

小测验一 (矢量力学、虚功原理及拉格朗日方程) 姓名: _____ 学号: _____ 班级 _____

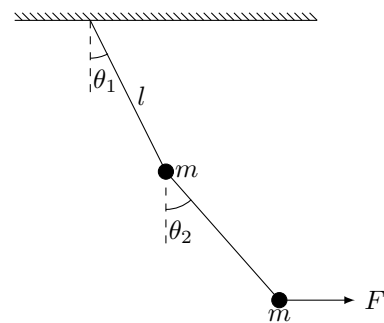
如图, 两个质量为 m 的质点被两根长度为 l 的轻细绳连接, 细绳不可伸缩。在水平拉力 F 的作用下, 系统达到平衡。求:

1. 虚功原理:

- 写出系统的约束条件;
- 两个质点的虚位移;
- 写出所有主动力的虚功, 并利用虚功原理求 θ_1 、 θ_2 与 F 的关系

2. 拉格朗日方程:

- 利用 θ_1 、 θ_2 作为广义坐标, 写出系统的拉格朗日量
- 写出拉力 F 的广义力表达式
- 利用 $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = Q_i$ 求出 θ_1 、 θ_2 与 F 的关系



解: 1. 虚功原理:

$$(2 \text{ 分}) \quad x_1^2 + y_2^2 - \ell^2 = 0, \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \ell^2 = 0 \quad (1)$$

$$(1 \text{ 分}) \quad \delta \vec{r}_1 = \ell \delta \theta_1 (\cos \theta_1, \sin \theta_1) \quad (2)$$

$$(2 \text{ 分}) \quad \delta \vec{r}_2 = \ell \delta \theta_1 (\cos \theta_1, \sin \theta_1) + \ell \delta \theta_2 (\cos \theta_2, \sin \theta_2) \quad (3)$$

$$\delta W = F \delta x_2 - m_1 g \delta y_1 - m_2 g \delta y_2 \quad (4)$$

$$(3 \text{ 分}) \quad = (F \cos \theta_1 - m_1 g \sin \theta_1 - m_2 g \sin \theta_1) \ell \delta \theta_1 + (F \cos \theta_2 - m_2 g \sin \theta_2) \ell \delta \theta_2 = 0 \quad (5)$$

解得

$$(2 \text{ 分}) \quad \tan \theta_1 = \frac{F}{(m_1 + m_2)g}, \quad \tan \theta_2 = \frac{F}{m_2 g} \quad (6)$$

2 第二类拉格朗日方程:

$$(4 \text{ 分}) \quad L = \frac{1}{2} m_1 \ell^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \ell^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + 2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2) + m_1 g \ell \cos \theta_1 + m_2 g \ell (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (7)$$

F 对应的广义力为

$$(2 \text{ 分}) \quad Q_i = F \frac{\partial x_2}{\partial \theta_i} = F \ell (\cos \theta_1, \cos \theta_2) \quad (8)$$

根据第二类拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = Q_i \quad (9)$$

方程左边展开即为双摆的运动方程。这儿要处理的是平衡问题即

$$(2 \text{ 分}) \quad \ddot{\theta}_i = 0, \quad \dot{\theta}_i = 0 \quad (10)$$

所以第二类拉格朗日方程左边第一项展开一定为零, 需要考虑坐标第二项即可:

$$(1 \text{ 分}) \quad - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = Q_1 : (m_1 + m_2) g \ell \sin \theta_1 = F \ell \cos \theta_1 \quad (11)$$

$$(1 \text{ 分}) \quad - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = Q_2 : m g \ell \sin \theta_2 = F \ell \cos \theta_2 \quad (12)$$

解得

$$\tan \theta_1 = \frac{F}{(m_1 + m_2)g}, \quad \tan \theta_2 = \frac{F}{m_2 g} \quad (13)$$

3. 还可以用中学学的受力分析来做

$$T_2 \sin \theta_2 = T_1 \sin \theta_1, \quad T_1 \cos \theta_1 = m_1 g + T_2 \cos \theta_2 \quad (14)$$

$$T_2 \sin \theta_2 = F, \quad T_2 \cos \theta_2 = m_2 g \quad (15)$$

解方程得到

$$\tan \theta_1 = \frac{F}{(m_1 + m_2)g}, \quad \tan \theta_2 = \frac{F}{m_2 g} \quad (16)$$