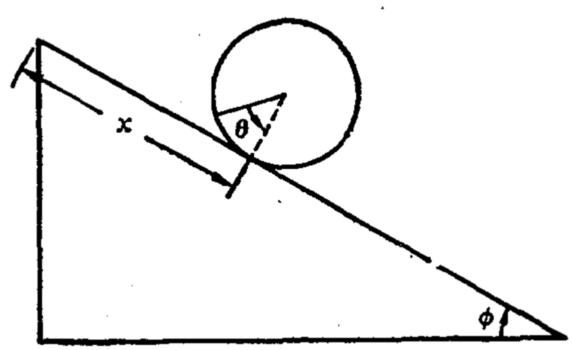
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}, \tag{15}$$

   write down the Lagrangian in spherical co-ordinate (r, θ, ϕ) and obtain the canonical momenta. Identify the conserved momentum.

HOMEWORK ASSIGNMENT #5

(练习广义坐标、广义力、约束力的计算)

一个质量为 M 的均匀圆环无摩擦地从斜面上滚动下来，如图所示



1. 写出约束方程，并证明是完整约束；计算出系统的自由度。
2. 用多种方法给出运动学方程：(提示：圆环的动能包括质心运动动能以及圆环绕质心的转动动能，可以在大学物理刚体部分找到)
   (a) 利用牛顿第二定律和转动定理（见大学物理），写出运动学方程，并求出摩擦力的大小
   (b) 计算重力对应的广义力，并利用公式：
   $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha = 0 \tag{16}$$
   给出圆环的运动方程。
   (c) 写出圆环的拉格朗日量，利用公式
   $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{17}$$
   得到运动学方程
   (d) 把约束方程写成完整约束的形式即 $f(q,t)=0$，利用公式
   $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha - \lambda\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} = 0 \tag{18}$$
   得到运动学方程以及约束力（摩擦力）
   (e) 把约束方程写成非完整约束的形式即 $f(q,\dot{q},t)=0$，验证该约束满足 Chetaev 条件：
   $$\sum \delta q_\alpha \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \tag{19}$$
   利用公式
   $$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - Q_\alpha - \lambda\frac{\partial f}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0 \tag{20}$$
   得到运动学方程以及约束力（摩擦力）

HOMEWORK ASSIGNMENT #6

1. 太阳-地球系统（简称日地系统）质量分别为
   (a) 根据约化质量定义，得到系统的约化质量的大小。
   (b) 日地平均距离 r，计算太阳距离系统质心的平均距离
   (c) 证明在太阳质量远大于地球质量的条件下 $M \gg m$，系统的拉格朗日量可以写成:
$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 + \frac{GMm}{r} \tag{21}$$
   其中 $\vec{r}$ 为地球相对太阳的位置矢量。
2. 根据径向方程
$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E \tag{22}$$
   得到：
   (a) $r = r(\theta)$ 满足的方程
$$\frac{l^2}{2\mu r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E \tag{23}$$
   (b) $u = 1/r(\theta)$ 满足的方程
$$\frac{l^2}{2\mu}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + \frac{l^2}{2\mu}u^2 + V(1/u) = E \tag{24}$$
   (c) 比内公式（Binet Formula）：
$$\frac{l^2}{\mu}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)u^2 = -F(1/u), \quad \text{其中} \quad F(r) = -\frac{\partial}{\partial r}V(r) \tag{25}$$
   (d) 对于万有引力势 $V(r) = -\frac{GMm}{r}$ 以及 $\mu = m$ 时，有
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{l^2} = const. \tag{26}$$
3. 对于有心势：
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad \alpha > 0 \tag{27}$$
   得到径向方程（r 满足的微分方程）及有效势，根据有效势，定性分析运动情况。
4. 对于有心势：
$$V(r) = \frac{1}{2}kr^2 \tag{28}$$
   得到径向方程（r 满足的微分方程）及有效势，根据有效势，分析运动情况（Lissajous Figure）。
5. 利用牛顿第二定律得到行星在万有引力作用下的运动方程，并分析圆形轨道的条件。

HOMEWORK ASSIGNMENT #7

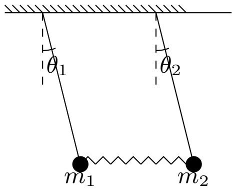


Fig.1

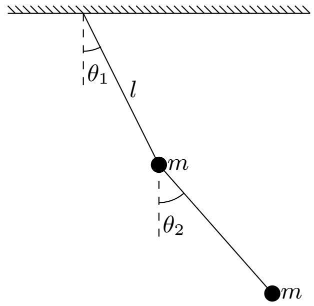


Fig.2

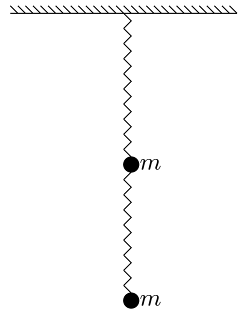


Fig.3

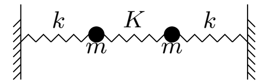


Fig.4

1. **耦合摆：**
   (a) 用矩阵的方式写出系统在小振幅振动情况下的拉格朗日量 $m_1 = m_2 = m$、以及运动方程
   (b) 用久期方程求的系统的简正频率
   (c) 用矩阵的运算得到简正坐标和简正模
2. **双摆：**
   (a) 以 θ_1 和 θ_2 为广义坐标，写出系统拉格朗日量。
   (b) 写出系统拉格朗日量微小振动时的近似表达式。
   (c) 写出运动方程。
   (d) 求解简正频率。
   (e) 得到运动方程的解。
3. 两根弹性系数均为 k 的弹簧，竖直连接两个质量均为 m 的质点。
   (a) 用质点相对弹簧未伸长时位置的位移 (x_1, x_2) 为坐标，写出拉格朗日量的表达式。
   (b) 找到系统的平衡位置。
   (c) 用质点偏离平衡位置的位移 (y_1, y_2) 为广义坐标，重新写出系统的拉格朗日量。
   (d) 得到系统的简正坐标，以及简正频率。
   (e) 得到系统的运动方程的解
4. 质量都是 m 的两个质点与三根弹簧链接，如图所示，不考虑重力，质点在水平方向上运动。
   (a) 选择合适的广义坐标，写出系统的拉格朗日量。
   (b) 用两种不同的方法求得系统的简正频率和简正运动模式。

HOMEWORK ASSIGNMENT #8

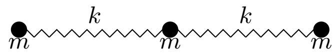


Fig.1

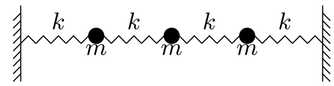


Fig.2

1. **如图 1 所示：**写出系统的拉格朗日量，并计算系统简正频率和简正模式
2. **如图 2 所示：**写出系统的拉格朗日量，并计算系统简正频率和简正模式

HOMEWORK ASSIGNMENT #9

1. 证明：R 是一个 3×3 的实正交矩阵，它的本征值满足方程：

$$\lambda^3-\lambda^2 Tr(R)+\lambda Tr(R)-1=0, \tag{29}$$

   并且 $\lambda=1$ 是这个方程的一个解。

2. 写出绕 $x-$、$y-$、$z-$ 轴的转动矩阵，并得到 3 个转动的生成元 $\mathbf{L}_i$：

$$\mathbf{R}_i(\theta)=\mathbf{1}+\theta\mathbf{L}_i+\mathcal{O}(\theta^2), \tag{30}$$

   并证明

$$[\mathbf{L}_x,\ \mathbf{L}_y]\equiv\mathbf{L}_x\mathbf{L}_y-\mathbf{L}_y\mathbf{L}_x=\mathbf{L}_z \tag{31}$$

3. 已知空间坐标系 $x-y-z$ 与刚体坐标系 $x'-y'-z'$ 重合，经过欧拉转动 ϕ,θ,ψ 后，
   - 刚体上 $x'-$、$y'-$、$z'-$ 轴方向上的单位矢量 $\vec{i}'$、$\vec{j}'$、$\vec{k}'$ 在空间坐标系的表达式.
   - 空间坐标系的 $x-$、$y-$、$z-$ 轴方向上的单位矢量 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 在刚体坐标系中的表达式.

4. 刚体在绕着过原点的某个方向 $\hat{n}=(n_x,n_y,n_z)$ 转动了角度 ϕ，其上任意一点的位置矢量由 $\vec{r}$ 变为 $\vec{r}'$:

$$\vec{r}'=\hat{n}(\hat{n}\cdot\vec{r})+(\vec{r}-(\vec{r}\cdot\hat{n})\hat{n})\cos\phi+(\hat{n}\times\vec{r})\sin\phi \tag{32}$$

   将上式写成矩阵的形式。

5. 在空间反演变换下：$x_i\to -x_i$，位置矢量变化为

$$\vec{r}\to\vec{r}'=-\vec{r} \tag{33}$$

   而如果一个矢量在空间反演下不变，

$$\vec{A}\to\vec{A}'=\vec{A} \tag{34}$$

   称为赝矢量或者轴矢量。证明速度、加速度以及动量是矢量，而角动量为赝矢量。

6. 不考虑地球公转，地球表面上运动的物体在地球表面的参考系（非惯性系）中的速度、加速度与在地心参考系（惯性系）速度、加速度之间的关系。（为了简单，可以不考虑地轴的方向的变化。）

   地心参考系（惯性系）速度、加速度用 $\vec{v}$ 和 $\vec{a}$ 来表示，地球表面的参考系（非惯性系）中的速度、加速度用 $\vec{v}'$ 和 $\vec{a}'$，地心到质点的位置矢量用 $\vec{r}$:

HOMEWORK ASSIGNMENT #10

1.《大学物理》中刚体绕某个过原点的轴 $\hat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ 的转动惯量为

$$J \equiv \int dm(\vec{n} \times \vec{r})^2, \quad \text{or} \quad J \equiv \int dm(\vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n})\hat{n})^2 \tag{35}$$

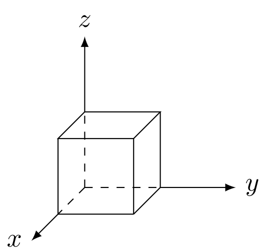
而刚体绕原点转动时的转动惯量张量为 I_{ij}。证明

$$J = I_{ij} n_i n_j \tag{36}$$

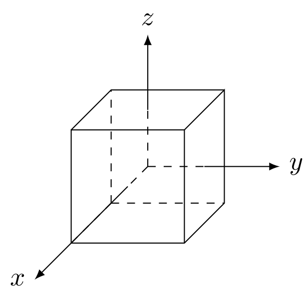
并得到定轴转动的角动量和动能为

$$L = J\omega, \quad T = \frac{1}{2} J\omega^2 \tag{37}$$

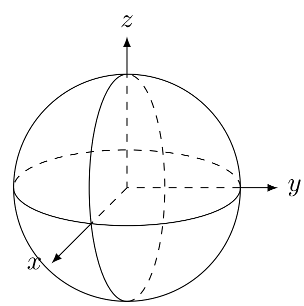
2. 计算下面（Fig.1-3）均匀刚体的转动惯量张量 (刚体质量均为 M，其中正方体边长为 a，球半径为 R.)



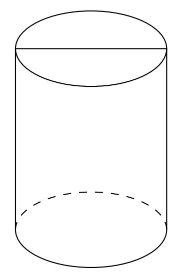
$Fig.1$



$Fig.2$



$Fig.3$


$Fig.4$

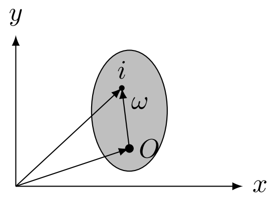
3. 如上图 Fig.4 中所示的均匀圆柱，圆柱底面半径为 r，高为 L，在图上标出质心位置以及过质心的转动主轴，并计算相应的转动惯量。

4. 刚体一般的运动可以分解为质心的运动，以及绕质心的转动。设刚体质量为 M，质心运动可以用位置矢量 $\vec{R} = (X, Y, Z)$ 描写。刚体绕质心的转动可以三个欧拉角 (ϕ, θ, ψ) 来表示，刚体过质心的转动惯量张量 $I_{\alpha\beta}$,
   - 写出用欧拉角表示的刚体本体参考系中角速度的三个分量分别 $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$
   - 写出刚体运动（平动 + 转动）时的动能
   - 写出刚体自由运动时的运动方程

5. Homework #5：求：
   - 底座固定时圆环（柱）的加速度 $\ddot{x}$ 和角加速度 $\ddot{\theta}$
   - 底座在平面上可以自由移动时圆环（柱）的加速度 $\ddot{x}$ （提示：参考课本 P69 页例 1）

HOMEWORK ASSIGNMENT #11

1. 求刚体做一般运动时的角动量与动能：刚体相对于某点 O 做转动，转动的角速度为 $\vec{\omega}$; 同时 O 点相对于坐标原点的位置矢量为 $\vec{r}_0$, 速度为 $\vec{v}_0$。



2. P179 例 1. 分别用空间坐标系和本体坐标系处理该问题。

3. 具有对称性的刚体，其主轴转动惯量分别 $I_1 = I_2$ 和 I_3。写出自由转动时用欧拉角表述的拉格朗日量；得到所有的广义动量，并判断哪些守恒；得到运动方程；得到三个运动积分；

4. 三个主轴转动惯量分别为 $I_1 = I_2$ 和 I_3 的刚体在重力作用下运动，写出用欧拉角表述的拉格朗日量；并得到三个运动积分；如果 θ 为刚体的 I_3 轴与空间坐标系 Z-轴的夹角，求刚体 θ 在 θ_0 附近微振动的频率，θ_0 满足

$$\ddot{\theta}|_{\theta_0} = 0 \tag{38}$$

5. P444 题 3.6

HOMEWORK ASSIGNMENT #12

1. 证明

$$[A,A]=0 \tag{39}$$
$$[A,A^n]=0 \tag{40}$$
$$[A,B+C]=[A,B]+[A,C] \tag{41}$$
$$[A,BC]=[A,B]C+B[A,C] \tag{42}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}[A,B]=\left[\frac{\partial A}{\partial t},B\right]+\left[A,\frac{\partial B}{\partial t}\right] \tag{43}$$

2. 证明

$$[q_i,p_j]=\delta_{ij} \tag{44}$$
$$[q_i,A]=\frac{\partial A}{\partial p_i} \tag{45}$$
$$[p_i,A]=-\frac{\partial A}{\partial q_i} \tag{46}$$

3. 一个带电量为 e 质量为 m 的质点，在电磁场中运动，其广义势可以写成

$$U=e\phi(x,y,z)-e\vec{v}\cdot\vec{A}(x,y,z) \tag{47}$$

4. 一个质量为 m 的质点，势能为 $V(\vec{r})$，写出在直角坐标系、球坐标系以及柱坐标系下的哈密尔顿量。
   - 写出系统的拉格朗日量，欧拉-拉格朗日运动方程以及正则动量。
   - 写出系统的拉格朗日量，以及哈密尔顿正则运动方程。

5. 一个质点的哈密尔顿量为

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2+\omega_2^2y^2) \tag{48}$$

   - 求角动量沿 z 轴的分量 $L_z=xp_y-yp_x$ 随时间的变化

$$\frac{dL_z}{dt}=? \tag{49}$$

   - L_z 守恒对 ω_1 和 ω_2 有什么要求？

HOMEWORK ASSIGNMENT #13

1. 一个质点在有心力场的作用下运动，其拉格朗日量在球坐标系中可以写成
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - V(r) \tag{50}$$
正则动量为
$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\theta = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi} \tag{51}$$
根据欧拉-拉格朗日方程可以证明 p_ϕ 是一个守恒量
$$\frac{d}{dt}p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad p_\phi = L_3 = cont. \tag{52}$$
质点的哈密顿量为
$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2\sin^2\theta}\right) + V(r)$$
根据哈密顿正则方程，可以得到：
$$\dot{p}_\phi = [p_\phi, H] = 0 \tag{53}$$
所以 p_ϕ 是一个守恒量。并计算
$$[p_r, H] = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\theta^2}{mr^3} + \frac{p_\phi^2}{mr^3\sin^2\theta} - \frac{\partial V}{\partial r}, \tag{54}$$
$$[p_\theta, H] = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta}, \tag{55}$$
$$[p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}, H] = [p_\theta^2, H] + p_\phi^2[\frac{1}{\sin^2\theta}, H] \tag{56}$$
$$= -2p_\theta\frac{\partial H}{\partial \theta} + p_\phi^2\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = 0 \tag{57}$$
所以 $p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}$ 也是一个守恒量。

2. 二维谐振子
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2) \tag{58}$$
其哈密顿量为
$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\omega_1^2x^2 + \omega_2^2y^2)$$
角动量
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad L = xp_y - yp_z \tag{59}$$
并不守恒，可以通过计算
$$[L, H] = m(\omega_1^2x^2 - \omega_2^2y^2) \neq 0; \qquad [L^2, H] = 2m(\omega_1^2x^2 - \omega_2^2y^2)L \neq 0 \tag{60}$$
也可以通过矢量力学中的角动量定理：
$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V = -m(\omega_1^2x, \omega_2^2y); \tag{61}$$
$$\frac{d\dot{\vec{L}}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \neq 0 \tag{62}$$
即角动量不是守恒量，角动量的大小也不是守恒量。

3. 一个各向同性的二维谐振子，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) \tag{63}$$

其哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2). \tag{64}$$

角动量 $L = xp_y - yp_x$ 是个守恒量，即

$$\text{矢量力学} \quad \vec{M} = 0, \tag{65}$$

$$\text{拉格朗日力学} \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0, \tag{66}$$

$$\text{哈密顿力学} \quad [L, H] = 0 \tag{67}$$

引入三个物理量，其定义为：

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2m}(p_x^2 - p_y^2) + \frac{1}{2}k(x^2 - y^2) \\ S_2 &= \frac{1}{m}p_x p_y + kxy \\ S_3 &= \omega(xp_y - yp_x) \end{aligned} \tag{68}$$

计算可得

$$[H, S_i] = 0 \tag{69}$$

$$[S_1, S_2] = 2\omega S_3 \tag{70}$$

$$[S_2, S_3] = 2\omega S_1 \tag{71}$$

$$[S_3, S_1] = 2\omega S_2 \tag{72}$$

4. 向空间坐标从 (q, p) 变换到 (Q, P)：

$$\begin{aligned} Q &= \ln(1 + \sqrt{q}\cos p) \\ P &= 2(\sqrt{q} + q\cos p)\sin p \end{aligned} \tag{73}$$

可以得到变换矩阵

$$\begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{P} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{\cos(p)}{2\left(q\cos(p)+\sqrt{q}\right)} & -\frac{\sqrt{q}\sin(p)}{\sqrt{q}\cos(p)+1} \\ \sin(p)\left(2\cos(p) + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) & 2\left(q\cos(2p) + \sqrt{q}\cos(p)\right) \end{pmatrix} \tag{74}$$

可以证明

$$M.J.M^T = J, \tag{75}$$

所以变换是正则变换，该变换的生成函数可以写成第二种类型

$$U_2 = -[e^Q - 1]^2 \tan p \tag{76}$$

可以得到

$$q = -\frac{\partial U_2}{\partial p} = \left(e^Q - 1\right)^2 \sec^2(p), \quad P = -\frac{\partial U_2}{\partial Q} = 2e^Q\left(e^Q - 1\right)\tan(p) \tag{77}$$

整理可得

$$Q = \ln(1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p), \quad P = 2(1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p)q^{\frac{1}{2}}\sin p. \tag{78}$$

5. 一个质点在有心力的作用运动，

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

其势能可以写成

$$V(r) = \int_r^\infty \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{k}{r} \tag{79}$$

角动量矢量 $\vec{L}$ 是个守恒矢量，

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \tag{80}$$

而且 Laplace-Runge-Lenz 矢量

$$\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} + mk\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{81}$$

也是守恒矢量，可以直接根据矢量运算证明：

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{L} + k\frac{\mathbf{p}}{r} + k\mathbf{r}\frac{\mathbf{p} \cdot \widehat{\mathbf{r}}}{r^2} &(82)\\ &= \mathbf{F} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) + \mathbf{p}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}) = 0 &(83) \end{aligned}$$

也可以根据 Poisson 括号得到，

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + [\mathbf{A}, H] = 0. \tag{84}$$