

第2章 经典物理回顾

本章我们复习经典力学中的拉格朗日形式和哈密顿形式，并用这两个框架分析物理问题。在此过程中我们还会进一步熟悉向量的指标运算，学习球坐标下的计算技巧。

经典的物体似乎都能分成粒子和波两种类型，为什么会有这两种不同的类型，本章的最后一节将会给出答案。

2.1 牛顿力学

在微观物理中，所有的力都是保守力。对于质量为 m 的粒子，牛顿第二定律给出的运动方程为，

$$m \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

这时二阶微分方程，需要两个边界条件，通常情况下取初始时刻的坐标 $x^i(t_0)$ 和速度 $dx^i/dt|_{t_0}$ 。

牛顿力学在逻辑上很直接，粒子在每个时刻根据自己的位置、速度和此时此刻受到的外界作用力，决定自己下一步应该如何运动。

对一般的势 V ，上述方程通常没有解析解，需要求助于数值方法。此时需要将微分变成差分，

$$\begin{aligned} \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_t &= \frac{x^i(t + \Delta t) - x^i(t)}{\Delta t}, \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} &= \frac{1}{\Delta t} \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t+\Delta t} - \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_t \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{x^i(t + 2\Delta t) - x^i(t + \Delta t)}{\Delta t} - \frac{x^i(t + \Delta t) - x^i(t)}{\Delta t} \right\} \\ &= \frac{1}{(\Delta t)^2} \{x^i(t + 2\Delta t) - 2x^i(t + \Delta t) + x^i(t)\} \end{aligned}$$

 **练习 2.1** 假设一个质量为 m 的质点在 t_0 时刻的位置和速度分别为，

$$x^i(t_0) = a_0^i, \quad \left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t_0} = b_0^i,$$

粒子受力为 $F^i(t, \vec{x})$ ，用上述差分方法写出 $x^i(t + 2\Delta t)$

2.2 拉格朗日力学

牛顿力学的逻辑是从初始时刻向后演化。拉格朗日形式的思路完全不同，它试图回答给定初始 t_0 时刻的位置 $x^i(t_0)$ 和终止时刻 t_f 时刻的位置 $x^i(t_f)$ ，粒子为什么沿牛顿力学给出的路径行进，而不走其他的路径？或者说牛顿力学给出的路径有何特别之处？

定义 2.1 (拉格朗日量 (Lagrangian))

拉格朗日量或称拉式量定义为

$$L(t, x^i, \dot{x}^i) = T - V$$

，其中 T 是系统的动能， V 是系统的势能。



定义 2.2 (作用量 (Action))

作用量定义为

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L(t, x^i, \dot{x}^i) dt$$

, 注意 $S[x(t)]$ 的自变量为函数 $x^i(t)$ 。给定 $x^i(t)$, 函数值是一个数字。这种将函数变成数字的映射叫做泛函。

**定理 2.1 (最小作用量原理)**

粒子选择的经典路径 $x_{cl}(t)$ 使作用量 $S[x_{cl}(t)]$ 取极值, 即

$$\left. \frac{\delta S}{\delta x^i(t)} \right|_{x^i=x_{cl}^i} = 0,$$

其中 $\delta/\delta x^i(t)$ 称为泛函微分。



思考: 在粒子刚开始运动的时候, 它是怎么知道哪条路径的作用量取极值的?

练习 2.2 从最小作用量原理推导出拉格朗日方程,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0.$$

练习 2.3 考虑一个质量为 m 、体积可忽略的木块, 被一根胡克系数为 k 的弹簧连接到一个竖直的墙上。木块在水平平面做一维运动, 忽略弹簧质量和一切摩擦力。

- (1) 建立合适的坐标系, 写下动能和势能的表达式, 写出拉氏量, 并画出势能的函数曲线;
- (2) 用拉氏量解出运动学方程;
- (3) 若木块振动的振幅为 A , 求解木块出现在各处的概率。

练习 2.4 质量为 m 的质点在中心势场 $V(r)$ 中运动, 在极坐标下写出拉氏量, 并解出运动方程。

2.3 哈密顿力学

拉格朗日方程为二阶微分方程, 需要两组边界条件才能求解。二阶微分方程可以写成两个一阶微分方程, 比如 $m\ddot{x}^i = F^i$ 可写成 $\dot{x}^i = p^i/m$ 和 $\dot{p}^i = F^i$ 两个一阶方程。

为了保持更好的数学对称性, 哈密顿形式将拉格朗日形式中的广义速度 $\dot{q}^i$ 替换成广义动量,

$$p^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}.$$

定义 2.3 (哈密顿量 (Hamiltonian))

哈密顿量可以通过对拉格朗日量进行勒让德变换得到,

$$H(q^i, p^i) = \sum_i \dot{q}^i p^i - L(t, q^i, \dot{q}^i),$$

其中 $\dot{q}^i$ 是 q^j 和 p^j 的函数。在哈密顿形式中, 广义坐标 q^i 和广义动量 p^i 的地位相同。



哈密顿形势下的动力学方程为:

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p^i}, \\ \dot{p}^i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}.\end{aligned}$$

 **练习 2.5** 对于 n 个粒子的系统, 其中第 n 个粒子的质量为 m_i , 坐标记为 (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) ,

- (1) 写出动能项 T ;
- (2) 若粒子受力均为保守力, 则可将势能项写成 $V(x_{ij})$, 写出拉格朗日量并推导出拉格朗日方程;
- (3) 用勒让德变换写出哈密顿量, 证明 $H = T + V$.

 **练习 2.6** 若动能项有非对角项 $T = \sum_{ij} T_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$, 且 $V = V(q^i)$, 证明 $\sum_i p^i \dot{q}^i = 2T$.

 **练习 2.7** 用哈密顿形式得到练习 2.3 的运动方程。

 **练习 2.8** 带电量为 q 的粒子在稳恒电磁场中的拉氏量为,

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^i)^2 - q\Phi + \frac{q}{c}\dot{x}^i A^i,$$

其中 Φ 为电势能, A^i 为矢势,

- (1) 写出 x^i 的共轭动量 p^i 的表达式;
- (2) 写出哈密顿量;
- (3) 和自由粒子的哈密顿量相比, 电磁场中带电粒子的哈密顿量有哪些不同? 为什么 A^i 不出现在势能项中?

定义 2.4 (泊松括号 (Poisson Bracket))

两个物理量 A 和 B 的泊松括号定义为,

$$\{A, B\}_{P.B.} = \frac{\partial A}{\partial q^i} \frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial B}{\partial q^i} \frac{\partial A}{\partial p^i}.$$



若一个物理量 ω 不显含时间, 即 $\omega = \omega(q^i, p^i)$, 则,

$$\begin{aligned}\frac{d\omega}{dt} &= \frac{\partial \omega}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial \omega}{\partial p^i} \dot{p}^i \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial \omega}{\partial p^i} \frac{\partial H}{\partial q^i} \\ &= \{\omega, H\}_{P.B.}\end{aligned}$$

即 ω 为守恒量的充要条件是 ω 和 H 的泊松括号为零。

 **练习 2.9** 证明运动方程可写成泊松括号的形式

$$\begin{aligned}\dot{q}^i &= \{q^i, H\}_{P.B.} \\ \dot{p}^i &= \{p^i, H\}_{P.B.}\end{aligned}$$

 **练习 2.10** 证明泊松括号具有如下性质

- (1) $\{A, B\}_{P.B.} = -\{B, A\}_{P.B.}$
- (2) $\{A, B + C\}_{P.B.} = \{A, B\}_{P.B.} + \{A, C\}_{P.B.}$
- (3) $\{A, BC\}_{P.B.} = B\{A, C\}_{P.B.} + \{A, B\}_{P.B.}C$

 **练习 2.11** 考虑空间中的两个粒子，质量分别为 m_1 和 m_2 ，坐标分别为 $\vec{x}_1$ 和 $\vec{x}_2$ ，两粒子的相互作用由 $V(|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|)$ 描述，

(1) 写出该系统的哈密顿量

(2) 变换坐标到 $\vec{X} = \frac{m_1\vec{x}_2 + m_2\vec{x}_1}{m_1 + m_2}$ 和 $\vec{x}_{12} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ ，求新的哈密顿量。

2.4 波动光学 *

2.5 几何光学 *

2.6 程函近似：从波动光学推出几何光学 *

2.7 从几何光学到波动光学 *

2.8 第二章练习答案